Ε. Ν. ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
Αναπλ. Καθηγήτρια

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ Νο 10

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Μετασχηματισμός Fourier): Μόνο με χρήση του ορισμού, να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των κάτωθι συναρτήσεων:

(i) $f_1(x)=\begin{cases}0, & |x|>2\\ 1, & |x|\le 2\end{cases}$ Απ. $F_1(\omega)=\dfrac{2\sin(2\omega)}{\omega}$

(ii) $f_2(x)=\begin{cases}0, & |x|>1\\ 1-x^2, & |x|\le 1\end{cases}$ Απ. $F_2(\omega)=4\dfrac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}$

(iii) $f_3(x)=\begin{cases}e^x, & |x|\le\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$ Απ. $F_3(\omega)=2\dfrac{1+i\omega}{1+\omega^2}\left[\sinh\pi\cdot\cos(\omega\pi)-i\cosh\pi\cdot\sin(\omega\pi)\right]$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier): Αν ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι $F(\omega)=e^{-\omega^4}$, να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων $f(2x)$, $f(2x+1)$ και $e^{ix}f(2x+1)$.

Απ. $\dfrac{1}{2}e^{-\omega^4/16}$, $\dfrac{e^{i\omega}}{2}e^{-\omega^4/16}$, $\dfrac{e^{i(\omega-1)}}{2}e^{-(\omega-1)^4/16}$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier): Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων $f(x)\sin(\alpha x)$ και $f(x)\sin^2(\alpha x)$.

Απ. $\dfrac{F(\omega-\alpha)-F(\omega+\alpha)}{2i}$, $\dfrac{2F(\omega)-F(\omega-2\alpha)-F(\omega+2\alpha)}{4}$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier και αντιστροφή): Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης να βρεθεί ποια συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Fourier $F(\omega)=\dfrac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}$.

Απ. $e^{-|x|}\left(1+|x|\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 5 (*Επίλυση Μ.Δ.Ε. με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier*):

Να βρεθεί η λύση των κάτωθι προβλημάτων, με κατάλληλη χρήση του μετασχηματισμού Fourier:

(i) $u_t=4u_{xx},\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(x,0)=e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

Απ. $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+16t}}e^{-\frac{x^2}{1+16t}}$

(ii) $u_{xx}+u_{yy}=0,\ x\in\mathbb{R},\ y>0,\ u=u(x,y)$ με $u(x,0)=f(x)$ και $F[u(x,y)]$ φραγμένη για $y>0$.

Απ. $u(x,y)=\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi$