Αναπλ. Καθηγήτρια

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 6

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Προβλήματα συνοριακών τιμών): Να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα συνοριακών τιμών:

(i) $y''(x)+2y'(x)-3y(x)=0$, $y(0)=0$, $y'(1)=0$ Απ. $y(x)=0$

(ii) $y''(x)+2y'(x)-3y(x)=9x$, $y(0)=1$, $y'(1)=2$

Απ. $y(x)=\dfrac{(3e-5)e^{-3x}+(5+9e^{-3})}{e+3e^{-3}}e^{x}-3x-2$

(iii) $y''(x)+4y(x)=0$, $y(0)=0$, $y(\pi/4)=7$ Απ. $y(x)=7\sin(2x)$

(iv) $y''(x)+4y(x)=0$, $y(0)=4$, $y(\pi)=4$ Απ. $y(x)=4\cos(2x)+c\sin(2x)$

(v) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0$, $y(0)=0$, $y(1)+y'(1)=0$ Απ. $y(x)=0$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Προβλήματα ιδιοτιμών): Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις των κάτωθι προβλημάτων συνοριακών τιμών:

(i) $y''(x)-4\lambda y'(x)+4\lambda^2 y(x)=0$, Απ. Ιδιοτιμή -1,

$y(0)=0$, $y(1)+y'(1)=0$ Ιδιοσυνάρτηση xe^{-2x}

(ii) $y''(x)+\lambda y'(x)=0$, Απ. Δεν υπάρχουν ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$y(0)+y'(0)=0$, $y'(1)=0$

(iii) $y''(x)+2y'(x)+\left(1-\lambda\right)y(x)=0$, Απ. Ιδιοτιμές $-n^2\pi^2$,

$y(0)=0$, $y(1)=0$ Ιδιοσυναρτήσεις $e^{-x}\sin(n\pi x)$,

$n=1,2,3,\dots$

ΑΣΚΗΣΗ 3 Να βρεθεί η σειρά Fourier των κάτωθι (περιοδικών θεωρούμενων) συναρτήσεων, καθώς και οι αντίστοιχες ταυτότητες Parseval:

(i) $f(x)=4x,\ x\in[-10,10]$

Απ. $f(x)=\dfrac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{10}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

(ii) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 0, & -1\le x\le 0\end{cases}$

Απ.

$$f(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos[(2n+1)\pi x]}{(2n+1)^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(n\pi x)}{n},$$

$$\frac{4}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{5}{24}$$

(iii) $f(x)=\begin{cases}3, & 0<x\le 5\\ 0, & -5\le x\le 0\end{cases}$

Απ. $f(x)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{5}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

(iv) $f(x)=x^2,\ x\in[-\pi,\pi]$

Απ. $f(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^4}{90}$