Ε. Ν. ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
Αναπλ. Καθηγήτρια

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ Νο 7

ΑΣΚΗΣΗ 1 (*Μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών για ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, με σταθερούς συντελεστές και ομογενείς συνοριακές συνθήκες*): Να βρεθεί η λύση των κάτωθι προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, με χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών:

(i) $u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=\sin(3\pi x)$, $0<x<1$ (Απ. $u(x,t)=\dfrac{1}{3\pi}\sin(3\pi x)\sin(3\pi t)$)

(ii) $u_t=u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=\sin(3\pi x)$, $0<x<1$ (Απ. $u(x,t)=e^{-9\pi^2 t}\sin(3\pi x)$)

(iii) $u_t=u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=\sin(2\pi x)+\dfrac{1}{3}\sin(4\pi x)+\dfrac{1}{5}\sin(6\pi x)$, $0<x<1$

(Απ. $u(x,t)=e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)+\dfrac{1}{3}e^{-16\pi^2 t}\sin(4\pi x)+\dfrac{1}{5}e^{-36\pi^2 t}\sin(6\pi x)$)

(iv) $u_t=u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=x-x^2$, $0<x<1$ (Απ. $u(x,t)=\dfrac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}\sin[(2k+1)\pi x]$)

(v) $u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<1,\ 0<y<1,\ u=u(x,y)$ με $u(0,y)=0$, $u(1,y)=0$, $0<y<1$ και $u(x,0)=0$, $u(x,1)=x$ $0<x<1$ (Απ. $u(x,y)=-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi)}{n\sinh(n\pi)}\sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$)

(vi) $u_{xx}=u_{tt}+2u_t,\ 0<x<\pi,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=0$, $u(\pi,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=\sin x+\sin(3x)$, $u_t(x,0)=0$, $0<x<\pi$

(Απ. $u(x,t)=e^{-t}(1+t)\sin x+e^{-t}\left[\cos(\sqrt{8}t)+\dfrac{1}{\sqrt{8}}\sin(\sqrt{8}t)\right]\sin(3x)$)

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2 (*Μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους μη ομογενείς ή με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες*):</u> Να βρεθεί η λύση των κάτωθι προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, με χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών:

(i) $u_t = u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(0,t) = 2$, $u(2,t) = 5$, $t > 0$ και $u(x,0) = 1 - x^2$, $0 < x < 2$

(Απ. $u(x,t) = \frac{3}{2}x + 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{16(-1)^n - 2}{n\pi} + \frac{16(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}\right]e^{-n^2\pi^2 t/4}\sin\frac{n\pi x}{2}$)

(ii) $u_t = u_{xx} + \cos x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u_x(0,t) = 0$, $u_x(\pi,t) = 0$, $t > 0$ και $u(x,0) = \cos^2 x + 2\cos^4 x$, $0 < x < \pi$

(Απ. $u(x,t) = \frac{5}{4} + \cos x - e^{-t}\cos x + \frac{3}{2}e^{-4t}\cos(2x) + \frac{1}{4}e^{-16t}\cos(4x)$)