ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ Νο 5

ΑΣΚΗΣΗ 1 ***(Χαρακτηρισμός και ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους):*** Να χαρακτηρισθούν πλήρως οι κάτωθι εξισώσεις (θεωρείστε $u = u(x, y)$):

(i) $u_x + u_y - u = 0$

(ii) $u_x u_y - u^2 = 0$

(iii) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$

(iv) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

(v) $u_{xx} + 5u_{xy} - 2u_{yy} = 0$

(vi) $2u_{xx} + (x-1)u_{yy} + yu_x - xu_y = 0,\ x \neq 1$

(vii) $e^{-y}u_{xx} + \sin y = u_{yy}$

(viii) $u_{xy} + (\sin x)u_y + (\cos y)u_x = 0$

(ix) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin x$

(x) $u_{xx} = uu_{yyyy} + e^{-x}$

ΑΣΚΗΣΗ 2 ***(Λύσεις διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους):*** Να δειχθεί ότι

(i) η $u(x, y) = x + y^2$ είναι λύση της $2xu_x + yu_y = 2u$

(ii) η $u(x, y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right),\ x \neq 0$ είναι λύση της $xu_x + yu_y = 0$, όπου f αυθαίρετη συνάρτηση

ΑΣΚΗΣΗ 3 ***(Λύσεις διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους):*** Να προσδιορισθεί το λ ώστε η συνάρτηση $u(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{\lambda}$, όπου $n \geq 3$, να είναι **μη τετριμμένη** λύση της εξίσωσης $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$.

(Απ. $\lambda = 1 - \dfrac{n}{2}$)

ΑΣΚΗΣΗ 4 ***(Λύση του d' Alembert):*** Να βρεθεί η λύση του d'Alembert για το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \text{ όπου } u = u(x,t) \text{ με } u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 1.$$

(Απ. $u(x,t) = t + \sin x \cdot \cos t$)