

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 2

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης): Να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα αρχικών τιμών (όπου $y = y(x)$), με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης:

(i) $y' - 2y = 0, y(1) = -1$ Απ. $y(x) = -e^{2x-2}$

(ii) $y' + y = 0, y(0) = 1$ Απ. $y(x) = e^{-x}$

(iii) $y' + 5y = 0, y(0) + y'(0) = 4$ Απ. $y(x) = -e^{-5x}$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης): Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου $y = y(x)$), με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα:

(i) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ Απ. $y(x) = \frac{\sin x - x \cos x + c}{x}$

(ii) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 2x$ Απ. $y(x) = (x^2 + 1) \left[c + \ln(x^2 + 1) \right]$

(iii) $y' - y \tan x = e^{-2x}$ Απ. $y(x) = \frac{e^{-2x}}{5} (-2 + \tan x) + \frac{c}{\cos x}$

(iv) $(16x^2 + 25)dy - x(16y + 16x^2 + 25)dx = 0$ Απ. $y(x) = \frac{(16x^2 + 25 + c)\sqrt{16x^2 + 25}}{16}$

(v) $ydx - (x + 3y^2)dy = 0$ Απ. $x = 3y^2 + cy$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις): Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ακριβείς (όπου $y = y(x)$):

(i) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = 0$ (ii) $e^{xy} dx + \frac{x}{y} e^{-xy} dy = 0$

(iii) $y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy = 0$ (iv) $y \sin(2x) dx - (\sqrt{y} + \cos(2x)) dy = 0$

(v) $(e^{2x} + y) dx - (e^y - x) dy = 0$ (vi) $3xy^2 dy + y^3 dx = 0$

(vii) $(x - y \sin x) dx + (y^6 + \cos x) dy = 0$ (viii) $(y + x) dy + (x - y) dx = 0$

(ix) $\sqrt{x} dy - xy dx = 0$ (x) $(y + x) dy + (y - x) dx = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (Επίλυση ακριβών διαφορικών εξισώσεων): Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου $y = y(x)$):

(i) $(2x + y^3) dx + (3xy^2 + 4) dy = 0$ Απ. $x^2 + xy^3 + 4y = c$

(ii) $-\frac{1}{y} dx + \left(\frac{x}{y^2} + 3y^2 \right) dy = 0$ Απ. $-\frac{x}{y} + y^3 = c$

(iii) $(\sin y)^2 dx + x \sin(2y) dy = 0$ Απ. $x \sin^2 y = c$

(iv) $(e^y - 2xy) dx + (xe^y - x^2) dy = 0$ Απ. $xe^y - x^2 y = c$

(v) $\left(\frac{2x}{1+x^2} + y \right) dx + (e^y + x) dy = 0$ Απ. $e^y + xy + \ln(1+x^2) = c$

ΑΣΚΗΣΗ 5 (Ολοκληρωτικοί παράγοντες): Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου $y = y(x)$), αφού πρώτα επαληθευτεί ότι η εκάστοτε συνάρτηση μ , είναι ολοκληρωτικός παράγοντας για την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση:

(i) $y(2e^x + 4x)dx + 3(e^x + x^2)dy = 0$, Απ. $2e^x y^{3/2} + 2x^2 y^{3/2} = c$

$\mu(y) = y^{1/2}$

(ii) $(5xy + 4y^2 + 1)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$, Απ. $x^5 y + x^4 y^2 + \frac{x^4}{4} = c$

$\mu(x) = x^3$

(iii) $(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)dy = 0$ Απ. $(x + y)^3 (x^2 + y^3) = c$

$\mu(x + y) = (x + y)^2$

(iv) $(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$,

$\mu(xy) = e^{xy}$

Απ. $e^{xy} (x + y) = c$

(v) $ydx - (y^2 + x^2 + x)dy = 0$,

Απ. $\arctan \frac{x}{y} - \arctan \frac{1}{y} -$

$\mu(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

$-y - \arctan y = c$

ΑΣΚΗΣΗ 6 (Σχηματισμός διαφορικών εξισώσεων): Για κάθε μία από τις παρακάτω οικογένειες συναρτήσεων (όπου c_1, c_2, c_3 παράμετροι), να σχηματισθεί η σχετική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την $y(x)$:

(i) $y^4 - \frac{8}{7}x^3 = c_1$ Απ. $y' = \frac{6x^2}{7y^3}$

(ii) $-3 \cos x = 4 \sin y + c_1$ Απ. $4y' \cos y - 3 \sin x = 0$

(iii) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} + 1$ Απ. $y'' + 5y' + 4y = 4$

(iv) $y = c_1 x^6 + c_2 x^7$ Απ. $x^2 y'' - 12xy' + 42y = 0$

(v) $y = -\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{12} + \frac{c_1}{4} e^{2x} + c_2 + c_3 x$ Απ. $y''' - 2y'' = x$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (Ορθογώνιες τροχιές): Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των κάτωθι μονοπαραμετρικών οικογενειών καμπυλών (όπου $y = y(x)$):

(iv) $y + 2x = c$ Απ. $y = k + x/2$

(v) $y^2 = x^2 + cx$ Απ. $x^2 y + \frac{y^3}{3} = k$

(vi) $y = e^{cx}$ Απ. $y^2 \ln y - \frac{y^2}{2} + x^2 = k$

(vii) $y = ce^x$ Απ. $\frac{y^2}{2} + x = k$

(viii) $y = c \cdot \cos x$ Απ. $\frac{y^2}{2} = \ln |\sin x| + k$