Αναπλ. Καθηγήτρια

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ Νο 11

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Σειρές Fourier): Να βρεθεί η σειρά Fourier των κάτωθι (περιοδικών θεωρούμενων) συναρτήσεων:

(i) $f(x)=4x,\ x\in[-10,10]$

Απ. $f(x)\approx\dfrac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{10}$

(ii) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 0, & -1\le x\le 0\end{cases}$

Απ. $f(x)\approx\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n+1)\pi x]}{(2n+1)^2}+\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin(n\pi x)}{n}$

(iii) $f(x)=\begin{cases}3, & 0<x\le 5\\ 0, & -5\le x\le 0\end{cases}$

Απ. $f(x)\approx\dfrac{3}{2}+\dfrac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{5}$

(iv) $f(x)=x^2,\ x\in[-\pi,\pi]$

Απ. $f(x)\approx\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(nx)}{n^2}$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (*Μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών για ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, με σταθερούς συντελεστές και ομογενείς συνοριακές συνθήκες*): Να βρεθεί η λύση των κάτωθι προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, με χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών:

(i) $u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=\sin(3\pi x)$, $0<x<1$ (Απ. $u(x,t)=\dfrac{1}{3\pi}\sin(3\pi x)\sin(3\pi t)$)

(ii) $u_t=u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=\sin(3\pi x)$, $0<x<1$ (Απ. $u(x,t)=e^{-9\pi^2 t}\sin(3\pi x)$)

(iii) $u_t=u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=\sin(2\pi x)+\dfrac{1}{3}\sin(4\pi x)+\dfrac{1}{5}\sin(6\pi x)$, $0<x<1$

(Απ. $u(x,t)=e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)+\dfrac{1}{3}e^{-16\pi^2 t}\sin(4\pi x)+\dfrac{1}{5}e^{-36\pi^2 t}\sin(6\pi x)$)

(iv) $u_t=u_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=x-x^2$, $0<x<1$ (Απ. $u(x,t)=\dfrac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}\sin[(2k+1)\pi x]$)

(v) $u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<1,\ 0<y<1,\ u=u(x,y)$ με $u(0,y)=0$, $u(1,y)=0$, $0<y<1$ και $u(x,0)=0$, $u(x,1)=x$ $0<x<1$ (Απ. $u(x,y)=-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi)}{n\sinh(n\pi)}\sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$)

(vi) $u_{xx}=u_{tt}+2u_t,\ 0<x<\pi,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=0$, $u(\pi,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=\sin x+\sin(3x)$, $u_t(x,0)=0$, $0<x<\pi$

(Απ. $u(x,t)=e^{-t}(1+t)\sin x+e^{-t}\left[\cos(\sqrt{8}t)+\frac{1}{\sqrt{8}}\sin(\sqrt{8}t)\right]\sin(3x)$)

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών για ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, με μη σταθερούς συντελεστές): Να βρεθεί η λύση των κάτωθι προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, με χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών. (Για τα πρώτα τρία ερωτήματα θεωρείστε $u=u(r,\theta)$ φραγμένη συνάρτηση, περιοδική ως προς θ, ενώ για τα δύο τελευταία ερωτήματα θεωρείστε $u=u(r,t)$, $u=u(r,\theta)$ φραγμένες):

(i) $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$, $0<r<2$, $0<\theta<2\pi$, με $u(2,\theta)=\sin(3\theta)$, $0\le\theta\le 2\pi$.

(Απ. $u(r,\theta)=\frac{r^3}{8}\sin(3\theta)$)

(ii) $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$, $r>2$, $0<\theta<2\pi$, με $u(2,\theta)=\cos(4\theta)$, $0\le\theta\le 2\pi$.

(Απ. $u(r,\theta)=\frac{1}{16r^4}\cos(4\theta)$)

(iii) $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$, $1<r<2$, $0<\theta<2\pi$, με $u(1,\theta)=\cos\theta$ και $u(2,\theta)=\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$.

(Απ. $u(r,\theta)=\left(-\frac{r}{3}+\frac{4}{3r}\right)\cos\theta+\left(\frac{2r}{3}-\frac{2}{3r}\right)\sin\theta$)

ΑΣΚΗΣΗ 4 (Μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους μη ομογενείς ή με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες): Να βρεθεί η λύση των κάτωθι προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, με χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών:

(i) $u_t=u_{xx}$, $0<x<2,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u(0,t)=2$, $u(2,t)=5$, $t>0$ και $u(x,0)=1-x^2$, $0<x<2$

(Απ. $u(x,t)=\frac{3}{2}x+2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{16(-1)^n-2}{n\pi}+\frac{16(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}\right]e^{-n^2\pi^2t/4}\sin\frac{n\pi x}{2}$)

(ii) $u_t=u_{xx}+\cos x,\ 0<x<\pi,\ t>0,\ u=u(x,t)$ με $u_x(0,t)=0$, $u_x(\pi,t)=0$, $t>0$ και $u(x,0)=\cos^2 x+2\cos^4 x$, $0<x<\pi$

(Απ. $u(x,t)=\frac{7}{8}+\cos x-e^{-t}\cos x+e^{-4t}\cos(2x)+\frac{1}{8}e^{-16t}\cos(4x)$)