Παραδείγματα (Ι)

1. Κάποιος καταθέτει (παίρνει δάνειο) σήμερα ποσό 1.000 € στην τράπεζα. Το ετήσιο επιτόκιο των καταθέσεων (των δανείων) είναι 10%. Πόσα χρήματα θα έχει ο λογαριασμός (θα πρέπει να πληρώσει) μετά από 3 χρόνια;

Απάντηση: 1.331 €

2. Κάποιος καταθέτει σήμερα ένα ποσό με ετήσιο επιτόκιο 5% με σκοπό να έχει μετά από 10 χρόνια 20.000 €. Ποιο ποσό κατέθεσε σήμερα;

Απάντηση: 12.278 €

3. Κάποιος καταθέτει σήμερα 5.000 € με επιτόκιο 10% και παίρνει μετά από κάποια χρόνια 8.857,8 €. Σε πόσα χρόνια από σήμερα πήρε τα χρήματα;

Απάντηση: 6 χρόνια

4. Κάποιος καταθέτει σήμερα 6.000 € και λαμβάνει μετά από 10 χρόνια 12.000 €. Ποιο είναι το ετήσιο επιτόκιο της κατάθεσης;

Απάντηση: 7,18%

5. Συγκρίνετε τα παρακάτω επιτόκια ως προς την πραγματική τους απόδοση:

α. Ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο 24% και ανατοκισμός ανά μήνα.
β. Ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο 25% και ανατοκισμός ανά εξάμηνο.
γ. Ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο 27% και ανατοκισμός ανά έτος.

Απάντηση: Πραγματικό ετήσιο επιτόκιο α.: 26,82%, β.: 26,56%, γ.: 27%

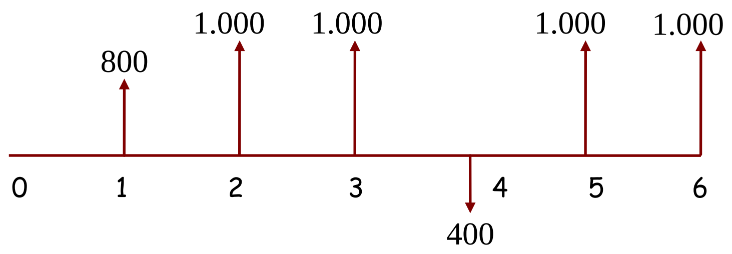
6. Κάποιος κάνει 5 καταθέσεις στην τράπεζα, μια ανά έτος με την πρώτη στο τέλος του $1^{ου}$ χρόνου από σήμερα, ποσού 1.000 € η κάθε μία. Αν το επιτόκιο είναι 10%, ποιο ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό σε 5 χρόνια από σήμερα; Πόσο θα είναι το ποσό στο λογαριασμό σε 5 χρόνια αν το επιτόκιο ήταν 0%;

Απάντηση: 6.105,1 €, 5.000 €

7. Κάποιος καταθέτει 6.000 € σήμερα τα οποία θα αναλάβει σε τρεις ισόποσες ετήσιες δόσεις ποσού Α αρχίζοντας από το τέλος του πρώτου έτους. Αν το επιτόκιο της κατάθεσης είναι 7%, να βρεθεί το ποσό κάθε ανάληψης.

Απάντηση: 2.286,3 €

8. Να βρεθεί η ισοδύναμη παρούσα αξία της χρηματοροής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για ι= 15%.



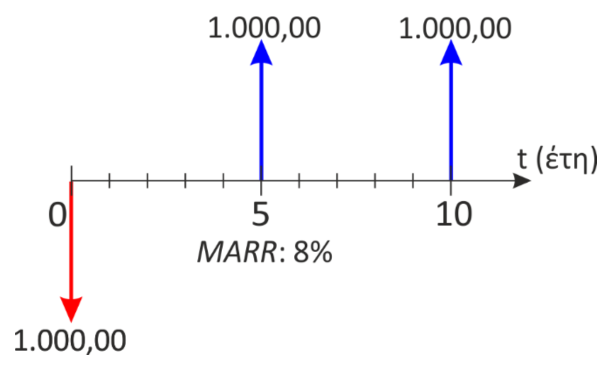
Απάντηση: 2.810 €

9. Ένας μεγάλος οργανισμός στην προσπάθεια του να συλλέξει χρήματα προκειμένου να επεκτείνει τις δραστηριότητες του εκδίδει ομόλογα τα οποία διατίθενται στο κοινό με τους ακόλουθους όρους. Η αγορά ενός ομολόγου σήμερα κοστίζει 1.000 € και αποφέρει στον αγοραστή 1.000 € σε 5 χρόνια από σήμερα και 1.000 € σε 10 χρόνια από σήμερα. Εναλλακτικά, ένας ιδιώτης μπορεί να καταθέσει τα χρήματα του στην τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 8 %. Είναι επιθυμητή η αγορά του ομολόγου;

Σημείωση: *Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται παρακάτω για τις σχέσεις ισοδυναμίας χρηματοροών (π.χ., (P/F, 8%, 5)) επεξηγούνται αναλυτικά στο αρχείο "4.1 Σχέσεις ισοδυναμίας χρηματοροών.pdf" στα έγγραφα του μαθήματος στο eclass.*

Λύση

Όπως σε όλα τα σχετικά προβλήματα, το σημαντικότερο είναι να συντάξουμε ένα σωστό διάγραμμα δαπανών – εσόδων. Το διάγραμμα δαπανών – εσόδων μας δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσουμε καλύτερα τη χρηματοροή της επένδυσης (ή του δανείου) δηλαδή τα ποσά (με το πρόσημο τους) και την κατανομή τους στο χρόνο της επένδυσης (του δανείου). Το διάγραμμα δαπανών – εσόδων για την αγορά του ομολόγου δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Με βάση το διάγραμμα δαπανών – εσόδων υπολογίζουμε την παρούσα αξία της επένδυσης στο ομόλογο (και η τραπεζική κατάθεση είναι επένδυση). Χρησιμοποιούμε ως επιτόκιο αναγωγής το 8% (της τραπεζικής κατάθεσης) μιας και αυτό αποτελεί βάση αναφοράς για αξιολόγηση εναλλακτικών επενδύσεων και συχνά καθορίζει τον ελάχιστο αποδεκτό βαθμό απόδοσης.

$PW_{ομολ.}(8\%) = -1000 + 1000\ (P/F, 8\%, 5) + 1000\ (P/F, 8\%, 10) =$

$= -1000 + 1000 * 0{,}681 + 1000 * 0{,}463 = 144$ €

Σημείωση: Είναι καλό να σημειώνουμε στην παράμετρο PW και το επιτόκιο αναφοράς (ελάχιστο αποδεκτό βαθμό απόδοσης) με τον οποίο υπολογίζεται η παρούσα αξία. Τούτο διότι σε t;omαρκετές περιπτώσεις (που θα δούμε αργότερα, όχι εδώ που το αρχικό ποσό της επένδυσης είναι το ίδιο, δηλαδή 1000 €), η αξιολόγηση δύο εναλλακτικών προτάσεων μπορεί να αλλάζει ως προς την επιλογή της βέλτιστης για διαφορετικό επιτόκιο αναφοράς.

Από την άλλη, η παρούσα αξία των τραπεζικών καταθέσεων είναι PW=0 (αυτό δε σημαίνει ότι η κατάθεση στην τράπεζα δεν αποδίδει τίποτα αλλά ότι δεν αποδίδει τίποτα <u>παραπάνω</u> από το 8%). Συγκεκριμένα, το ποσό (1000€) που θα κατατεθεί σήμερα στον τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο 8% σε 10 χρόνια από σήμερα θα έχει αξία:

$FW_{καταθ,\ n=10} = 1000\ (F/P, 8\%, 10) = 2.159$ €

Αυτή η αξία των 2.159€ είναι απολύτως ισοδύναμη με την κατάθεση καθώς:

$PW_{καταθ,\ n=0} = FW_{καταθ,\ n=10}\ (P/F, 8\%, 10) = 1.000$ €

Συνεπώς η συνολική παρούσα αξία της κατάθεσης (κατάθεση σήμερα, ανάληψη μετά 10 έτη) είναι:

$PW_{καταθ.}(8\%) =$ Αρχική κατάθεση + $PW_{καταθ,\ n=0} = -1000 + 1000 = 0$ €

Συνεπώς, με βάση την παρούσα αξία, είναι επιθυμητή η αγορά του ομολόγου καθώς $PW_{ομολ.}(8\%) > PW_{καταθ.}(8\%)$.

Εναλλακτικά μπορούν να υπολογιστούν οι μελλοντικές αξίες των προτάσεων για i=8% ($FW_{(ομολόγου)} = 310$, $FW_{(κατάθεσης)} = 0$) ή οι ισοδύναμες μελλοντικές αξίες των προτάσεων για i=8% ($EAW_{(ομολόγου)} = 21.46$, $EAW_{(κατάθεσης)} = 0$).

Χρησιμοποιώντας τέλος ως κριτήριο τον εσωτερικό ρυθμό απόδοσης IRR (κάθε πρόταση έχει έναν τέτοιο), καταλήγουμε στην ίδια επιλογή αφού ο ρυθμός απόδοσης του ομολόγου είναι 10.1%, μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο των τραπεζικών καταθέσεων που είναι 8%.

Ο εσωτερικός ρυθμός απόδοσης μιας πρότασης είναι η τιμή του επιτοκίου η οποία καθιστά την παρούσα αξία μηδενική (δηλαδή η συνολική αξία της πρότασης – η οποία είναι μοναδική για κάθε πρόταση – εκφράζεται αποκλειστικά με μια τιμή επιτοκίου).

Η μέθοδος πλεονεκτεί στο γεγονός ότι η παράμετρος του εσωτερικού ρυθμού απόδοσης είναι μια πλήρως κατανοητή παράμετρος (επιτόκιο). Από την άλλη, μειονεκτεί στο ότι το συμπέρασμα δεν είναι προφανές, δεν είναι δηλαδή πάντα βέλτιστη η πρόταση με το μεγαλύτερο IRR. Ο μόνος σίγουρος τρόπος να προκύψουν σωστά αποτελέσματα είναι η ανάλυση της πρόσθετης επένδυσης. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η σύγκριση των τιμών του IRR είναι επαρκής γιατί το ποσό της επένδυσης και στις δύο περιπτώσεις είναι το ίδιο.

Σε αντίθεση με την παράμετρο του IRR, η PW είναι πιο δύσκολο να γίνει κατανοητή (τι εκφράζει), τα αποτελέσματα της όμως μεταξύ εναλλακτικών προτάσεων είναι σε κάθε περίπτωση άμεσα συγκρίσιμα χωρίς να απαιτείται καμία περαιτέρω ανάλυση.

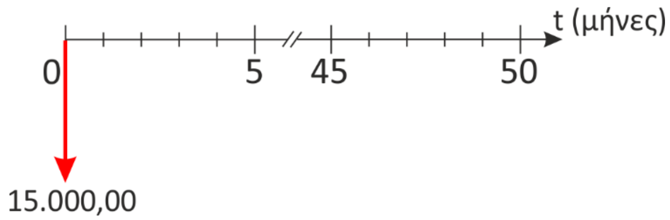
10. Κάποιος πρόκειται να αγοράσει ένα αυτοκίνητο αντί 15.000 € και μπορεί να πληρώσει:

1. Μετρητά όλο το ποσό σήμερα ή
2. Προκαταβολή 20 % σήμερα και 48 μηνιαίες δόσεις ποσού 350 € η κάθε μία.

Αν το μηνιαίο πραγματικό επιτόκιο καταθέσεων στην τράπεζα είναι $i_{μην}$=1%, ποια διαδικασία πληρωμής είναι καλύτερη για τον αγοραστή; Ποιο είναι το μηνιαίο επιτόκιο της χρηματοδότησης του δανείου στη δεύτερη περίπτωση;

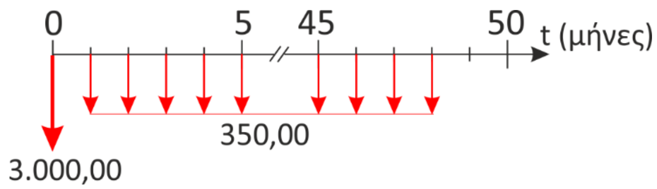
<u>Λύση</u>

Υπάρχουν δύο προτάσεις, η Α έχει ένα κόστος 15.000 σε χρόνο 0 και το διάγραμμα δαπανών – εσόδων αυτής της πρότασης φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα πρότασης Α

Η εναλλακτική πρόταση είναι η Β με αρχικό κόστος 3.000 και 48 μηνιαία κόστη 350 € στους μήνες 1-48. Το διάγραμμα δαπανών – εσόδων αυτής της εναλλακτικής φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα πρότασης Β

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι επίλυσης που οδηγούν στο κοινό συμπέρασμα ότι προτιμότερη λύση είναι η πληρωμή με μετρητά.

(α) Εξετάζουμε αν επιλέγοντας τη Β πρόταση και τοκίζοντας τις 12.000 με 1% παράλληλα δε αφαιρώντας κάθε μήνα τη δόση των 350 €, θα επαρκέσουν τα χρήματα αυτά (12.000+τόκοι) για την εξόφληση όλων των δόσεων. Η διαδικασία επίλυσης αυτή, η οποία είναι ιδιαίτερα κοπιώδης (εκτός αν κωδικοποιηθεί στο excel), οδηγεί στο (σωστό) συμπέρασμα ότι πληρώνοντας την τελευταία δόση ο αγοραστής θα έχει «παθητικό» 2.081 €. Η ανάλυση αυτή φαίνεται στον πίνακα της επόμενης σελίδας.

(β) Υπολογίζουμε την παρούσα αξία των προτάσεων με $i_{μην}$ = 1%.

PW(A) = -15.000 € (βλέπε Σχήμα πρότασης Α), ενώ

PW(B) = -3000 - 350 (P/A, 1%, 48) = -3000 – 350 * 37,974 = -16.291 € (βλέπε Σχήμα πρότασης Β).

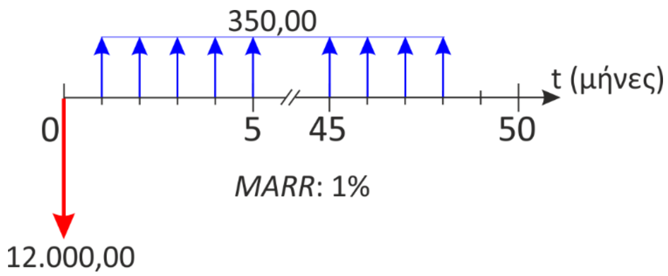
Επιλέγουμε την πρόταση με την αλγεβρικά μεγαλύτερη αξία (στην προκειμένη περίπτωση το μικρότερο κόστος) που είναι η Α (πληρωμή με μετρητά).

Εναλλακτικά, οι μελλοντικές αξίες είναι FW(A)= -24.183 και FW(B)= -26.264 αντίστοιχα (υπολογίστε τη διαφορά τους κι ελέγξτε αν έχετε δει αυτό το νούμερο νωρίτερα – είναι άραγε τυχαίο;) και οι ισοδύναμες ετήσιες αξίες EAW(A)= -395 και EAW(B)= -429 αντίστοιχα. Ο υπολογισμός στην τελευταία περίπτωση μπορεί να γραφτεί: EAW(B) = -3000 (A/P, 1%, 48) – 350.

Μήνας	Τόκος	Δόση	Εναπομένον κεφάλαιο
0			12.000 €
1	120 €	350 €	11.770 €
2	118 €	350 €	11.538 €
3	115 €	350 €	11.303 €
4	113 €	350 €	11.066 €
5	111 €	350 €	10.827 €
37	21 €	350 €	1.763 €
38	18 €	350 €	1.431 €
39	14 €	350 €	1.095 €
40	11 €	350 €	756 €
41	8 €	350 €	414 €
42	4 €	350 €	68 €
43	1 €	350 €	-281 €
44	-3 €	350 €	-634 €
45	-6 €	350 €	-991 €
46	-10 €	350 €	-1.351 €
47	-14 €	350 €	-1.714 €
48	-17 €	350 €	-2.081 €

(γ) Ρυθμός απόδοσης δεν μπορεί να υπολογιστεί για κάθε πρόταση ξεχωριστά γιατί υπάρχουν μόνο αρνητικά ποσά. Αυτό δε σημαίνει ότι δεν υπάρχει «κέρδος» από την αγορά του αυτοκινήτου (είτε σε χρηματική μορφή αν πρόκειται για επαγγελματικό αυτοκίνητο ή σε άλλη μορφή (χρόνος, διευκόλυνση, ευχαρίστηση ιδιοκτησίας κ.λπ.). Το «κέρδος» αυτό είναι το ίδιο ανεξάρτητα του τρόπου πληρωμής και επομένως δεν παίζει ρόλο στην διαδικασία απόφασης, επειδή δε είναι και δύσκολο να εκτιμηθεί, το αποκλείουμε από την ανάλυση. Τελικά αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να δούμε ποια πρόταση είναι καλύτερη. Μας ενδιαφέρει δηλαδή η σχετική οικονομική ελκυστικότητα των προτάσεων, δηλαδή η διαφορά των προτάσεων ή άλλως η πρόσθετη επένδυση.

Η πρόσθετη επένδυση Α-Β (το διάγραμμα δαπανών – εσόδων της οποίας φαίνεται παρακάτω) αποτελεί μια επένδυση με εσωτερικό ρυθμό απόδοσης i=1,46%>1%. Επομένως η Α-Β είναι αποδεκτή και, άρα, η Α είναι προτιμότερη της Β. Το πρακτικό νόημα είναι ότι αν είχαμε αρχικά αποφασίσει τη λύση Β και μετά σκεφτόμασταν μήπως ήταν καλύτερα να πάμε στην Α, η μετάβαση θα σήμαινε ότι θα καταβάλαμε (επενδύαμε) επιπλέον 12.000 σε χρόνο 0 για να αποφύγουμε (δηλαδή να έχουμε συγκριτικά ως έσοδο) τις δόσεις των 350 €.



Διάγραμμα χρηματοροής πρότασης Α-Β

Ο εσωτερικός ρυθμός απόδοσης της πρόσθετης επένδυσης (Α-Β) υπολογίζεται ως εξής:

Θέτω PW=0 =>

PW = -12000 + 350 (P/A, i, 48) =>

0 = -12000 + 350 * $\frac{(1+i)^N-1}{i*(1+i)^N}$ =>

$\frac{12000}{350} = \frac{(1+i)^{48}-1}{i*(1+i)^{48}}$ με δοκιμές επιλύουμε ως προς i και i = 1,46%

Σημαντική σημείωση: Η σειρά αξιολόγησης των προτάσεων δεν τίθεται με τυχαίο τρόπο αλλά με τρόπο ώστε η πρόσθετη επένδυση να αποτελεί πράγματι επένδυση (επένδυση έχουμε αν το πρώτο χρονικά ποσό της χρηματοροής είναι δαπάνη, σε διαφορετική περίπτωση έχουμε δάνειο.). Αν για παράδειγμα θεωρούσαμε, εναλλακτικά, την πρόσθετη «επένδυση» Β-Α (να σχεδιαστεί το διάγραμμα εσόδων-εξόδων), αυτή αποτελεί για τον αγοραστή δάνειο με ρυθμό «απόδοσης» ή, σωστότερα, επιτόκιο δανείου επίσης i=1.46%>1%. Μιας και πρόκειται για δάνειο όμως, η πρόσθετη «επένδυση» Β-Α δεν είναι αποδεκτή, άρα μένουμε στη λύση Α.

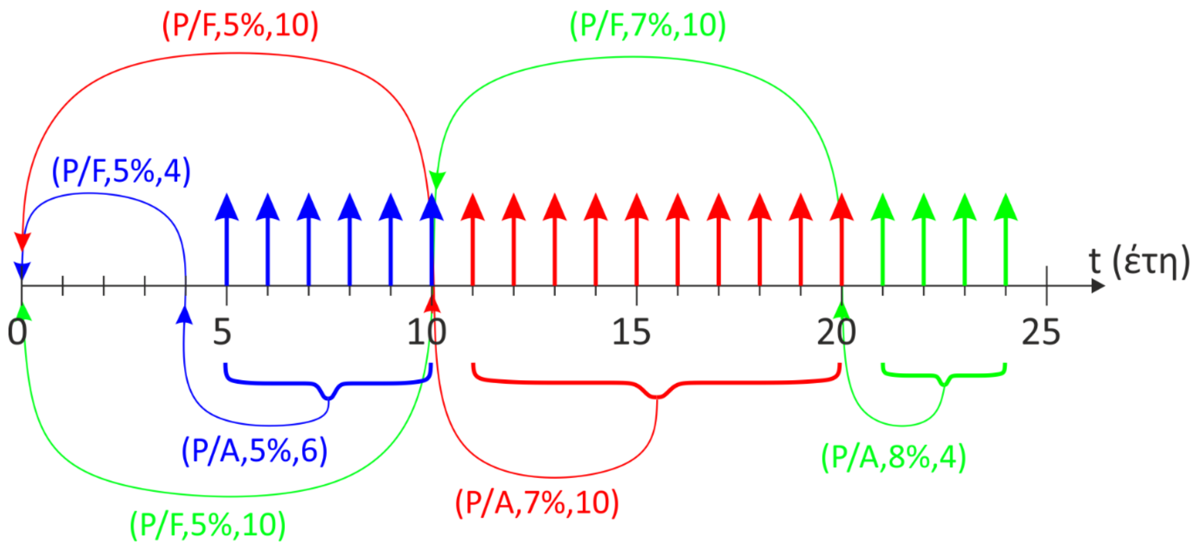
Σε όλες τις παραπάνω επιλύσεις, η προκαταβολή θα μπορούσε να αφαιρεθεί και από τις δυο προτάσεις, μιας και είναι κοινή και δεν παίζει ρόλο στην απόφαση όσον αφορά στην καλύτερη πρόταση (παρότι τα αριθμητικά δεδομένα αλλάζουν).

11. Κάποιος καταθέτει σήμερα ένα ποσό P στην τράπεζα το οποίο σκοπεύει να αναλάβει σε 20 ισόποσες δόσεις των 800 € η καθεμία αρχίζοντας από το τέλος του 5ου έτους από σήμερα. Το επιτόκιο των καταθέσεων δεν παραμένει σταθερό διαχρονικά αλλά είναι 5% τα πρώτα 10 χρόνια, 7% τα επόμενα 10 χρόνια και 8% στη συνέχεια. Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσει σήμερα;

Λύση

Αρχικά σχηματίζουμε το διάγραμμα δαπανών – εσόδων του προβλήματος.

Η βασική σχέση μεταξύ P και A δεν μπορεί να εφαρμοστεί ενιαία για όλες τις δόσεις και τούτο γιατί η σχέση αυτή προϋποθέτει σταθερό επιτόκιο. Το συνολικό ποσό P επομένως θα προκύψει από το άθροισμα τριών όρων που αντιστοιχούν στις δόσεις για κάθε διάστημα σταθερού επιτοκίου ως ακολούθως:



Δόσεις 5-10: μεταφέρονται αρχικά σε χρόνο 4 με i=5% και στη συνέχεια στο 0 με το ίδιο επιτόκιο. Ήτοι: 800 (P/A, 5%, 6) (P/F, 5%, 4) = 3.340,6

Δόσεις 11-20: μεταφέρονται αρχικά σε χρόνο 10 με i=7% και στη συνέχεια στο 0 με i=5%. Ήτοι: 800 (P/A, 7%, 10) (P/F, 5%, 10) = 3.449,4

Δόσεις 21-24: μεταφέρονται αρχικά σε χρόνο 20 με i=8%, στη συνέχεια σε χρόνο 10 με i=7% και μετά στο 0 με i=5%. Ήτοι: 800 (P/A, 8%, 4) (P/F, 7%, 10) (P/F, 5%, 10) = 827,0

Τελικά προκύπτει ότι P = 3.340,6 + 3.449,4 + 827,0 = 7.617 €

12. Ένα μηχάνημα έχει κόστος αγοράς 30.000 και διάρκεια ζωής 6 χρόνια. Αν το καθαρό ετήσιο έσοδο είναι 8.000 €, ποια είναι η περίοδος αποπληρωμής της επένδυσης για την αγορά του μηχανήματος αν η επιθυμητή ετήσια απόδοση είναι 8%; Επαναλάβατε την ανάλυση αν το καθαρό ετήσιο έσοδο είναι 10.000 στα τρία πρώτα χρόνια και 8.000 € στα επόμενα 3 χρόνια.

Λύση

Στην πρώτη περίπτωση, επιζητούμε εκείνο το N για το οποίο το αρχικό κόστος εξισορροπείται με τις δόσεις λαμβάνοντας υπόψη και το επιτόκιο. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$30.000 = 8.000\ (P/A,\ 8\%,\ N)$$

και επιλύοντας ως προς N προκύπτει N = 4,63.
Επειδή όμως οι δόσεις αποπληρωμής γίνονται σε ακέραιες χρονικές στιγμές, η αποπληρωμή γίνεται στο έτος 5.

Για την περίπτωση μη σταθερών δόσεων, δεν μπορεί να εφαρμοστεί η παραπάνω διαδικασία και σχέση. Σε αυτή την περίπτωση καταφεύγουμε στη λύση που ακολουθεί.

Ο γενικός τρόπος ανάλυσης (ο οποίος εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση) περιλαμβάνει τη δημιουργία των ακόλουθων πινάκων (για τα δύο ερωτήματα του παραδείγματος). Η περίοδος αποπληρωμής είναι εκείνος ο χρόνος κατά τον οποίο η αθροιστική παρούσα αξία γίνεται για πρώτη φορά θετική (δηλαδή οι δόσεις, αφού μετατραπούν σε παρούσα αξία, υπερβαίνουν αθροιστικά το αρχικό κόστος).

Έτος	Ποσό	PW	ΣPW
0	-30.000	-30.000	-30.000
1	8.000	7.407	-22.593
2	8.000	6.859	-15.734
3	8.000	6.351	-9.383
4	8.000	5.880	-3.503
5	8.000	5.445	**1.942**
6	8.000	5.041	6.983

Έτος	Ποσό	PW	ΣPW
0	-30.000	-30.000	-30.000
1	10.000	9.259	-20.741
2	10.000	8.573	-12.167
3	10.000	7.938	-4.229
4	8.000	5.880	**1.651**
5	8.000	5.445	7.096
6	8.000	5.041	12.137

Οι περίοδοι αποπληρωμής είναι λοιπόν 5 και 4 χρόνια αντίστοιχα.

Σημείωση: Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στα παραδείγματα για τις σχέσεις ισοδυναμίας χρηματοροών (π.χ., (P/F, 8%, 5)) επεξηγούνται αναλυτικά στο αρχείο "4.1 Σχέσεις ισοδυναμίας χρηματοροών.pdf" στα έγγραφα του μαθήματος στο eclass.

Ασκήσεις (Ι)

1. Ελέγξτε τον «κανόνα του 72» για ι = 3%, ι = 10%, ι = 20%. Βρείτε τον αριθμό των περιόδων που απατούνται για να διπλασιαστεί ένα αρχικό ποσό με καθένα από τα παραπάνω επιτόκια. Πολλαπλασιάστε το επιτόκιο επί τον αριθμό των περιόδων. Τι παρατηρείτε;
Απάντηση: 23,4   7,3   3,8

2. Στα δεδομένα του παραδείγματος 4 αλλάζει το τελικό ποσό και γίνεται
α) F = 6.000
β) F = 5.000
Βρείτε το επιτόκιο σε κάθε περίπτωση.
Απάντηση: 0%   -1,8%

3. Κάποιος κάνει μια κατάθεση σήμερα ποσού 5.000 € κι άλλη μια κατάθεση σε 2 χρόνια ποσού 3.000 €. Πόσα χρήματα θα έχει σε 6 χρόνια από σήμερα αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 8%. Σχεδιάστε το διάγραμμα δαπανών-εσόδων.
Απάντηση: 12.015,8

4. Κάποιος κάνει μια κατάθεση σήμερα ποσού 3.000 € και μια άλλη σε 3 χρόνια ποσού 8.000 €. Μετά από 10 χρόνια από σήμερα λαμβάνει 16.000 €. Ποιο είναι το ετήσιο επιτόκιο των καταθέσεων;
Απάντηση: 4,88%

5. Δίνονται: ονομαστικό επιτόκιο $r_{εξαμ}$ = 5% και ετήσιος ανατοκισμός.
Ζητούνται: τα πραγματικά επιτόκια $ι_{εξαμ}$ και $ι_{διετ}$.
Απάντηση: 4,89%   21%

6. Κάποιος καταθέτει σήμερα 2.000 €. Το ετήσιο επιτόκιο είναι 8% τα επόμενα 5 χρόνια και 6% στη συνέχεια. Πόσα χρήματα θα έχει ο λογαριασμός σε 12 χρόνια από σήμερα;
Απάντηση: 4.418,7

7. Να δομήσετε τη σχέση μεταξύ P και A με διαδικασία ανάλογη με αυτήν για τη σχέση μεταξύ F και A.

8. Πώς αλλάζει το αποτέλεσμα του παραδείγματος 6 αν οι καταθέσεις γίνονται στην αρχή κάθε έτους (δηλαδή η πρώτη κατάθεση γίνεται σε χρόνο 0 και η τελευταία σε χρόνο 4);
Απάντηση: 6.715,5

9. Ποιο ποσό πρέπει να καταθέτει κάποιος ανά έτος για 10 χρόνια (αρχίζοντας σε χρόνο 1) ώστε με επιτόκιο 6% να έχει στο λογαριασμό του μετά από 10 χρόνια ποσό 20.000 €;
Απάντηση: 1.517,4

10. Πως τροποποιείται η σχέση που συνδέει τα F και A αν οι καταθέσεις γίνονται στην αρχή κάθε έτους;

11. Γίνεται μια κατάθεση σήμερα ποσού P και το ποσό αυτό αναλαμβάνεται σε δύο δόσεις, η πρώτη σε 3 χρόνια ποσού 3.000 € και η δεύτερη σε 5 χρόνια (από σήμερα) ποσού 4.000 €. Αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 6%, ποιο είναι το ποσό της κατάθεσης;
Απάντηση: 5.507,9

12. Ποιο είναι το ποσό κατάθεσης P στην προηγούμενη άσκηση αν το επιτόκιο δεν είναι σταθερό αλλά είναι 4% τα δύο πρώτα χρόνια, 6% τα δύο επόμενα και 8% εφεξής;
Απάντηση: 5.664,3

13. Σε αναφορά με το παράδειγμα 7, αν το ποσό της ανάληψης ήταν το $\frac{1}{4}$ αυτού που υπολογίστηκε στο πρόβλημα, σε πόσες δόσεις θα γινόταν πλήρης ανάληψη του ποσού της κατάθεσης;
Απάντηση: 19,6 (≈ 20) χρόνια

14. Σε αναφορά με το παράδειγμα 7, αν ο αριθμός των δόσεων ήταν «άπειρος» ($N \to \infty$), ποιο θα ήταν το ποσό κάθε δόσης; Πώς εξηγείται λογικά το αποτέλεσμα;
Απάντηση: 420

15. Σε αναφορά με το παράδειγμα 8, αν είχαμε έξι ισόποσες δόσεις, ποιο θα ήταν το ποσό κάθε δόσης που θα οδηγούσε στην ίδια παρούσα αξία; Να γίνει αρχικά μια εκτίμηση του ποσού της δόσης και στη συνέχεια ακριβής υπολογισμός αυτού.
Απάντηση: 742,5

16. Κάποιος καταθέτει ετησίως (στο τέλος κάθε έτους) ποσό 500 € για 10 χρόνια. Το επιτόκιο είναι 5% τα πρώτα 6 χρόνια και 7% τα επόμενα. Ποιο είναι το ποσό στο λογαριασμό σε 10 χρόνια από σήμερα;
Απάντηση: 6.677,9

17. Δίνονται: $A = 1000$, $N = 15$, $i_{0\text{-}10} = 5\%$, $i_{10\text{-}15} = 8\%$.
Ζητείται: P = ;
Απάντηση: 10.172,9

18. Πώς διαφοροποιείται το αποτέλεσμα του παραδείγματος 9 αν το κόστος αγοράς του ομολόγου είναι 1.200 €; Τα υπόλοιπα δεδομένα παραμένουν αμετάβλητα. Εφαρμόστε όλους τους τρόπους επίλυσης που αναπτύχθηκαν στο Πρόβλημα 9.
Απάντηση: PW=-56,2 EAW=-8,38 FW=-121,4 i=7,27%*

19. Σε αναφορά με το παράδειγμα 10, για ποιο ποσό μηνιαίας δόσης δανείου οι δύο λύσεις θα ήταν οικονομικά ισοδύναμες;
Απάντηση: 316,0

20. Επαναλάβατε το παράδειγμα 12 (1η περίπτωση) με τη διαφορά ότι η επιθυμητή ετήσια απόδοση είναι 0%.
Απάντηση: (α) 4 χρόνια, (β) 3 χρόνια