ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ Νο 9

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Επίλυση Π.Α.Τ.): Με χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace, να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα αρχικών τιμών (όπου $y=y(t)$):

(i) $y''+11y'+24y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$ Απ. $y(t)=\frac{3}{5}e^{-8t}-\frac{8}{5}e^{-3t}$

(ii) $16y''+8y'+65y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$ Απ. $y(t)=e^{-t/4}\sin(2t)$

(iii) $y'''-4y''-9y'+36y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-1$

Απ. $y(t)=-\frac{10}{7}e^{4t}+\frac{13}{6}e^{3t}+\frac{11}{42}e^{-3t}$

(iv) $y''-y'-2y=e^{-t}$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$ Απ. $y(t)=\frac{8}{9}e^{-t}+\frac{10}{9}e^{2t}-\frac{1}{3}te^{-t}$

(v) $y''+5ty'-10y=2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $\lim\limits_{s\to+\infty}Y(s)=0$ Απ. $y(t)=6t^2+1$

(vi) $y''+ty'-2y=4$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $\lim\limits_{s\to+\infty}Y(s)=0$ Απ. $y(t)=2t^2$

(vii) $y''+6y'+8y=f(t)$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$

Απ. $y(t)=-e^{-4t}+2e^{-2t}+\frac{1+e^{4-4t}-2e^{2-2t}}{8}H(t-1)$

(viii) $y''+9y=\cos t+\delta(t-\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

Απ. $y(t)=\frac{\cos t}{8}-\frac{\cos(3t)}{8}-\frac{1}{3}\sin(3t)H(t-\pi)$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Επίλυση Σ.Σ.Δ.Ε.): Με χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace, να λυθούν τα κάτωθι συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (όπου $y=y(t)$, $x=x(t)$, $z=z(t)$):

(i) $\left.\begin{array}{r}x'-2x+3y=0\\ y'+9x+4y=0\end{array}\right\}$, $x(0)=0$, $y(0)=4$ Απ. $\left.\begin{array}{l}x(t)=e^{-7t}-e^{5t}\\ y(t)=3e^{-7t}+e^{5t}\end{array}\right\}$

(ii) $\left.\begin{array}{r}x'-x-3y=e^{4t}\\ y'-5x+y=0\end{array}\right\}$, $x(0)=0$, $y(0)=0$ Απ. $\left.\begin{array}{l}x(t)=\dfrac{40te^{4t}+3e^{4t}-3e^{-4t}}{64}\\ y(t)=\dfrac{40te^{4t}-5e^{4t}+5e^{-4t}}{64}\end{array}\right\}$

(iii) $\left.\begin{array}{r}x'-5x+4y-2z=0\\ y'+2x+2y+2z=0\\ z'-z=0\end{array}\right\}$, $x(0)=0$, $y(0)=0$, $z(0)=15$ Απ.

$x(t)=\frac{5e^{-3t}+16e^{6t}-21e^{t}}{2}$

$y(t)=-3e^{t}+5e^{-3t}-2e^{6t}$

$z(t)=15e^{t}$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (*Επίλυση Μ.Δ.Ε.*): Να βρεθεί η λύση των κάτωθι προβλημάτων, με κατάλληλη χρήση του μετασχηματισμού Laplace:

(i) $u_{xt} - \cos t = 0,\ x > 0,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(x,0) = 0$, $x > 0$ και $u(0,t) = 0$, $t > 0$

Απ. $u(x,t) = x \sin t$

(ii) $u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(0,t) = 1$, $u(1,t) = 1$, $t > 0$ και $u(x,0) = 1 + \sin(\pi x)$, $0 < x < 1$

Απ. $u(x,t) = 1 + e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$

(iii) $\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} = k \sin \frac{\pi x}{\alpha},\ 0 < x < \alpha,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(0,t) = 0 = u(\alpha,t)$, $t > 0$ και $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $0 < x < \alpha$

Απ. $u(x,t) = \frac{\alpha^2 k}{\pi^2}\left(1 - \cos \frac{\pi c t}{\alpha}\right) \sin \frac{\pi x}{\alpha}$