ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 3

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Ορίζουσα Wronski): Να υπολογισθεί η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων:

(i) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 4x - 1$ Απ. 1

(ii) $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$ Απ. e^{2x}

(iii) $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$ Απ. -1

(iv) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$ Απ. $e^x(x-1)$

(v) $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = e^{2x}$ Απ. $5e^{-x}$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις ομογενών διαφορικών εξισώσεων):

(α) Να δειχθεί ότι το εκάστοτε σύνολο συναρτήσεων S, αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης

(i) $S = \{e^{-6x}, e^{-4x}\}$, $y''(x) + 10y'(x) + 24y(x) = 0$

(ii) $S = \{\cos(2x), \sin(2x)\}$, $y''(x) + 4y(x) = 0$

(β) Να βρεθούν οι τιμές των β και γ, έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\{e^{-x}, e^x\}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = 0$$

(Απ. $\beta = 0$, $\gamma = -1$)

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Ομογενείς, γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, με σταθερούς συντελεστές): Με χρήση της μεθόδου εκθετικής αντικατάστασης, να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων:

(i) $2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = 0$ Απ. $y(x) = c_1 e^{3x/2} + c_2 e^x$

(ii) $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$ Απ. $y(x) = e^{-x}\left[c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)\right]$

(iii) $y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = 0$ Απ. $y(x) = e^{4x}(c_1 + c_2 x)$

(iv) $y''(x) + 7y'(x) = 0$ Απ. $y(x) = c_1 + c_2 e^{-7x}$

(v) $y''(x) + 9y(x) = 0$ Απ. $y(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (Μη ομογενείς, γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, με σταθερούς συντελεστές): Με χρήση της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών, να βρεθεί μια μερική λύση $y_p(x)$ των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων:

(i) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = x$ Απ. $y_p(x) = \dfrac{2}{9} - \dfrac{x}{3}$

(ii) $9y''(x) - 12y'(x) + 4y(x) = e^{-3x}$ Απ. $y_p(x) = \dfrac{e^{-3x}}{121}$

(iii) $2y''(x) + 4y'(x) - 7y(x) = 7\cos(2x)$ Απ. $y_p(x) = \dfrac{56}{289}\sin(2x) - \dfrac{105}{289}\cos(2x)$

(iv) $y''(x)+4y'(x)-5y(x)=-3e^{x}$ Απ. $y_p(x)=-\dfrac{xe^{x}}{2}$

(v) $y''(x)-4y'(x)-5y(x)=-648x^2e^{5x}$ Απ. $y_p(x)=\left(-6x+18x^2-36x^3\right)e^{5x}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5 (Μη ομογενείς, γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, με σταθερούς συντελεστές):</u> Με χρήση της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων, να βρεθεί μια μερική λύση $y_p(x)$ των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων:

(i) $y''(x)-2y'(x)+y(x)=e^{x}\ln x$, $x>0$ Απ. $y_p(x)=\dfrac{x^2e^{x}}{4}\left(2\ln x-3\right)$

(ii) $y''(x)+9y(x)=\dfrac{1}{\cos(3x)}$ Απ. $y_p(x)=\dfrac{x}{3}\sin(3x)+\dfrac{\cos(3x)}{9}\ln\left|\cos(3x)\right|$

(iii) $y''(x)-2y'(x)+y(x)=\dfrac{e^{x}}{x}$, $x>0$ Απ. $y_p(x)=xe^{x}\left(\ln x-1\right)$

(iv) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=\dfrac{e^{2x}}{x^2}$, $x>0$ Απ. $y_p(x)=-e^{2x}\left(\ln x+1\right)$

(v) $y''(x)+3y'(x)+2y(x)=\cos e^{x}$ Απ. $y_p(x)=-e^{-2x}\cos e^{x}$