

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 1

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Χαρακτηρισμός και ταξινόμηση συνήθων διαφορικών εξισώσεων): Να χαρακτηρισθούν πλήρως οι κάτωθι συνήθειες διαφορικές εξισώσεις:

- | | |
|---|---|
| (i) $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x^3$ | (ii) $x[y''(x)]^4 + 2y(x) = 2x$ |
| (iii) $y(x)y'(x) + [y(x)]^4 = \sin x$ | (iv) $y'(x) = x^2 \sin y(x)$ |
| (v) $y'''(x) - 2y''(x) + 5y'(x) + y(x) = e^x$ | (vi) $y'(x) = x^2 \sin x$ |
| (vii) $[y'(x)]^2 + y(x) = 0$ | (viii) $y'(x) = y(x)$ |
| (ix) $x^2 y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0$ | (x) $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{y(x)}$ |

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών): Να χαρακτηρισθούν τα κάτωθι προβλήματα, ως προβλήματα αρχικών ή συνοριακών τιμών:

- | | |
|---|---|
| (i) $y'(x) + 2y(x) = 0, y(0) = 2$ | (ii) $y''(x) - y'(x) - 12y(x) = 1,$
$y(0) = 0, y'(0) = 0$ |
| (iii) $y''(x) + 9y(x) = 0,$
$y(0) = 0, y(\pi) = 1$ | (iv) $y'''(x) - 2y''(x) = 0$
$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 3$ |
| (v) $y'''(x) - 4y''(x) = 0$
$y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(1) = 3$ | (vi) $x^2 y''(x) - 12xy'(x) + 42y(x) = 0$
$y(1) = 1, y'(1) = -1$ |

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Λύσεις διαφορικών εξισώσεων, προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών): Να εξετασθεί αν η δοθείσα κάθε φορά συνάρτηση $y_p(x)$, είναι λύση της εκάστοτε διαφορικής εξίσωσης ή του εκάστοτε προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών:

- | | |
|---|--|
| (i) $y'(x) + 2y(x) = 0$
$y_p(x) = e^{-2x}$ | (ii) $y'(x) + 2y(x) = 0$
$y_p(x) = 5e^{-2x}$ |
| (iii) $y'(x) + 2y(x) = 0$
$y_p(x) = e^{3x}$ | (iv) $y'''(x) - 2y''(x) = 0$
$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 3$
$y_p(x) = \frac{1}{4}(-3 + 3e^{2x} - 2x)$ |
| (v) $y''(x) + y(x) = 0$
$y(0) = 0, y'(0) = 1$
$y_p(x) = \sin x$ | (vi) $x^2 y''(x) - 12xy'(x) + 42y(x) = 0$
$y(1) = 1, y'(1) = -1$
$y_p(x) = 8x^6 - 7x^7$ |

ΑΣΚΗΣΗ 4 (Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με άμεση ολοκλήρωση): Να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (i) $y'(x) = (x^2 - 1)(x^3 - 3x)^3$ | Απ. $y(x) = \frac{27x^4}{4} + \frac{9x^8}{2} + \frac{x^{12}}{12} - 9x^6 - x^{10} + c$ |
| (ii) $y'(x) = x \ln x, x > 0$ | Απ. $y(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x + c$ |

$$(iii) \quad y'(x) = \frac{1}{x \ln x}, \quad x > 0 \quad \text{Απ. } y(x) = \ln|\ln x| + c$$

$$(iv) \quad y'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}, \quad |x| > 4 \quad \text{Απ. } y(x) = \sqrt{x^2 - 16} + c$$

ΑΣΚΗΣΗ 5 (Επίλυση διαφορικών εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών): Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων (όπου $y = y(x)$):

$$(i) \quad y' = \frac{3y^7}{x^8}, \quad x \neq 0 \quad \text{Απ. } y^{-6} = \frac{18}{7}x^{-7} + c$$

$$(ii) \quad y' = \frac{1}{x^2(8+9y^2)}, \quad x \neq 0 \quad \text{Απ. } 8y + 3y^3 = -\frac{1}{x} + c$$

$$(iii) \quad y' = \frac{3 \cosh(3x)}{2 \sinh(4y)}, \quad y \neq 0 \quad \text{Απ. } \cosh(4y) = 2 \sinh(3x) + c$$

$$(iv) \quad y' = e^{2y+10x} \quad \text{Απ. } e^{-2y} = -\frac{e^{10x}}{5} + c$$

$$(v) \quad y' = \frac{1+2e^y}{e^y x \ln x}, \quad x > 0 \quad \text{Απ. } 2e^y = -1 + c \ln^2 x$$

ΑΣΚΗΣΗ 6 (Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης): Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενείς (όπου $y = y(x)$):

$$(xi) \quad x + 2y - 5xy' = 0 \quad (xii) \quad y^2 - x^2 + 3xyy' = 0$$

$$(xiii) \quad y' \sqrt{x^2 + xy} - 10xy = 0 \quad (xiv) \quad 2 + (x + y)y' = 0$$

$$(xv) \quad \sin\left(\frac{x}{x+y}\right) + e^{-2y/x}y' = 0 \quad (xvi) \quad x \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{x+y}y' = 0$$

$$(xvii) \quad 2 \ln x - y' \ln y^2 = 0 \quad (xviii) \quad \frac{2}{y} + \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2}y' = 0$$

$$(xix) \quad \frac{\cos y}{\sin x} + \frac{\ln x}{\ln y}y' = 0 \quad (xx) \quad \sqrt{x^2 + 2} + 2yy' = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (Επίλυση ομογενών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης): Να βρεθεί η γενική λύση, των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων ή η λύση των αντίστοιχων προβλημάτων αρχικών τιμών (όπου $y = y(x)$):

$$(i) \quad y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy}, \quad y(1) = 1 \quad \text{Απ. } 2y^2 = x^2 + x^4$$

$$(ii) \quad x - 2yy' \ln \frac{y}{x} = 0 \quad \text{Απ. } \frac{x}{\sqrt{1 - 2 \ln y + 2 \ln x}} = c$$

$$(iii) \quad xy' - y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0, \quad y(1) = 0 \quad \text{Απ. } \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2} = c$$

$$(iv) \quad x^2 + y\sqrt{x^2 + y^2}(y - xy') = 0 \quad \text{Απ. } (x^2 + y^2)^{3/2} + 3x^2 + cx^3 = 0$$

$$(v) \quad x^2 ye^{x/y} - (x^3 e^{x/y} + y^3)y' = 0 \quad \text{Απ. } e^{x/y} \left(\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + 2 \right) = \ln|y| + c$$