Ε. Ν. ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
Αναπλ. Καθηγήτρια

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ Νο 10

ΑΣΚΗΣΗ 1 ***(Χαρακτηρισμός και ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους):*** Να χαρακτηρισθούν πλήρως οι κάτωθι εξισώσεις (θεωρείστε $u = u(x, y)$):

(i) $u_x + u_y - u = 0$

(ii) $u_x u_y - u^2 = 0$

(iii) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$

(iv) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

(v) $u_{xx} + 5u_{xy} - 2u_{yy} = 0$

(vi) $2u_{xx} + (x-1)u_{yy} + yu_x - xu_y = 0,\ x \neq 1$

(vii) $e^{-y}u_{xx} + \sin y = u_{yy}$

(viii) $u_{xy} + (\sin x)u_y + (\cos y)u_x = 0$

(ix) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin x$

(x) $u_{xx} = uu_{yyyy} + e^{-x}$

ΑΣΚΗΣΗ 2 ***(Λύσεις διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους):*** Να δειχθεί ότι

(i) η $u(x, y) = x + y^2$ είναι λύση της $2xu_x + yu_y = 2u$

(ii) η $u(x, y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right),\ x \neq 0$ είναι λύση της $xu_x + yu_y = 0$, όπου f αυθαίρετη συνάρτηση

ΑΣΚΗΣΗ 3 ***(Λύσεις διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους):*** Να προσδιορισθεί το λ ώστε η συνάρτηση $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\lambda}$, όπου $n \geq 3$, να είναι **μη τετριμμένη** λύση της εξίσωσης $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$.

(Απ. $\lambda = 1 - \dfrac{n}{2}$)

ΑΣΚΗΣΗ 4 (*Επίλυση Μ.Δ.Ε. με τη μέθοδο του μετασχηματισμού* *Laplace*): Να βρεθεί η λύση των κάτωθι προβλημάτων, με κατάλληλη χρήση του μετασχηματισμού Laplace:

(i) $u_{xt} - \cos t = 0,\ x > 0,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(x, 0) = 0$, $x > 0$ και $u(0, t) = 0$, $t > 0$

Απ. $u(x, t) = x \sin t$

(ii) $u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(0, t) = 1$, $u(1, t) = 1$, $t > 0$ και $u(x, 0) = 1 + \sin(\pi x)$, $0 < x < 1$

Απ. $u(x, t) = 1 + e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$

(iii) $u_{tt} + 2u_t + xu_x + u = xt,\ x > 0,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(0, t) = 0$, $t > 0$ και $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, $x > 0$

Απ. $u(x, t) = x\left(-2 + \dfrac{t}{2} + \dfrac{e^{-t}}{2}\cos t\right)$

(iv) $\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(0,t) = u_0$=σταθερά, $t > 0$ και $L[u(x,t)]$ φραγμένη.

Απ. $u(x,t) = u_0 H\left(t - \frac{x}{c}\right)$

(v) $\frac{1}{\kappa}u_t = u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(0,t) = u_0$=σταθερά, $t > 0$ και $L[u(x,t)]$ φραγμένη.

Απ. $u(x,t) = u_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)$

(vi) $\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = k\sin\frac{\pi x}{\alpha},\ 0 < x < \alpha,\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(0,t) = 0 = u(\alpha,t)$, $t > 0$ και $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $0 < x < \alpha$

Απ. $u(x,t) = \frac{\alpha^2 k}{\pi^2}\left(1 - \cos\frac{\pi c t}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi x}{\alpha}$

ΑΣΚΗΣΗ 5 (*Επίλυση Μ.Δ.Ε. με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier*):

Να βρεθεί η λύση των κάτωθι προβλημάτων, με κατάλληλη χρήση του μετασχηματισμού Fourier:

(i) $u_t = 4u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(x,0) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Απ. $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+16t}}e^{-\frac{x^2}{1+16t}}$

(ii) $u_{tt} + u_{xxxx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ u = u(x,t)$ με $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

Απ. $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\cos\left(\frac{\xi^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right)d\xi$

(iii) $u_{yy} + u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0,\ u = u(x,y)$ με $u(x,0) = f(x)$ και $F[u(x,y)]$ φραγμένη για $y > 0$.

Απ. $u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}d\xi$