

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 2

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης): Να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα αρχικών τιμών (όπου $y = y(x)$), με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης:

(i) $y' - 2y = 0, y(1) = -1$

Απ. $y(x) = -e^{2x-2}$

(ii) $y' + y = 0, y(0) = 1$

Απ. $y(x) = e^{-x}$

(iii) $y' + 5y = 0, y(0) + y'(0) = 4$

Απ. $y(x) = -e^{-5x}$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης): Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου $y = y(x)$), με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα:

(i) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$

Απ. $y(x) = \frac{\sin x - x \cos x + c}{x}$

(ii) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 2x$

Απ. $y(x) = (x^2 + 1) \left[c + \ln(x^2 + 1) \right]$

(iii) $y' - y \tan x = e^{-2x}$

Απ. $y(x) = \frac{e^{-2x}}{5} (-2 + \tan x) + \frac{c}{\cos x}$

(iv) $(16x^2 + 25)dy - x(16y + 16x^2 + 25)dx = 0$

Απ. $y(x) = \frac{(16x^2 + 25 + c)\sqrt{16x^2 + 25}}{16}$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις): Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ακριβείς (όπου $y = y(x)$):

(i) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = 0$

(ii) $e^{xy} dx + \frac{x}{y} e^{-xy} dy = 0$

(iii) $y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy = 0$

(iv) $y \sin(2x) dx - (\sqrt{y} + \cos(2x)) dy = 0$

(v) $(e^{2x} + y) dx - (e^y - x) dy = 0$

(vi) $3xy^2 dy + y^3 dx = 0$

(vii) $(x - y \sin x) dx + (y^6 + \cos x) dy = 0$

(viii) $(y + x) dy + (x - y) dx = 0$

(ix) $\sqrt{x} dy - xy dx = 0$

(x) $(y + x) dy + (y - x) dx = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (Επίλυση ακριβών διαφορικών εξισώσεων): Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου $y = y(x)$):

(i) $(2x + y^3)dx + (3xy^2 + 4)dy = 0$ Απ. $x^2 + xy^3 + 4y = c$

(ii) $-\frac{1}{y}dx + \left(\frac{x}{y^2} + 3y^2\right)dy = 0$ Απ. $-\frac{x}{y} + y^3 = c$

(iii) $(\sin y)^2 dx + x \sin(2y) dy = 0$ Απ. $x \sin^2 y = c$

(iv) $(e^y - 2xy)dx + (xe^y - x^2)dy = 0$ Απ. $xe^y - x^2y = c$

(v) $\left(\frac{2x}{1+x^2} + y\right)dx + (e^y + x)dy = 0$ Απ. $e^y + xy + \ln(1+x^2) = c$