<div style="border:1px solid black; text-align:center;">

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 4

</div>

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Συστήματα διαφορικών εξισώσεων-Επίλυση με χρήση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων):

Με χρήση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, να λυθούν τα κάτωθι συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (όπου $y = y(t)$, $x = x(t)$, $z = z(t)$):

(i)
$$\left.\begin{array}{l} x' = x - 10y \\ y' = -7x + 10y \end{array}\right\}$$

Απ. $\begin{array}{l} x(t) = -5c_1 e^{15t} + 2c_2 e^{-4t} \\ y(t) = 7c_1 e^{15t} + c_2 e^{-4t} \end{array}$

(ii)
$$\left.\begin{array}{l} x' = 6x - y \\ y' = 5x \end{array}\right\}$$

Απ. $\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ y(t) = 5c_1 e^t + c_2 e^{5t} \end{array}$

(iii)
$$\left.\begin{array}{l} x' = 4x + z \\ y' = -2y \\ z' = -z \end{array}\right\}$$

Απ. $\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) = c_3 e^{-2t} \\ z(t) = -5c_2 e^{-t} \end{array}$

(iv)
$$\left.\begin{array}{l} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x + 3y \end{array}\right\}$$

Απ. $\begin{array}{l} x(t) = c_2 e^{3t} \cos(4t) - c_1 e^{3t} \sin(4t) \\ y(t) = c_1 e^{3t} \cos(4t) + c_2 e^{3t} \sin(4t) \end{array}$

(v)
$$\left.\begin{array}{l} x' = 2x \\ y' = 3y - 5z \\ z' = 2y - 3z \end{array}\right\}$$

Απ. $\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{2t} \\ y(t) = (3d_1 + d_2)\cos t + (3d_2 - d_1)\sin t \\ z(t) = 2d_1 \cos t + 2d_2 \sin t \end{array}$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Μη ομογενή συστήματα διαφορικών εξισώσεων):

Να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι μη ομογενών συστημάτων (όπου $y = y(t)$, $x = x(t)$, $z = z(t)$):

(i)
$$\left.\begin{array}{l} x' = 2y + e^t \\ y' = -x + 3y - e^t \end{array}\right\}$$

Απ. $\begin{array}{l} x(t) = 2c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 3e^t + 4te^t \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 3e^t + 2te^t \end{array}$

(ii)
$$\left.\begin{array}{l} x' = x - y + e^t \cos t \\ y' = x + y + e^t \sin t \end{array}\right\}$$

Απ. $\begin{array}{l} x(t) = d_2 e^t \cos t - d_1 e^t \sin t + te^t \cos t \\ y(t) = d_2 e^t \sin t + d_1 e^t \cos t + te^t \sin t \end{array}$

(iii)
$$\left.\begin{array}{l} x' = y + z + 3e^t \\ y' = x + z - e^t \\ z' = x + y - e^t \end{array}\right\}$$

Απ. $\begin{array}{l} x(t) = -c_1 e^{-t} - c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + e^t \\ y(t) = c_3 e^{2t} + c_1 e^{-t} - e^t \\ z(t) = c_3 e^{2t} + c_2 e^{-t} - e^t \end{array}$