

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ Νο 5

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Ομογενείς εξισώσεις Euler): Με χρήση της χαρακτηριστικής εξίσωσης, να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι ομογενών διαφορικών εξισώσεων τύπου Euler:

(i) $x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = 0$ Απ. $y(x) = c_1 x + c_2 x^3$

(ii) $(x+3)^2 y''(x) + 3(x+3)y'(x) + y(x) = 0$, Απ. $y(x) = (x+3)^{-1} (c_1 + c_2 \ln(x+3))$
 $x+3 > 0$

(iii) $x^2 y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = 0$, $x \neq 0$ Απ. $y(x) = c_1 x^4 + c_2 x^{-1}$

(iv) $x^3 y'''(x) + 4x^2 y''(x) - 8xy'(x) + 8y(x) = 0$, Απ. $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-4}$
 $x \neq 0$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Μη ομογενείς εξισώσεις Euler): Με χρήση της αλλαγής ανεξάρτητης μεταβλητής $x = e^t$ ή $x+3 = e^t$ ή $x-1 = e^t$, να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων τύπου Euler:

(i) $x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^4$, $x > 0$ Απ. $y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x + \frac{x^4}{15}$

(ii) $(x-1)^2 y''(x) - 4(x-1)y'(x) - 14y(x) = \frac{1}{x-1}$, Απ. $y(x) = c_1 (x-1)^7 + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{1-9x}{72(x-1)^2}$
 $x-1 > 0$

(iii) $(x+3)^2 y''(x) - (x+3)y'(x) + y(x) = x+3$, Απ.
 $x+3 > 0$ $y(x) = (x+3) \left[c_1 + c_2 \ln(x+3) + \frac{\ln^2(x+3)}{2} \right]$

(iv) $x^2 y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = x^4$, $x > 0$ Απ.
 $y(x) = c_1 x^4 + c_2 x^{-1} + \frac{x^4}{5} \ln x - \frac{x^4}{25}$

(v) $2(x-1)^2 y''(x) - 3(x-1)y'(x) - 3y(x) = 0$, Απ. $y(x) = c_1 (x-1)^3 + \frac{c_2}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{10} [\cos \ln(x-1) - \sin \ln(x-1)]$
 $x-1 > 0$