

Δομική Ανάλυση Έργων

Χρονικός Προγραμματισμός Έργων

Μέρος 1^ο: Ανάλυση δομής έργου

- ❖ Εισαγωγικές έννοιες στη διαχείριση έργων
- ❖ Δομή του προγραμματισμού και ελέγχου του έργου
- ❖ Οφέλη του προγραμματισμού έργου
- ❖ Δομική ανάλυση έργου
- ❖ Αλληλουχία εργασιών
- ❖ Σύνθετες σχέσεις αλληλουχίας εργασιών
- ❖ Εκτίμηση διάρκειας εργασιών
- ❖ Απεικόνιση δομής έργου με τοξωτό δικτυωτό γράφημα
- ❖ Απεικόνιση δομής έργου με κομβικό δικτυωτό γράφημα
- ❖ Πρόβλημα 1

Εισαγωγικές έννοιες στη διαχείριση έργων

Έργο (project) είναι ένα σύνολο εργασιών που πρέπει να εκτελεστούν με μια λογική σειρά για την υλοποίηση προκαθορισμένων στόχων.

Υπεύθυνος του έργου (project manager) είναι το πρόσωπο ή η ομάδα που διοικεί το έργο.

Διαχείριση έργου (project management) είναι η διαδικασία οργάνωσης της εκτέλεσης του έργου. Μέσω αυτής επιτυγχάνεται:

- βελτίωση του σχεδιασμού του έργου
- βελτίωση της υλοποίησης και ελέγχου των διαφόρων εργασιών και
- Βελτίωση του βαθμού αξιοποίησης των παραγωγικών μέσων και πόρων (προσωπικού, μηχανημάτων, κεφαλαίων, κα)

Απώτερος στόχος της διαχείρισης έργου είναι η βελτιστοποίηση των τριών βασικών, αλληλοεξαρτώμενων, παραμέτρων υλοποίησης ενός έργου, ήτοι:

- Μεγιστοποίηση της απόδοσης (πχ, ποιότητα κατασκευής)
- Ελαχιστοποίηση του κόστους
- Ελαχιστοποίηση του χρόνου υλοποίησης δεδομένων των υπάρχοντων περιορισμών.

Εισαγωγικές έννοιες στη διαχείριση έργων

Όσο πιο πολύπλοκο είναι ένα έργο τόσο πιο σημαντικός είναι ο ρόλος και τα οφέλη της διαχείρισης του. Στα μεγάλα έργα, η ανάγκη συντονισμού και συνεργασίας πολλαπλών και ανομοιόμορφων ομάδων παραγωγής, καθιστούν επιβεβλημένη την οργάνωση του έργου ώστε να επιτευχθούν οι επιθυμητοί στόχοι.

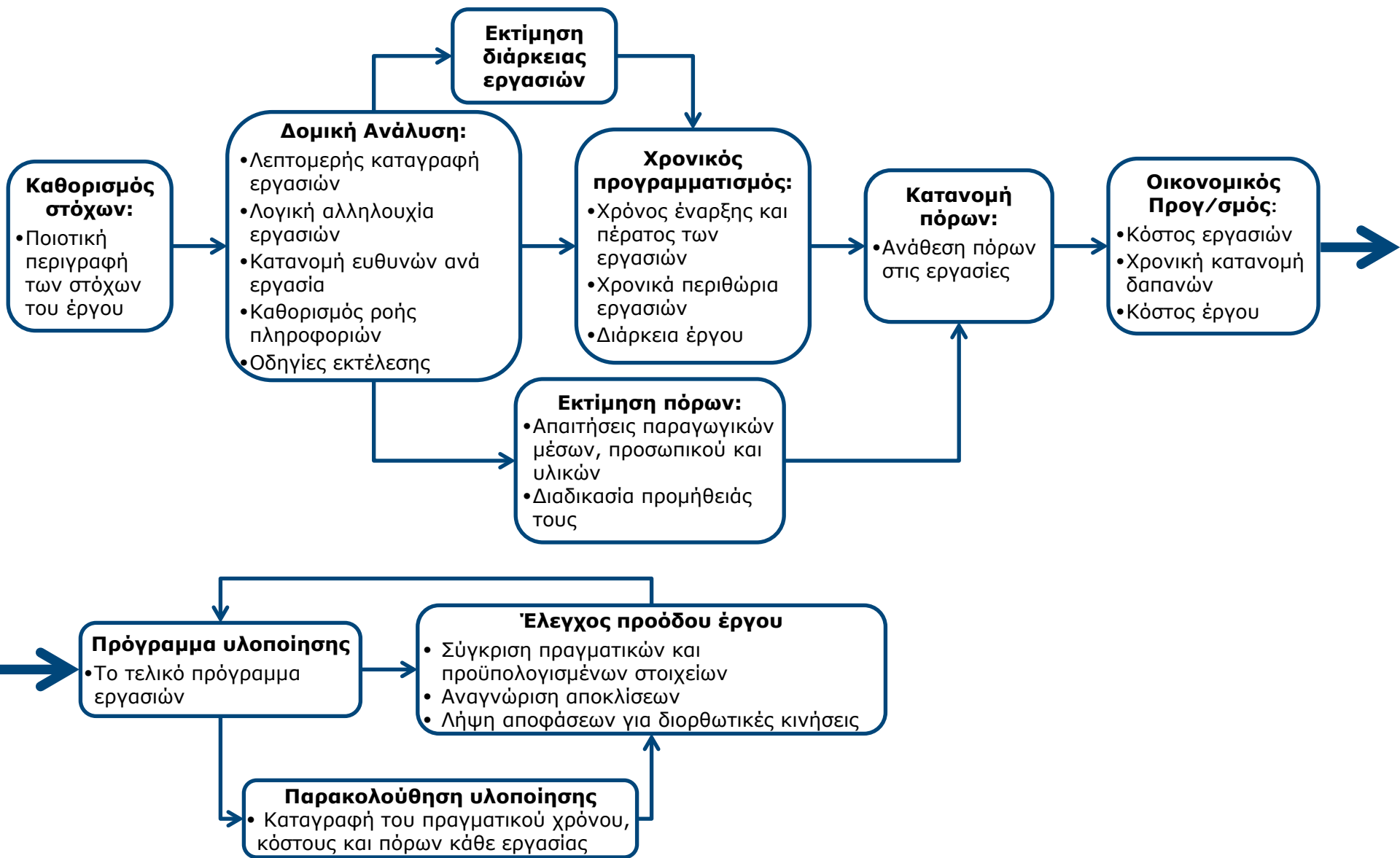
Η διαχείριση έργου περιλαμβάνει πολλά επιμέρους αντικείμενα. Η έμφαση εδώ δίνεται σε δύο από τα σημαντικότερα, ήτοι:

- στον προγραμματισμό και
- στον έλεγχο υλοποίησης

Προγραμματισμός έργου (project planning and scheduling) είναι η διαδικασία κατάρτισης ενός κατάλληλου πλάνου εργασίας για την υλοποίηση ενός έργου. Σε αυτό καθορίζεται το χρονοδιάγραμμα εργασιών και η κατανομή των διαθέσιμων πόρων ώστε το έργο να ολοκληρωθεί έγκαιρα και οικονομικά,. Για να συνταχθεί λαμβάνονται υπόψη οι εργασίες, οι αλληλεξαρτήσεις και οι διάρκειες αυτών, οι απαιτούμενοι πόροι, το κόστος και γενικά όλοι οι περιορισμοί υλοποίησης.

Έλεγχος υλοποίησης έργου (project control) είναι η διαδικασία ελέγχου εφαρμογής του προγραμματισμού κατά τη φάση υλοποίησης του έργου. Περιλαμβάνει την ανάλυση και τη σύγκριση της ροής υλοποίησης του έργου σε σχέση με το προγραμματισμένο πλάνο εργασίας, την αξιολόγηση επιπτώσεων από ενδεχόμενες αποκλίσεις και τη λήψη αποφάσεων για την περαιτέρω πορεία του.

Δομή του προγραμματισμού και ελέγχου του έργου



Οφέλη του προγραμματισμού έργου

- Οδηγεί σε μια πλήρη κατανόηση του στόχου αλλά και της διαδικασίας εκτέλεσης του έργου. Αυτό επιτυγχάνεται στο πρώτο στάδιο του προγραμματισμού, όπου από την ανάλυση δομής του έργου προκύπτει ένας λεπτομερής κατάλογος εργασιών.
- Καθορίζονται οι επιμέρους στόχοι του έργου και ποσοτικοποιείται η απαιτούμενη εργασία όσον αφορά το χρόνο, το κόστος και τα απαιτούμενα παραγωγικά μέσα.
- Καθορίζεται επίσης το χρονοδιάγραμμα του έργου λαμβάνοντας υπόψη χρονικές προθεσμίες και διαθέσιμα παραγωγικά μέσα.
- Καθορίζονται τα παραγωγικά μέσα που θα απασχοληθούν σε κάθε εργασία και γίνεται κατανομή αρμοδιοτήτων και ευθυνών.
- Κοστολογείται η κάθε εργασία ή ομάδα εργασιών.
- Προϋπολογίζεται το συνολικό κόστος του έργου και η χρονική κατανομή του.

Οφέλη του προγραμματισμού έργου

- Παρέχει τη δυνατότητα να συμπεριληφθούν στα έγγραφα της σύμβασης οι περιορισμοί κόστους, χρόνου και πόρων.
- Παρέχει ένα πρωτόκολλο επικοινωνίας μεταξύ των εμπλεκόμενων φορέων υλοποίησης για τη διαδικασία εκτέλεσης των εργασιών αλλά και τη ροή πληροφοριών ως προς την πορεία υλοποίησης των εργασιών.
- Παρέχει τη δυνατότητα συστηματικής παρακολούθησης του έργου κατά τη φάση υλοποίησης, καταγραφής των παραμέτρων εκτέλεσης και σύγκρισης αυτών με τα αντίστοιχα μεγέθη του προγραμματισμού. Αποκλίσεις ή προβλέψεις αποκλίσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αποφάσεις διορθωτικών κινήσεων που θα επαναφέρουν το έργο στην προγραμματισμένη του πορεία.
- Μειώνει την αβεβαιότητα και αυξάνει την αξιοπιστία υλοποίησης του έργου εντός των προθεσμιών και των άλλων περιορισμών.

Δομική ανάλυση έργου

Η **δομική ανάλυση του έργου** παρέχει μία ολοκληρωμένη αλλά και λεπτομερή άποψη της δομής του έργου.

Ουσιαστικά αποτελεί μια ιεραρχική αναπαράσταση της δομής του έργου, μετασχηματίζοντας ακόμα κι ένα πολύπλοκο έργο σε μικρά κομμάτια εργασίας, τα οποία μπορούν να σχεδιαστούν, να προγραμματιστούν και να εκτελεστούν με σιγουριά.

Αποτελεί τη βάση για:

- το χρονικό προγραμματισμό,
- τον οικονομικό προγραμματισμό,
- τον έλεγχο της προόδου, και
- την ενημέρωση της διεύθυνσης του έργου.

Δομική ανάλυση έργου

Στο πλαίσιο της δομικής ανάλυσης:

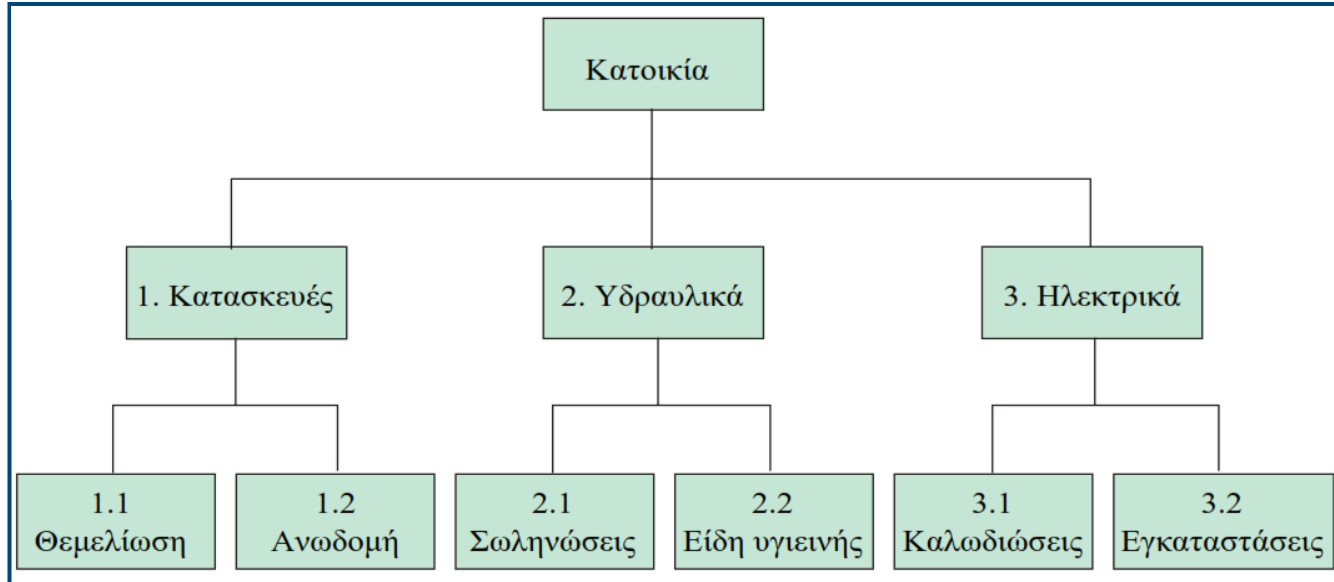
- Το συνολικό έργο περιγράφεται σαν ένα σύνολο μη επικαλυπτόμενων εργασιών,
- Σχεδιάζεται η οργανωτική δομή κάθε εργασίας και ο τρόπος εκτέλεσης της,
- Καθορίζονται τα απαιτούμενα συνεργεία και ο υπεύθυνος κάθε εργασίας,
- Εκτιμάται η διάρκεια και το κόστος κάθε εργασίας,
- Δομείται το δικτυωτό γράφημα (τοξωτό ή/και κομβικό),
- Συνδέεται η υλοποίηση των εργασιών με τους διαθέσιμους πόρους της εργοληπτικής επιχείρησης με οικονομοτεχνικά άρτια και λογικό τρόπο,
- Καθορίζονται οι διαδικασίες παρακολούθησης και τα κριτήρια με βάση των οποίων θα γίνει η αξιολόγηση της πορείας του έργου.

Μια άρτια δομική ανάλυση παρέχει τις πληροφορίες ώστε να γίνει:

- Μελέτη ανάλυσης κινδύνων,
- Έλεγχος της εκτέλεσης (συμπεριλαμβανομένων των υπεργολαβιών),
- Συντονισμός των εργασιών και των επιμέρους στόχων.

Δομική ανάλυση έργου

Συνοπτική, δομική ανάλυση κατασκευής κατοικίας



Η παραπάνω ανάλυση είναι ενδεικτική αλλά δεν παρέχει ικανοποιητική λεπτομέρεια ώστε να μπορεί χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο για τον προγραμματισμό του έργου:

- Η δομή του έργου πρέπει να αναλυθεί περισσότερο, ώστε να φτάσουμε σε έναν ακριβέστερο καθορισμό εργασιών.
- Δεν περιέχονται απαιτούμενες εργασίες, όπως π.χ. ξυλουργικά, κουφώματα αλουμινίου, κα.
- Οι εργασίες που πρέπει να προστεθούν θα ενταχθούν ή στους υπάρχοντες ή σε νέο κλάδο.

Αλληλουχία εργασιών

➤ Παράλληλες ή ανεξάρτητες εργασίες. Η παράλληλη εκτέλεση εργασιών επιτρέπει αποτελεσματικότερη αξιοποίηση του χρόνου.

➤ Συσχετιζόμενες εργασίες

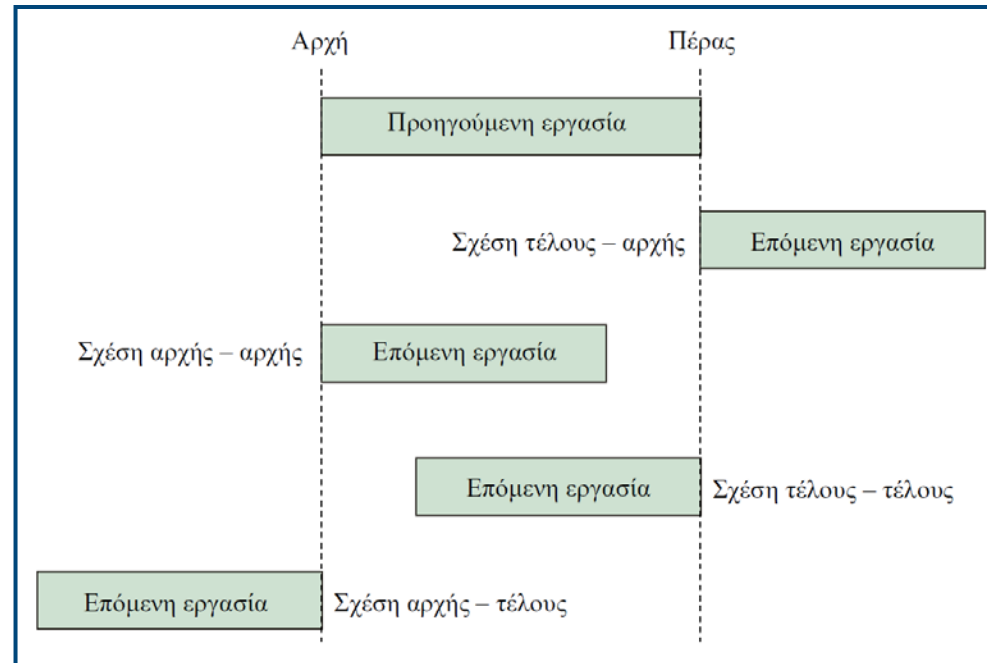
Οι βασικοί τύποι συσχέτισης εργασιών είναι:

✓ **Σχέση τέλους – αρχής (FS):** Η επόμενη εργασία αρχίζει μόλις τελειώσει η προηγούμενη.

✓ **Σχέση αρχής – αρχής (SS):** Η επόμενη εργασία αρχίζει ταυτόχρονα με την προηγούμενη.

✓ **Σχέση τέλους – τέλους (FF):** Η επόμενη εργασία τελειώνει με το τέλος της προηγούμενης.

✓ **Σχέση αρχής – τέλους (SF):** Το τέλος της επόμενης εργασίας εξαρτάται από την έναρξη της προηγούμενης. Δεν είναι εύχρηστη και δε συνηθίζεται σε πρακτικές εφαρμογές.



Εκτίμηση διάρκειας εργασιών

Ο χρόνος εκτέλεσης μιας εργασίας εξαρτάται από:

- Τη σύσταση της ομάδας εργασίας,
- Το επίπεδο εξειδίκευσης και ικανότητας του προσωπικού,
- Την αποτελεσματικότητα της διεύθυνσης και του εργοδηγού,
- Τη δυνατότητα και την κατάσταση των χρησιμοποιούμενων μηχανημάτων,
- Τη διαθεσιμότητα των υλικών, εργαλείων και εξοπλισμού,
- Το περιβάλλον εργασίας,
- Την κατασκευασσιμότητα του σχεδιασμού (πόσο εύκολα μπορεί να υλοποιηθεί το ζητούμενο αποτέλεσμα),
- Τις καιρικές συνθήκες,
- Τις απρόβλεπτες καταστάσεις (π.χ. φυσικές καταστροφές, απεργίες, ατυχήματα, κτλ).

Επειδή δεν είναι δυνατή η ακριβής πρόβλεψη των παραπάνω παραγόντων, είναι αναμενόμενο να μην μπορούν να γίνουν ακριβείς εκτιμήσεις των διαρκειών.

Αν μια εργασία επαναληφθεί πολλές φορές και μετρηθεί η διάρκεια της, θα καταγραφούν μια σειρά από χρόνοι που κυμαίνονται σε ένα εύρος.

Για εργασίες με μικρή διακύμανση της διάρκειας, χρησιμοποιείται για το χρονικό προγραμματισμό, η «**μέση τιμή**», ενδεχομένως, με έναν συντελεστή ασφαλείας για να συμπεριληφθούν καθυστερήσεις λόγω απρόβλεπτων καταστάσεων.

Εκτίμηση διάρκειας εργασιών

Στην περίπτωση που η διάρκεια μιας εργασίας παρουσιάζει σημαντικές διακυμάνσεις, ακολουθείται μια στοχαστική προσέγγιση, γνωστή ως μέθοδος **Pert**. Η ανάλυση απαιτεί την εκτίμηση τριών τιμών διάρκειας:

- την αισιόδοξη διάρκεια, που αντιστοιχεί στις πλέον ευνοϊκές συνθήκες εκτέλεσης,
- την πιθανότερη διάρκεια, που αντιστοιχεί σε κανονικές συνθήκες εκτέλεσης, και
- την απαισιόδοξη διάρκεια, που αντιστοιχεί στις πλέον δυσμενείς συνθήκες εκτέλεσης.

Σημείωση: Η μέθοδος Pert θα παρουσιασθεί αναλυτικά στη συνέχεια.

- ✓ Συχνά, οι εκτιμήσεις της διάρκειας προκύπτουν από την εμπειρία στην εκτέλεση παρόμοιων εργασιών.
- ✓ Οι εκτιμήσεις των διαρκειών πρέπει να είναι ακριβείς και ρεαλιστικές και σε αυτό μπορεί να βοηθήσει η εμπειρία του υπευθύνου (π.χ. τεχνίτη) της εκτέλεσης της συγκεκριμένης εργασίας.
- ✓ Οι εκτιμήσεις των διαρκειών δεν περιλαμβάνουν πιθανές καθυστερήσεις από απρόσμενες καταστάσεις π.χ. κακοκαιρία, απεργία κτλ. Τέτοιες καθυστερήσεις μπορούν να λαμβάνονται υπόψη, είτε θεωρώντας μια πρόσθετη δραστηριότητα στην αρχή ή στο τέλος του έργου με διάρκεια την εκτιμώμενη συνολική καθυστέρηση ή αυξάνοντας τη διάρκεια κάθε μιας δραστηριότητας κατά ένα ποσοστό.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι κάποιες εργασίες θα εκτελούνται ταυτόχρονα σε ένα έργο, είναι φανερό ότι η συνολική διάρκεια του έργου δεν προκύπτει από απλή άθροιση των επιμέρους διαρκειών των εργασιών και ότι η κατάρτιση του χρονοδιαγράμματος του έργου αποτελεί μια πιο σύνθετη διαδικασία.

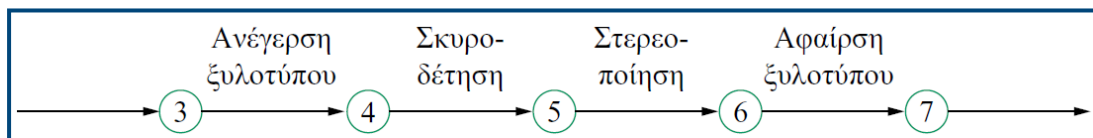
Απεικόνιση δομής έργου με τοξωτό δικτυωτό γράφημα

Το κύριο συστατικό ενός τοξωτού δικτυωτού γραφήματος είναι το **βέλος**, το οποίο αντιπροσωπεύει μια δραστηριότητα, μια χρονοβόρα διαδικασία, κατά την οποία καταναλώνονται συγκεκριμένοι πόροι (εργασία, χρήμα, εξοπλισμός και υλικά) για την παραγωγή ενός αυτοτελούς μέρους του έργου.

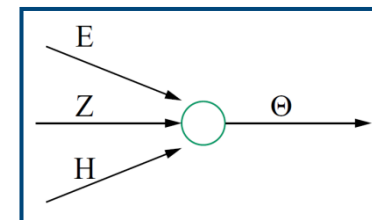
Η **ουρά** του βέλους στο τοξωτό δίκτυο αντιστοιχεί στο χρονικό **σημείο έναρξης** της δραστηριότητας, η δε **κεφαλή** του στο **σημείο πέραςτος**. Τα δύο αυτά σημεία, που αποτελούν κόμβους του γραφήματος, χαρακτηρίζονται αντίστοιχα ως γεγονότα αρχής και πέραςτος της δραστηριότητας.

Το γεγονός αντιπροσωπεύει ένα χρονικό σημείο που σηματοδοτεί την περάτωση μιας ή περισσότερων εργασιών και την έναρξη κάποιων άλλων. Αντίθετα, η δραστηριότητα σχετίζεται με μία χρονική περίοδο.

Το δικτυωτό γράφημα κατασκευάζεται με βάση την αρχή της αλληλεξάρτησης των δραστηριοτήτων.



Δραστηριότητες σε σειρά: η «Ανέγερση ξυλοτύπου» είναι μια δραστηριότητα, ενώ το «πέρας ανέγερσης ξυλοτύπου» είναι ένα γεγονός.



Η δραστηριότητα Θ μπορεί να αρχίσει μόνο όταν περατωθούν και οι τρεις δραστηριότητες E , Z και H .

Απεικόνιση δομής έργου με τοξωτό δικτυωτό γράφημα

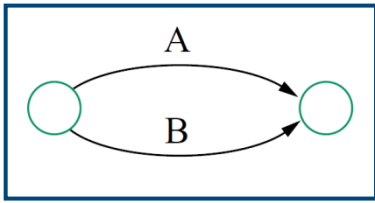
Γενικοί κανόνες κατασκευής τοξωτού γραφήματος

- Κάθε δραστηριότητα απεικονίζεται από ένα βέλος και κάθε βέλος αντιστοιχεί σε μία δραστηριότητα.
- Το χρονικό σημείο έναρξης ενός έργου αποτελεί ένα γεγονός από το οποίο θα πρέπει να ξεκινούν όλες οι αρχικές εργασίες (αυτές που δεν έχουν προηγούμενες).
- Αντίστοιχα, οι τελικές εργασίες (αυτές που δεν έχουν επόμενες) θα πρέπει να συγκλίνουν προς το γεγονός πέρατος του έργου.
- Δεν επιτρέπεται δύο δραστηριότητες να έχουν κοινό γεγονός αρχής και κοινό γεγονός πέρατος. Ο περιορισμός αυτός τίθεται διότι κάθε δραστηριότητα προσδιορίζεται από τους αριθμούς των γεγονότων αρχής και πέρατος και επομένως δύο διαφορετικές δραστηριότητες θα είχαν την ίδια αρίθμηση.
- Για τη σωστή απόδοση των τύπων αλληλουχίας των δραστηριοτήτων είναι συχνά απαραίτητη η χρήση της λεγόμενης **πλασματικής δραστηριότητας** (dummy activity). Μια πλασματική δραστηριότητα έχει μηδενική διάρκεια, μηδενικό κόστος και μηδενική απαίτηση πόρου. **Στο γράφημα σχεδιάζεται με βέλος διακεκομμένης γραμμής.**
- Οι πλασματικές δραστηριότητες πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο όπου είναι απαραίτητες και να αποφεύγεται η άσκοπη χρήση τους.

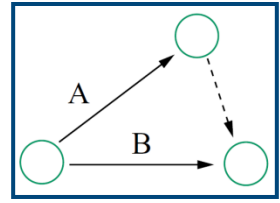
Απεικόνιση δομής έργου με τοξωτό δικτυωτό γράφημα

Παραδείγματα

➤ Οι δραστηριότητες A και B έχουν κοινή αρχή και πέρας.

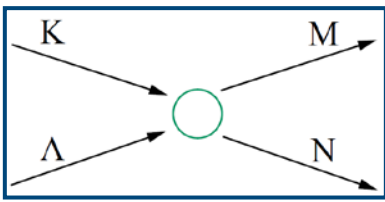


Λάθος

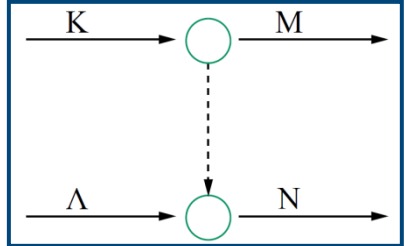


Σωστό

➤ Η δραστηριότητα N εξαρτάται από τις K και Λ,
➤ η δραστηριότητα M εξαρτάται από την K.

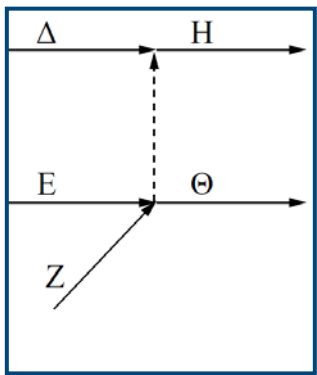


Λάθος

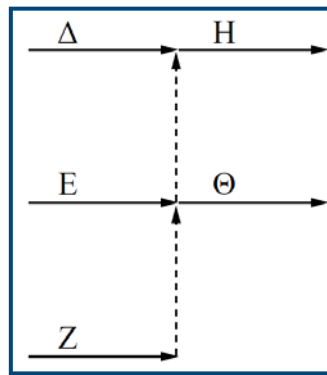


Σωστό

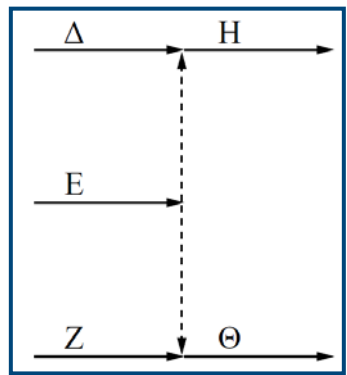
➤ Η δραστηριότητα H έχει αμέσως προηγούμενες τις Δ και E,
➤ Η δραστηριότητα Θ έχει αμέσως προηγούμενες τις E και Z.



Λάθος



Λάθος



Σωστό

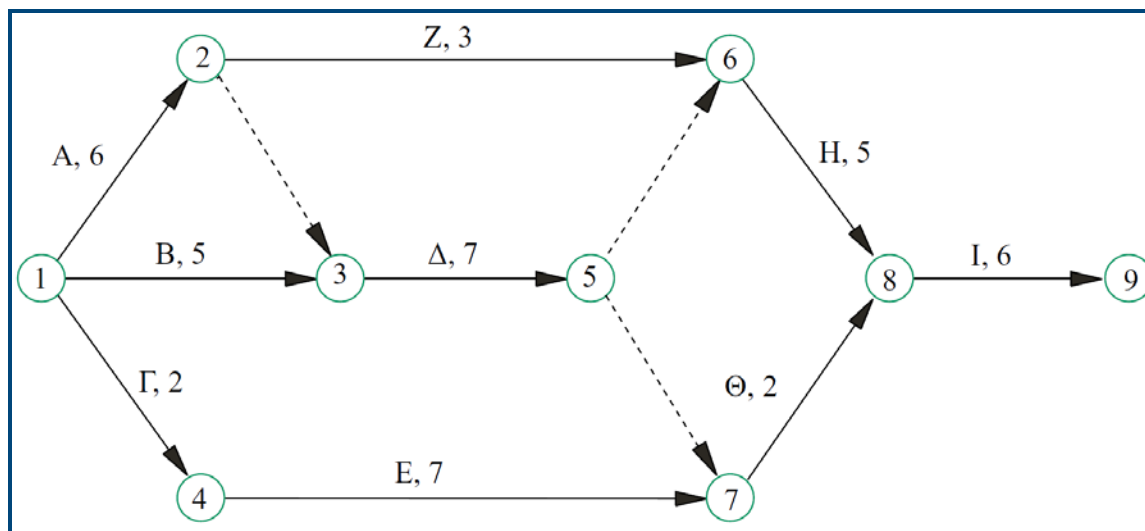
Απεικόνιση δομής έργου με τοξωτό δικτυωτό γράφημα

Παράδειγμα:

Δραστ.	Διάρκεια	Αλληλουχία
A	6	A < Δ,Z
B	5	B < Δ
Γ	2	Γ < E
Δ	7	Δ < Η,Θ
E	7	E < Θ
Z	3	Z < Η
Η	5	Η < Ι
Θ	2	Θ < Ι
Ι	6	Ι < -

Το σύμβολο "<" εδώ υποδηλώνει «προηγείται»

Αμέσως προηγούμενες: A, B < Δ * Γ < E A < Z Δ,Z < Η Δ, E < Θ Η, Θ < Ι



* Το σύμβολο "<" χρησιμοποιείται εδώ για να περιγράψει σχέσεις διαδοχής μεταξύ εργασιών

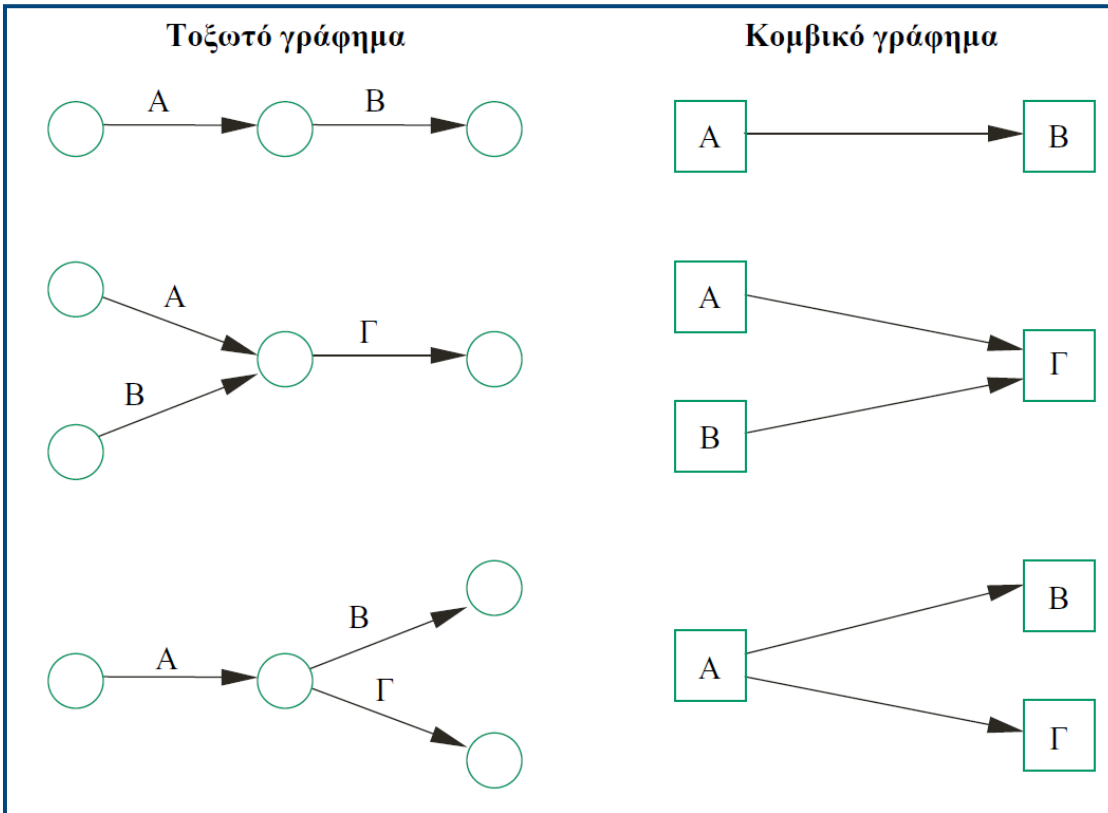
Απεικόνιση δομής έργου με τοξωτό δικτυωτό γράφημα

Παρατηρήσεις:

- Τα βέλη του γραφήματος δεν είναι διανύσματα και το μήκος τους δεν καθορίζει τη διάρκεια της αντίστοιχης δραστηριότητας. Αντίθετα, η διάρκεια πρέπει να γράφεται δίπλα στο αντίστοιχο βέλος.
- Τα βέλη πρέπει να κινούνται από τα αριστερά προς τα δεξιά σε αντιστοιχία με την πορεία του έργου (ώστε να είναι οπτικά εμφανέστερη η ροή υλοποίησης του έργου). Βέλη με κατεύθυνση από τα δεξιά προς τα αριστερά πρέπει να αποφεύγονται.
- Δεν επιτρέπεται να δημιουργείται βρόγχος, δηλαδή τα βέλη να καταλήγουν σε προηγούμενα γεγονότα (δεν πρέπει δηλαδή να εμφανίζονται, για παράδειγμα, αναλυτικά οι κύκλοι εργασίας που συχνά εμπεριέχονται σε μια εργασία, π.χ., εκσκαφή, φόρτωση, μεταφορά, απόθεση).
- Τα γεγονότα αριθμούνται μιας και η αρίθμηση αυτή χρησιμοποιείται στον προσδιορισμό των δραστηριοτήτων. Η αρίθμηση πρέπει να γίνεται σε αύξουσα σειρά με βάση τη λογική σειρά των εργασιών του έργου και πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη ότι σε κάθε δραστηριότητα ο αριθμός του γεγονότος αρχής είναι μικρότερος του αριθμού του γεγονότος πέρατος.
- Κατά τη σχεδίαση του δικτυωτού γραφήματος είναι σχεδόν αναπόφευκτη η ανάγκη ανασχεδιασμού μιας προηγούμενης φάσης του γραφήματος κατά την τοποθέτηση μιας επόμενης δραστηριότητας. Θα πρέπει λοιπόν το γράφημα να σχεδιάζεται πρώτα σε μια πρόχειρη μορφή, που επιτρέπει ανακατατάξεις των βελών, κι όταν πλέον έχουν αποτυπωθεί σωστά όλοι η περιορισμοί, να σχεδιάζεται το γράφημα στην τελική του μορφή.

Απεικόνιση δομής έργου με κομβικό δικτυωτό γράφημα

Στο κομβικό δικτυωτό γράφημα, οι κόμβοι αντιπροσωπεύουν τις δραστηριότητες και τα βέλη τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ αυτών.

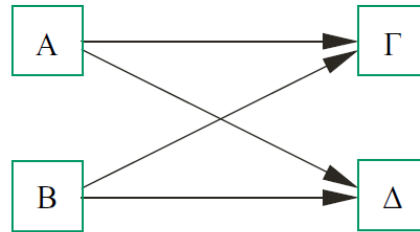
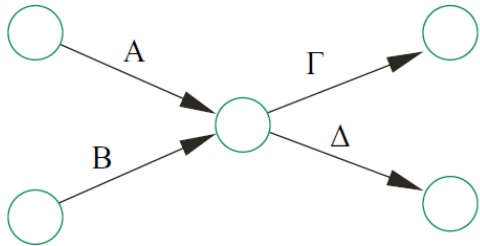


Δραστηριότητες σε σειρά.

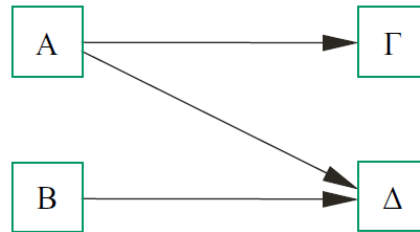
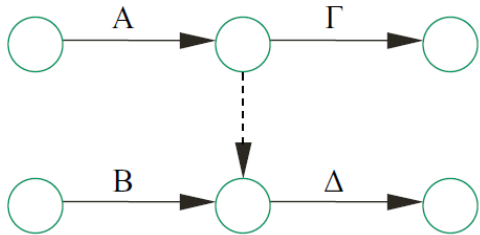
Η Γ εξαρτάται από τις Α και Β.

Οι Β και Γ εξαρτώνται από την Α.

Απεικόνιση δομής έργου με κομβικό δικτυωτό γράφημα



Οι Γ και Δ εξαρτώνται από τις Α και Β.

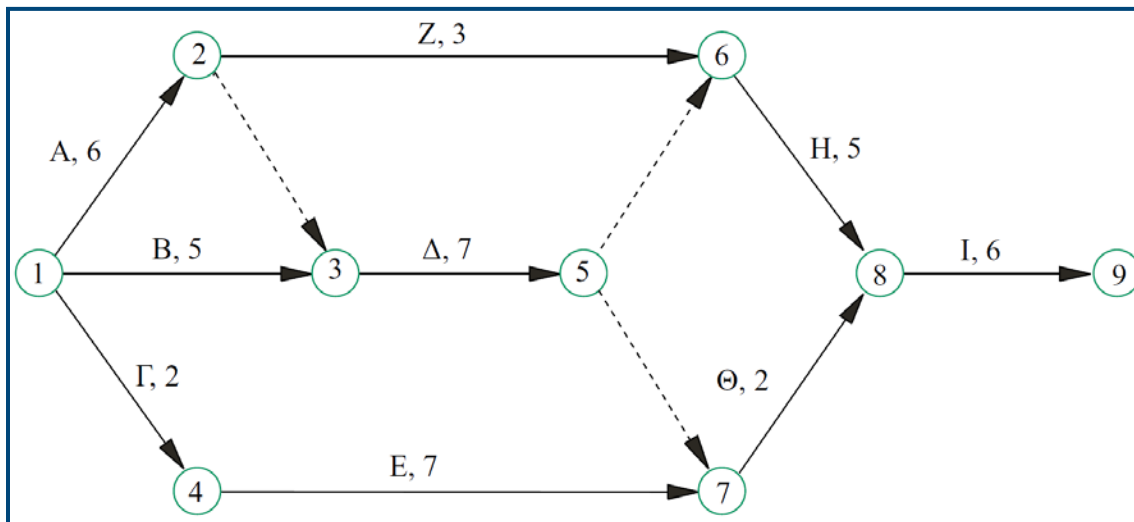


Η Γ εξαρτάται από την Α και η Δ από τις Α και Β.

Σημείωση: Στο κομβικό δεν απαιτείται πλασματική δραστηριότητα.

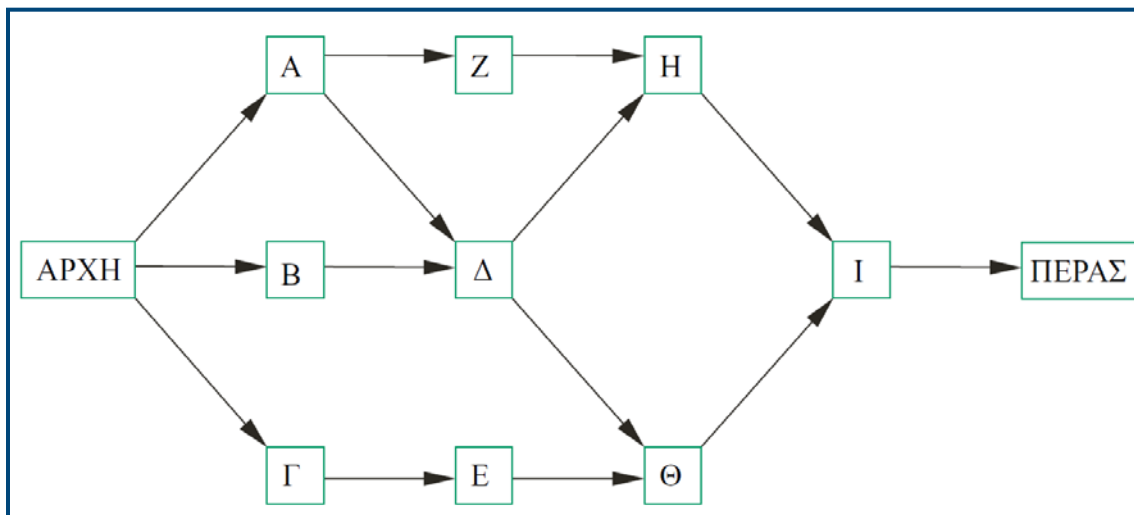
Απεικόνιση δομής έργου με κομβικό δικτυωτό γράφημα

Τοξωτό:



Αμέσως προηγούμενες: $A, B < \Delta$ (*) $\Gamma < E$ $A < Z$ $\Delta, Z < H$ $\Delta, E < \Theta$ $H, \Theta < I$

Κομβικό:



(*) Το σύμβολο "<" χρησιμοποιείται εδώ για να περιγράψει σχέσεις διαδοχής μεταξύ εργασιών

Απεικόνιση δομής έργου με κομβικό δικτυωτό γράφημα

Τα **βασικά πλεονεκτήματα** της κομβικής μορφής, σε σύγκριση με την τοξωτή, είναι:

- Δεν απαιτούνται πλασματικές δραστηριότητες.
- Η σύνθεση του δικτυωτού γραφήματος είναι σχετικά απλή μειώνοντας τα περιθώρια λάθους.
- Παρέχεται η δυνατότητα παρουσίασης χρονικά επικαλυπτόμενων εργασιών χωρίς την ανάγκη διάσπασης κάθε εργασίας σε τμήματα, όπως απαιτείται στο τοξωτό δίκτυο (ανεξάρτητες εργασίες που εκτελούνται ταυτόχρονα με μια υστέρηση).
- Παρέχεται η δυνατότητα προσομοίωσης διαφόρων τύπων διαδοχής εργασιών (π.χ. αρχής–αρχής) αλλά και χρόνων προπόρευσης ή υστέρησης μεταξύ των εργασιών.

Τα στοιχεία αυτά έχουν κάνει την κομβική μορφή του δικτυωτού γραφήματος να χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο σήμερα στα πακέτα Η/Υ χρονικού προγραμματισμού.

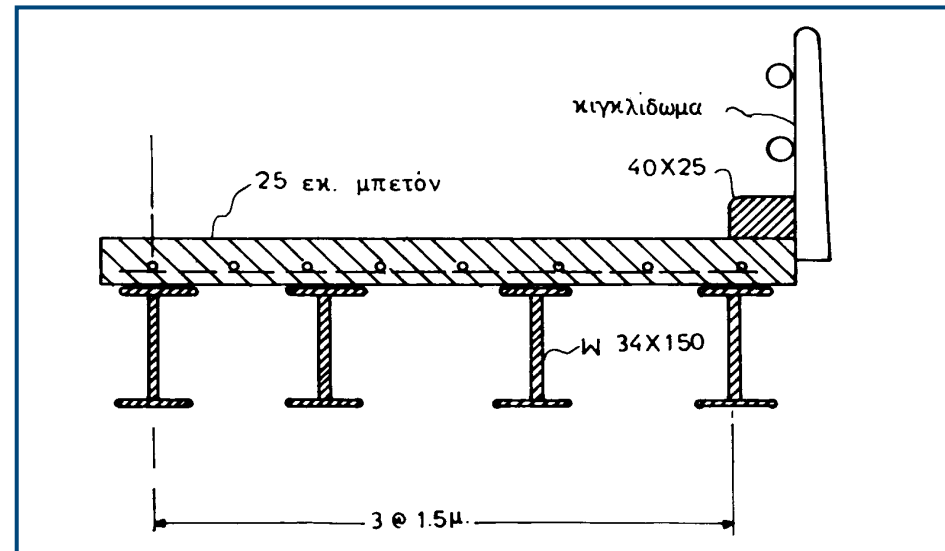
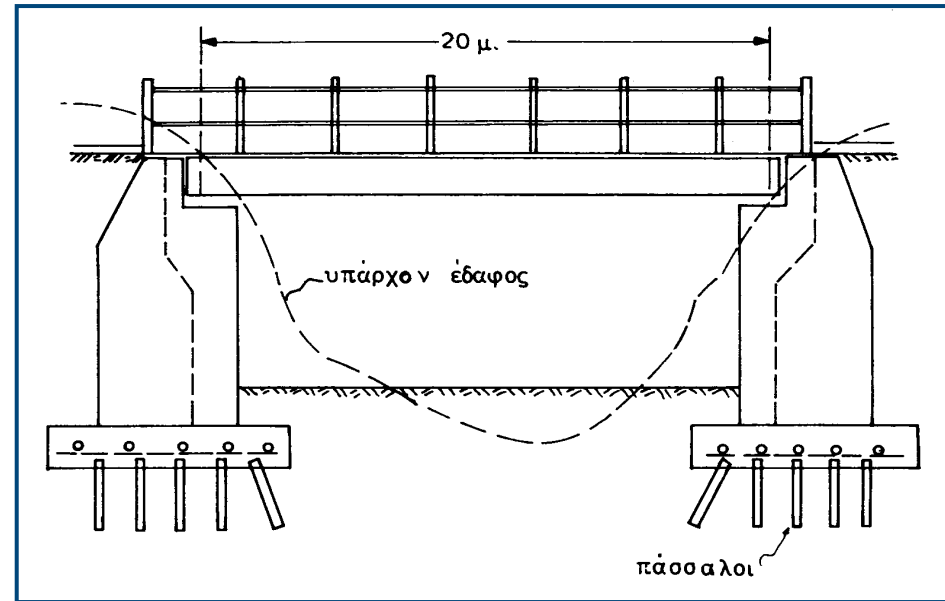
Από την άλλη πλευρά, το τοξωτό δίκτυο παρέχει μια καλύτερη εποπτεία της ανάπτυξης του έργου ως προς την αλληλουχία των δραστηριοτήτων. Τα γεγονότα/κόμβοι δίνουν μια σαφέστερη εικόνα της ενωρίτερης έναρξης και του βραδύτερου πέρατος των δραστηριοτήτων.

Πρόβλημα 1

Εξετάζεται η κατασκευή μιας οδικής γέφυρας που φαίνεται στο σχήμα.

Μεταξύ των άλλων περιορισμών στην εκτέλεση των εργασιών υπάρχει κι αυτός του περιορισμένου αριθμού εργατοτεχνιτών σκυροδέτησης των βάθρων της γέφυρας που επαρκεί για εργασία σε ένα μόνο βάθρο σε κάποια χρονική στιγμή. Το ίδιο ισχύει και για το συνεργείο κατασκευής των πασσάλων. Αναφέρατε την αρχή και το πέρας του έργου.

- Δημιουργείστε τον κατάλογο των απαιτούμενων εργασιών σε λογική χρονική σειρά διαδοχής.
- Συμπληρώστε τους περιορισμούς διαδοχής των εργασιών. Χρησιμοποιείστε γενικευμένες σχέσεις διαδοχής (όπου αυτό είναι ρεαλιστικό) ώστε το έργο να ολοκληρωθεί στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.
- Σχεδιάστε το δικτυωτό γράφημα του έργου.

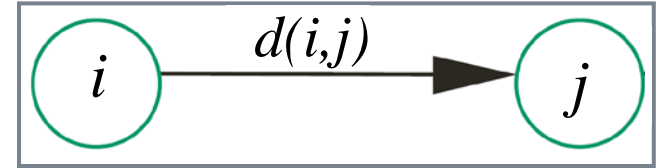


Μέρος 2^ο: Χρονικός προγραμματισμός έργου

- ❖ Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από τοξωτό γράφημα
- ❖ Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από κομβικό γράφημα
- ❖ Χρονικά περιθώρια
- ❖ Διάγραμμα Gantt
- ❖ Πρόβλημα 2
- ❖ Στοχαστική ανάλυση χρόνων – Μέθοδος Pert
- ❖ Πρόβλημα 3
- ❖ Σύνθετες σχέσεις αλληλουχίας εργασιών
- ❖ Πρόβλημα 4

Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από τοξωτό γράφημα

➤ **Γεγονός (i)**: ένα χρονικό σημείο που σηματοδοτεί το πέρας κάποιων εργασιών και την έναρξη κάποιων άλλων.



➤ **Δραστηριότητα (i, j)**: μια καθορισμένη εργασία του έργου που απαιτεί χρόνο και πόρους για να ολοκληρωθεί. Το i είναι το γεγονός αρχής και το j είναι το γεγονός πέρατος.

➤ **Διάρκεια $d(i, j)$** : ο απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης μιας εργασίας με τις υπάρχουσες συνθήκες.

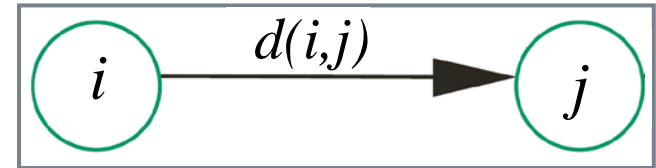
➤ **Διαδρομή**: το σύνολο των διαδοχικών (αλληλεξαρτώμενων) εργασιών μεταξύ δύο σημείων του έργου, και, συνήθως, από την αρχή ως το τέλος του.

➤ **Ομόρροπος υπολογισμός**: η υπολογιστική διαδικασία του χρονικού προγραμματισμού στην κατεύθυνση της ροής του έργου.

➤ **Αντίρροπος υπολογισμός**: η υπολογιστική διαδικασία του χρονικού προγραμματισμού αντίθετα στην κατεύθυνση της ροής του έργου, δηλαδή από το πέρας προς τη αρχή.

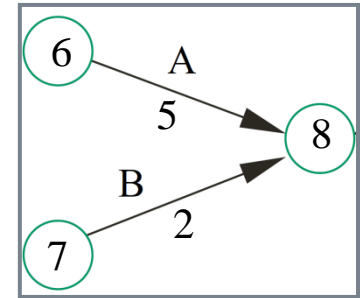
Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από τοξωτό γράφημα

➤ **Ενωρίτερος χρόνος γεγονότος T_E** (earliest event time): ο ελάχιστος δυνατός χρόνος (από την αρχή του έργου) περάτωσης όλων των προηγούμενων δραστηριοτήτων που συγκλίνουν στο γεγονός αυτό. Υπολογίζεται στο πλαίσιο του ομόρροπου υπολογισμού, εξετάζοντας όλες τις διαδρομές που οδηγούν σ' αυτό και εφαρμόζοντας την σχέση:



$$T_E(j) = \max_i [T_E(i) + d(i, j)] \quad (1)$$

όπου i όλα τα αμέσως προηγούμενα γεγονότα.



Παράδειγμα

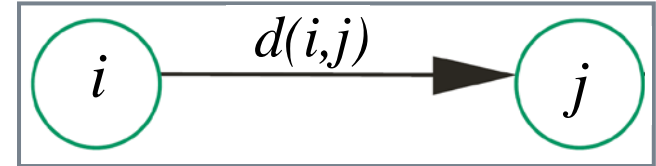
Έστω $d(6,8) = 5$, $d(7,8) = 2$, $T_E(6) = 13$ και $T_E(7) = 15$. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$T_E(8) = \max \left\{ \begin{array}{l} T_E(6) + d(6,8) \\ T_E(7) + d(7,8) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 13 + 5 \\ 15 + 2 \end{array} \right\} = 18$$

Ο ενωρίτερος χρόνος του γεγονότος που αντιπροσωπεύει το τέλος του έργου, αντιστοιχεί στην ελάχιστη δυνατή διάρκεια εκτέλεσης του έργου.

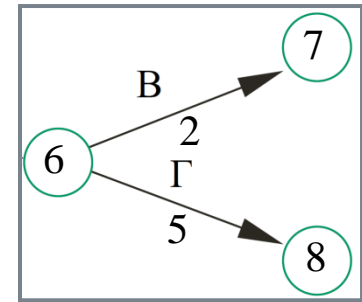
Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από τοξωτό γράφημα

- **Βραδύτερος χρόνος γεγονότος T_L** (latest event time): ο μέγιστος χρόνος από την έναρξη του έργου κατά τον οποίο πρέπει να επιτευχθεί ένα γεγονός χωρίς να προκληθεί καθυστέρηση στην ολοκλήρωση του έργου. Υπολογίζεται στο πλαίσιο του αντίρροπου υπολογισμού και αντιστοιχεί στον ελάχιστο από τους βραδύτερους χρόνους έναρξης των δραστηριοτήτων που αρχίζουν στο συγκεκριμένο γεγονός, ήτοι:



$$T_L(i) = \min_j [T_L(j) - d(i, j)] \quad (2)$$

όπου j όλα τα αμέσως επόμενα γεγονότα.



Παράδειγμα

Έστω $d(6,7) = 2$, $d(6,8) = 5$, $T_L(7) = 13$ και $T_L(8) = 15$. Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$T_L(6) = \min \left\{ \begin{array}{l} T_L(7) - d(6,7) \\ T_L(8) - d(6,8) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 13 - 2 \\ 15 - 5 \end{array} \right\} = 10$$

Δεδομένου ότι ο στόχος είναι να ολοκληρωθεί το έργο στον ελάχιστο εφικτό χρόνο, ως αφετηρία του αντίρροπου υπολογισμού, **ο βραδύτερος χρόνος του γεγονότος πέρατος του έργου τίθεται ίσος με τον ενωρίτερο χρόνο του ίδιου γεγονότος.**

Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από τοξωτό γράφημα

Ομόρροπος υπολογισμός:

$$T_E(1) = 0$$

$$T_E(2) = T_E(1) + d(1,2) = 0 + 6 = 6$$

$$T_E(3) = \max \left\{ \begin{array}{l} T_E(1) + d(1,3) \\ T_E(2) + d(2,3) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 5 \\ 6 + 0 \end{array} \right\} = 6$$

$$T_E(4) = T_E(1) + d(1,4) = 0 + 2 = 2$$

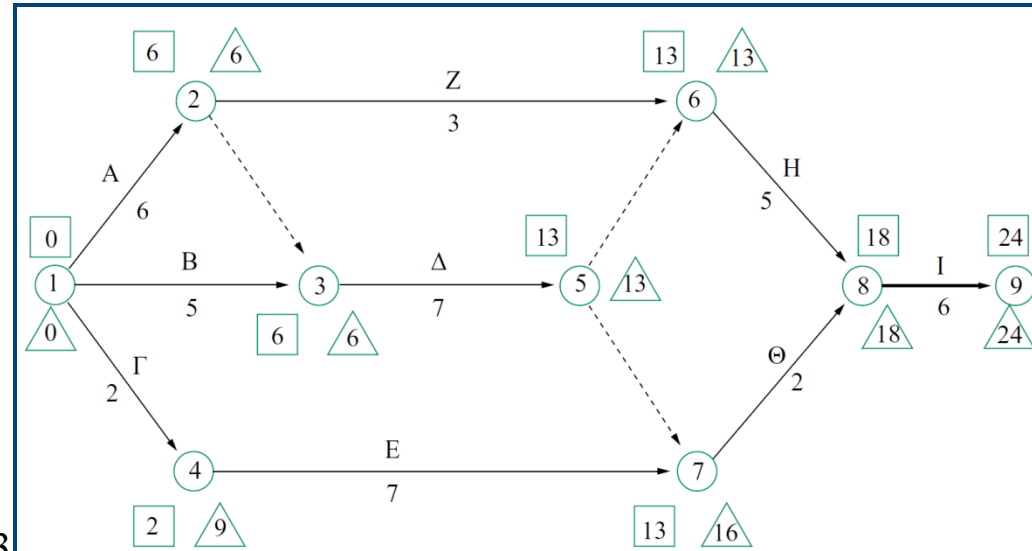
$$T_E(5) = T_E(3) + d(3,5) = 6 + 7 = 13$$

$$T_E(6) = \max \left\{ \begin{array}{l} T_E(5) + d(5,6) \\ T_E(2) + d(2,6) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 13 + 0 \\ 6 + 3 \end{array} \right\} = 13$$

$$T_E(7) = \max \left\{ \begin{array}{l} T_E(4) + d(4,7) \\ T_E(5) + d(5,7) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 2 + 7 \\ 13 + 0 \end{array} \right\} = 13$$

$$T_E(8) = \max \left\{ \begin{array}{l} T_E(6) + d(6,8) \\ T_E(7) + d(7,8) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 13 + 5 \\ 13 + 2 \end{array} \right\} = 18$$

$$T_E(9) = T_E(8) + d(8,9) = 18 + 6 = 24$$



□ Ενωρίτερος χρόνος γεγονότος

△ Βραδύτερος χρόνος γεγονότος

Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από τοξωτό γράφημα

Αντίρροπος υπολογισμός:

$$T_L(9) = T_E(9) = 24$$

$$T_L(8) = T_L(9) - d(8,9) = 24 - 6 = 18$$

$$T_L(7) = T_L(8) - d(7,8) = 18 - 2 = 16$$

$$T_L(6) = T_L(8) - d(6,8) = 18 - 5 = 13$$

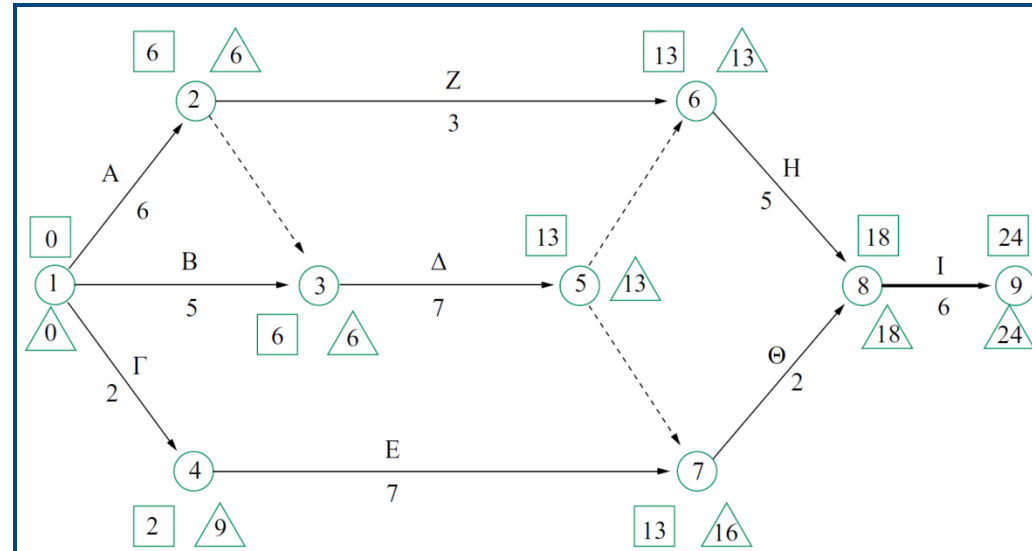
$$T_L(5) = \min \begin{cases} T_L(6) - d(5,6) \\ T_L(7) - d(5,7) \end{cases} = \min \begin{cases} 13 - 0 \\ 16 - 0 \end{cases} = 13$$

$$T_L(4) = T_L(7) - d(4,7) = 16 - 7 = 9$$

$$T_L(3) = T_L(5) - d(3,5) = 13 - 7 = 6$$

$$T_L(2) = \min \begin{cases} T_L(3) - d(2,3) \\ T_L(6) - d(2,6) \end{cases} = \min \begin{cases} 6 - 0 \\ 13 - 3 \end{cases} = 6$$

$$T_L(1) = \min \begin{cases} T_L(2) - d(1,2) \\ T_L(3) - d(1,3) \\ T_L(4) - d(1,4) \end{cases} = \min \begin{cases} 6 - 6 \\ 6 - 5 \\ 9 - 2 \end{cases} = 0$$



□ Ενωρίτερος χρόνος γεγονότος
△ Βραδύτερος χρόνος γεγονότος

Παρατήρηση:

Για τους χρόνους του γεγονότος αρχής ισχύει:

$$T_E = T_L = 0$$

Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από τοξωτό γράφημα

➤ **Κρίσιμη διαδρομή (critical path):** Η μεγαλύτερη χρονικά διαδρομή μεταξύ αρχής και τέλους του έργου. Οποιαδήποτε καθυστέρηση σε κάποια από τις δραστηριότητες που ανήκουν στην κρίσιμη διαδρομή επιβαρύνει τη συνολική διάρκεια του έργου. Οι δραστηριότητες αυτές είναι επομένως κρίσιμες.

Κάθε δίκτυο έχει τουλάχιστον μια κρίσιμη διαδρομή, υπάρχει όμως πιθανότητα να υπάρχουν δύο ή περισσότερες τέτοιες διαδρομές.

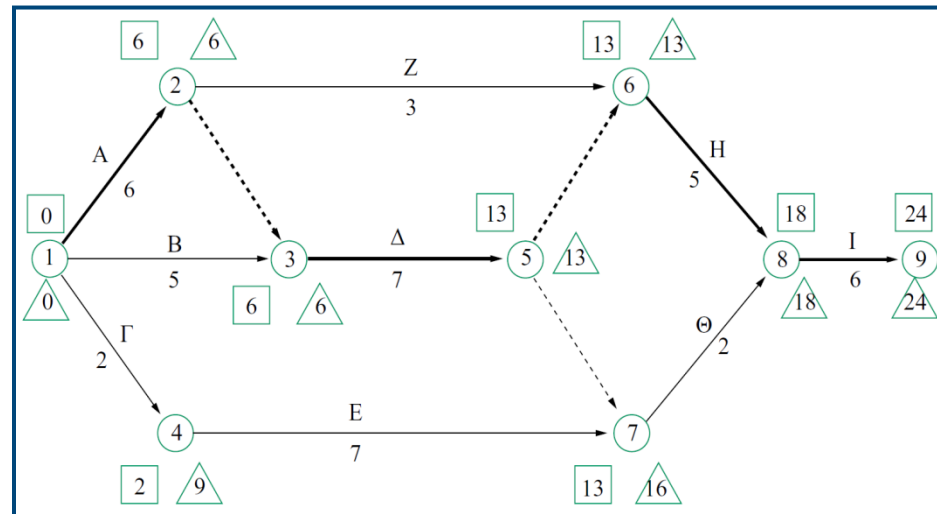
Για την εύρεση της κρίσιμης διαδρομής από τοξωτό γράφημα, δεδομένων των χρόνων T_E και T_L των γεγονότων αρχής και πέρατος, ισχύει:

Η δραστηριότητα (i,j) , διάρκειας $d(i,j)$, βρίσκεται πάνω στην κρίσιμη διαδρομή όταν:

$$\begin{aligned} 1. T_E(i) &= T_L(i) \quad \text{και} \quad T_E(j) = T_L(j) \\ 2. T_L(j) - T_E(i) - d(i,j) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Παρατηρήσεις

- Η συνθήκη (3.1) ορίζει αν ένα γεγονός ανήκει στην κρίσιμη διαδρομή.
- Η συνθήκη (3.2) υποδηλώνει ότι αν μεταξύ δύο γεγονότων που ανήκουν, βάσει της (3.1), στην κρίσιμη διαδρομή, υπάρχουν περισσότερες από μια δραστηριότητες, στην κρίσιμη διαδρομή ανήκει αυτή με τη μεγαλύτερη διάρκεια.
- Στην κρίσιμη διαδρομή δύναται να περιλαμβάνονται πλασματικές δραστηριότητες.



Κρίσιμη διαδρομή:
1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 8 - 9

Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από τοξωτό γράφημα

- **Ενωρίτερος χρόνος έναρξης δραστηριότητας ES** (early start): Ο ενωρίτερος χρόνος που μπορεί να αρχίσει μια δραστηριότητα χωρίς να παραβιάζει τους περιορισμούς.
- **Ενωρίτερος χρόνος πέρατος δραστηριότητας EF** (early finish): Ο ενωρίτερος χρόνος που μπορεί να περατωθεί μια δραστηριότητα χωρίς να παραβιάζει τους περιορισμούς.
- **Βραδύτερος χρόνος έναρξης δραστηριότητας LS** (late start): Ο βραδύτερος χρόνος που μπορεί να αρχίσει μια δραστηριότητα χωρίς να καθυστερήσει η ολοκλήρωση του έργου.
- **Βραδύτερος χρόνος πέρατος δραστηριότητας LF** (late finish): Ο βραδύτερος χρόνος που μπορεί να περατωθεί μια δραστηριότητα χωρίς να καθυστερήσει η ολοκλήρωση του έργου.

Έστω μια δραστηριότητα (i, j) , διάρκειας $d(i, j)$, με ενωρίτερο χρόνο γεγονότος αρχής $T_E(i)$ και βραδύτερο χρόνο γεγονότος πέρατος $T_L(j)$.

Για την εύρεση των χρόνων των δραστηριοτήτων ES , EF , LS και LF από τοξωτό γράφημα, δεδομένων των χρόνων T_E και T_L των γεγονότων αρχής και πέρατος, ισχύει:

$$\begin{aligned} ES(i, j) &= T_E(i) \\ EF(i, j) &= ES(i, j) + d(i, j) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} LF(i, j) &= T_L(j) \\ LS(i, j) &= LF(i, j) - d(i, j) \end{aligned} \quad (5)$$

Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από κομβικό γράφημα

Ο χρονικός προγραμματισμός με βάση το κομβικό δίκτυο δε διαφέρει ουσιαστικά από τον αντίστοιχο με βάση το τοξωτό δίκτυο. Εδώ όμως, δεν υπάρχουν γεγονότα και οι υπολογισμοί βασίζονται μόνο στα χρονικά μεγέθη των δραστηριοτήτων.

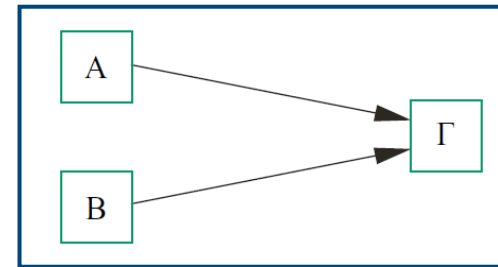
➤ Ενωρίτεροι χρόνοι έναρξης ES και πέρατωσης EF δραστηριότητας

Υπολογίζονται από τον ομόρροπο υπολογισμό.

Έστω μια δραστηριότητα K , διάρκειας $d(K)$, η οποία μπορεί να αρχίσει όταν έχουν ολοκληρωθεί όλες οι αμέσως προηγούμενες. Ο ενωρίτερος χρόνος έναρξης $ES(K)$ είναι ο μέγιστος από τους ενωρίτερους χρόνους πέρατος (EF) όλων των αμέσως προηγούμενων δραστηριοτήτων i , ήτοι:

$$ES(K) = \max_i EF(i) \text{ και } EF(K) = ES(K) + d(K) \quad (6)$$

Παράδειγμα



$$ES(\Gamma) = \max \{ EF(A), EF(B) \}$$

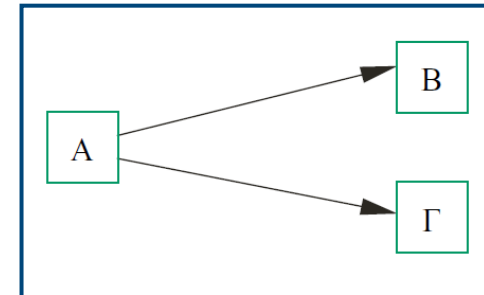
➤ Βραδύτεροι χρόνοι έναρξης LS και πέρατος LF δραστηριότητας

Υπολογίζονται από τον αντίρροπο υπολογισμό.

Έστω μια δραστηριότητα K , διάρκειας $d(K)$, η οποία πρέπει να περατωθεί πριν αρχίσουν όλες οι αμέσως επόμενες. Ο βραδύτερος χρόνος πέρατος $LF(K)$ είναι ο ελάχιστος από τους βραδύτερους χρόνους έναρξης (LS) όλων των αμέσως επόμενων δραστηριοτήτων i , ήτοι:

$$LF(K) = \min_i LS(i) \text{ , } LS(K) = LF(K) - d(K) \quad (7)$$

Παράδειγμα



$$LF(A) = \min \{ LS(B), LS(\Gamma) \}$$

Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από κομβικό γράφημα

Ομόρροπος υπολογισμός:

$$ES(A) = 0$$

$$EF(A) = ES(A) + d(A) = 0 + 6 = 6$$

$$ES(B) = 0$$

$$EF(B) = ES(B) + d(B) = 0 + 5 = 5$$

$$ES(\Gamma) = 0$$

$$EF(\Gamma) = ES(\Gamma) + d(\Gamma) = 0 + 2 = 2$$

$$ES(\Delta) = \max \left\{ \begin{array}{l} EF(A) \\ EF(B) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 5 \end{array} \right\} = 6$$

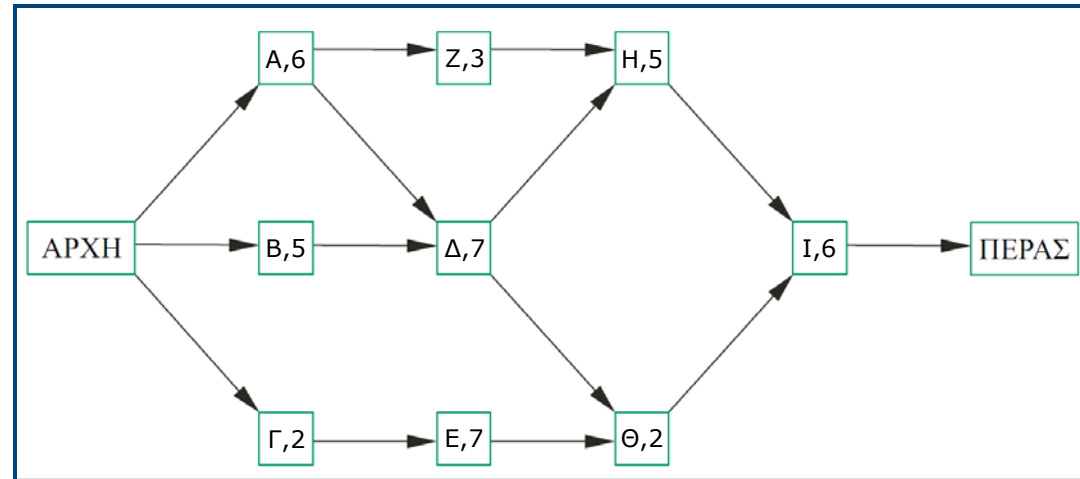
$$EF(\Delta) = ES(\Delta) + d(\Delta) = 6 + 7 = 13$$

$$ES(E) = EF(\Gamma) = 2$$

$$EF(E) = ES(E) + d(E) = 2 + 7 = 9$$

$$ES(Z) = EF(A) = 6$$

$$EF(Z) = ES(Z) + d(Z) = 6 + 3 = 9$$



$$ES(H) = \max \left\{ \begin{array}{l} EF(\Delta) \\ EF(Z) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 9 \end{array} \right\} = 13$$

$$EF(H) = ES(H) + d(H) = 13 + 5 = 18$$

$$ES(\Theta) = \max \left\{ \begin{array}{l} EF(\Delta) \\ EF(E) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 9 \end{array} \right\} = 13$$

$$EF(\Theta) = ES(\Theta) + d(\Theta) = 13 + 2 = 15$$

$$ES(I) = \max \left\{ \begin{array}{l} EF(H) \\ EF(\Theta) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 18 \\ 15 \end{array} \right\} = 18$$

$$EF(I) = ES(I) + d(I) = 18 + 6 = 24$$

Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από κομβικό γράφημα

Αντίρροπος υπολογισμός:

$$LF(I) = EF(I) = 24$$

$$LS(I) = EF(I) - d(I) = 24 - 6 = 18$$

$$LF(\Theta) = LS(I) = 18$$

$$LS(\Theta) = LF(\Theta) - d(\Theta) = 18 - 2 = 16$$

$$LF(H) = LS(I) = 18$$

$$LS(H) = LF(H) - d(H) = 18 - 5 = 13$$

$$LF(Z) = LS(H) = 13$$

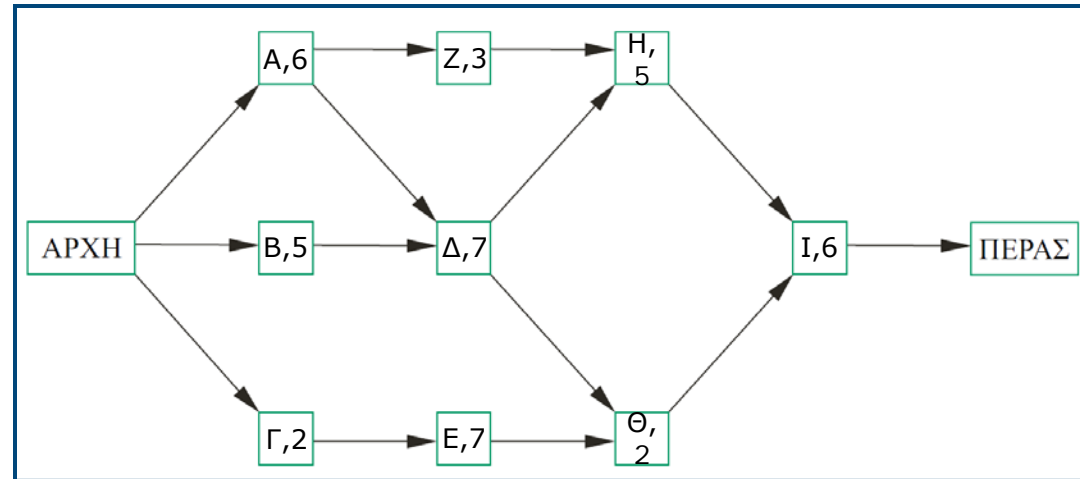
$$LS(Z) = LF(Z) - d(Z) = 13 - 3 = 10$$

$$LF(E) = LS(\Theta) = 16$$

$$LS(E) = LF(E) - d(E) = 16 - 7 = 9$$

$$LF(\Delta) = \min \left\{ \begin{array}{l} LS(H) \\ LS(\Theta) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 16 \end{array} \right\} = 13$$

$$LS(\Delta) = LF(\Delta) - d(\Delta) = 13 - 7 = 6$$



$$LF(\Gamma) = LS(E) = 9$$

$$LS(\Gamma) = LF(\Gamma) - d(\Gamma) = 9 - 2 = 7$$

$$LF(B) = LS(\Delta) = 6$$

$$LS(B) = LF(B) - d(B) = 6 - 5 = 1$$

$$LF(A) = \min \left\{ \begin{array}{l} LS(\Delta) \\ LS(Z) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 10 \end{array} \right\} = 6$$

$$LS(A) = LF(A) - d(A) = 6 - 6 = 0$$

$$LF(APXH) = LS(APXH) = \min \{ LS(A), LS(B), LS(\Gamma) \} = 0$$

Χρονικά μεγέθη προγραμματισμού από κομβικό γράφημα

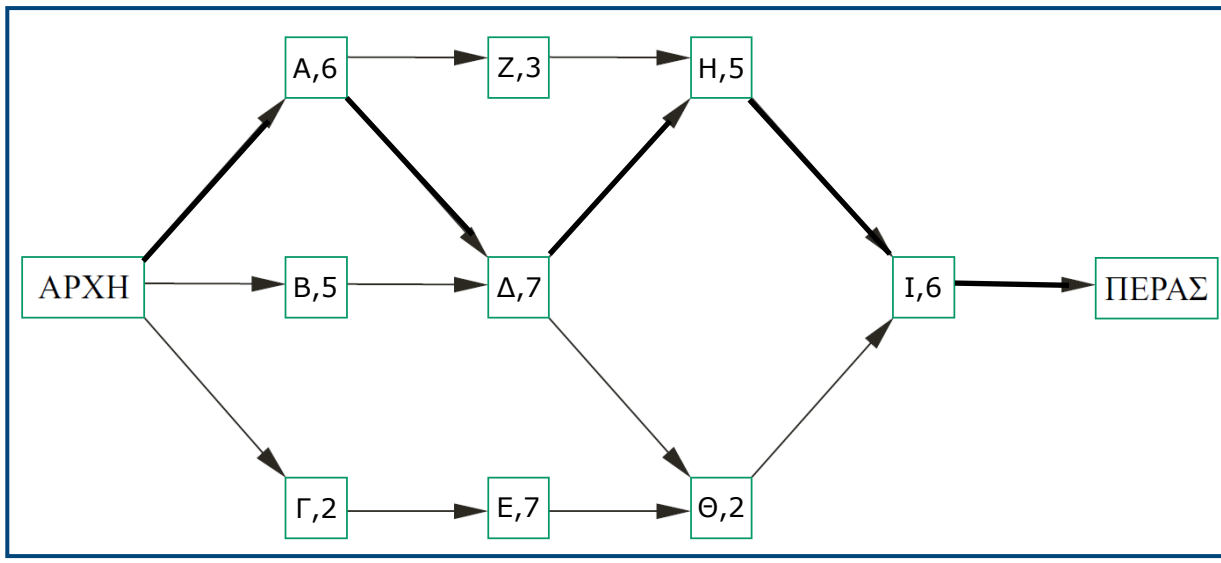
➤ **Κρίσιμη διαδρομή (critical path) από κομβικό γράφημα**

Η δραστηριότητα K βρίσκεται πάνω στην κρίσιμη διαδρομή όταν:

$$ES(K) = LS(K) \text{ ή ισοδύναμα μέσω των (6), (7) } \quad (8)$$

$$EF(K) = LF(K)$$

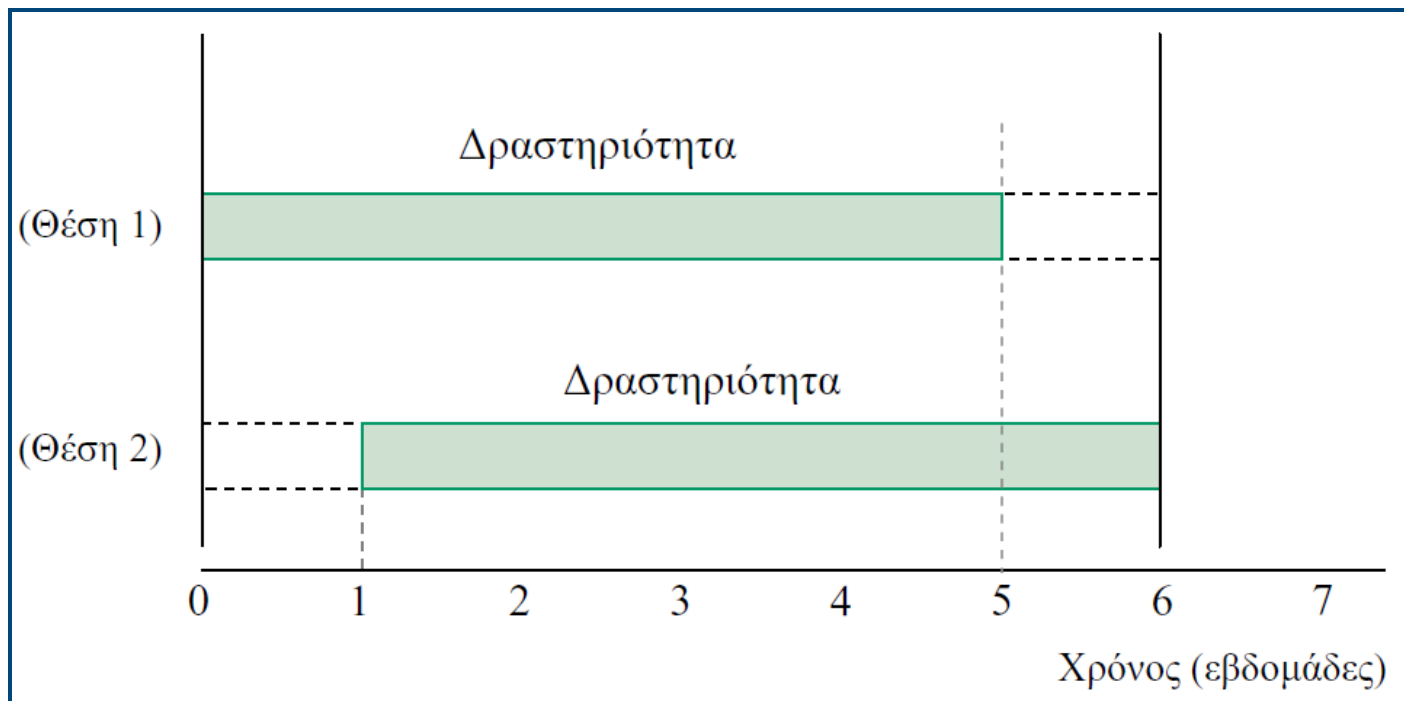
	<i>ES</i>	<i>EF</i>	<i>LS</i>	<i>LF</i>	<i>ΚΔ</i>
ΑΡΧΗ	0	0	0	0	
A	0	6	0	6	ΝΑΙ
B	0	5	1	6	
Γ	0	2	7	9	
Δ	6	13	6	13	ΝΑΙ
E	2	9	9	16	
Z	6	9	10	13	
H	13	18	13	18	ΝΑΙ
Θ	13	25	16	18	
I	18	24	18	24	ΝΑΙ
ΠΕΡΑΣ	24	24	24	24	



Κρίσιμη διαδρομή:
ΑΡΧΗ - Α - Δ - Η - Ι - ΠΕΡΑΣ

Χρονικά περιθώρια

- **Χρονικό περιθώριο:** Ο χρόνος που αντιστοιχεί στη δυνατότητα εναλλακτικών χρόνων έναρξης μιας εργασίας χωρίς να παραβιαστούν οι περιορισμοί ή να καθυστερήσει η ολοκλήρωση του έργου.



Χρονικά περιθώρια

Υπολογίζονται δύο ειδών χρονικά περιθώρια:

➤ **Ολικό χρονικό περιθώριο - *Total float (TF) or Total slack (TS)***

Το χρονικό εύρος μέσα στο οποίο μπορεί να εκτελεστεί μια εργασία χωρίς να προκληθεί καθυστέρηση του έργου.

Δηλαδή, είναι το μέγιστο χρονικό περιθώριο που μπορεί να έχει μια εργασία αν της διατεθούν και τα περιθώρια των επόμενων από αυτήν εργασιών στις διαδρομές που η συγκεκριμένη εργασία συμμετέχει.

Προκύπτει τοποθετώντας τη συγκεκριμένη εργασία στον ενωρίτερο χρόνο της και όλες τις (αμέσως) επόμενες εργασίες στο βραδύτερο χρόνο τους. Μαθηματικά υπολογίζεται από τη διαφορά του βραδύτερου χρόνου έναρξης (ή πέρατος) από τον ενωρίτερο χρόνο έναρξης (ή πέρατος) της συγκεκριμένης εργασίας δηλαδή για μια εργασία K :

$$TF(K) = LS(K) - ES(K) = LF(K) - EF(K)$$

Χρονικά περιθώρια

Υπολογίζονται δύο ειδών χρονικά περιθώρια:

➤ **Ελεύθερο χρονικό περιθώριο - *Free float (FF) or Free slack (FS)*:**

Η μέγιστη καθυστέρηση που μπορεί να έχει η δραστηριότητα χωρίς να επηρεάσει την έναρξη των επόμενων δραστηριοτήτων, και, προφανώς, τη συνολική διάρκεια του έργου.

Δηλαδή είναι το χρονικό περιθώριο που μπορεί να αξιοποιηθεί μόνο από τη συγκεκριμένη εργασία κι όχι από άλλη.

Προκύπτει τοποθετώντας τη συγκεκριμένη εργασία στον ενωρίτερο χρόνο της και όλες τις (αμέσως) επόμενες εργασίες επίσης στον ενωρίτερο χρόνο τους και αντιπροσωπεύει τη χρονική περίοδο που μπορεί να καθυστερήσει η συγκεκριμένη εργασία μέχρι να «ακουμπήσει» την κοντινότερη χρονικά σε αυτή αμέσως επόμενη της εργασία:

$$FF(K) = \min\{ES(j \in \mathcal{J})\} - EF(K)$$

όπου \mathcal{J} περιλαμβάνει όλες τις αμέσως επόμενες δραστηριότητες της K .

Χρονικά περιθώρια

Για όλες τις εργασίες σε κάθε περίπτωση ισχύει:

$$TF \geq FF \geq 0$$

Δραστηριότητες που ανήκουν στην κρίσιμη διαδρομή δεν έχουν δυνατότητα καθυστέρησης, και, συνεπώς, το χρονικό τους περιθώριο είναι μηδενικό.

Χρονικά περιθώρια (με βάση το κομβικό δίκτυο)

$$TF(A) = LF(A) - EF(A) = 6 - 6 = 0 \text{ (ανήκει στην Κ.Δ.)}$$

$$FF(A) = \min \left\{ \begin{matrix} ES(\Delta) \\ ES(Z) \end{matrix} \right\} - EF(A) = \min \left\{ \begin{matrix} 6 \\ 6 \end{matrix} \right\} - 6 = 0$$

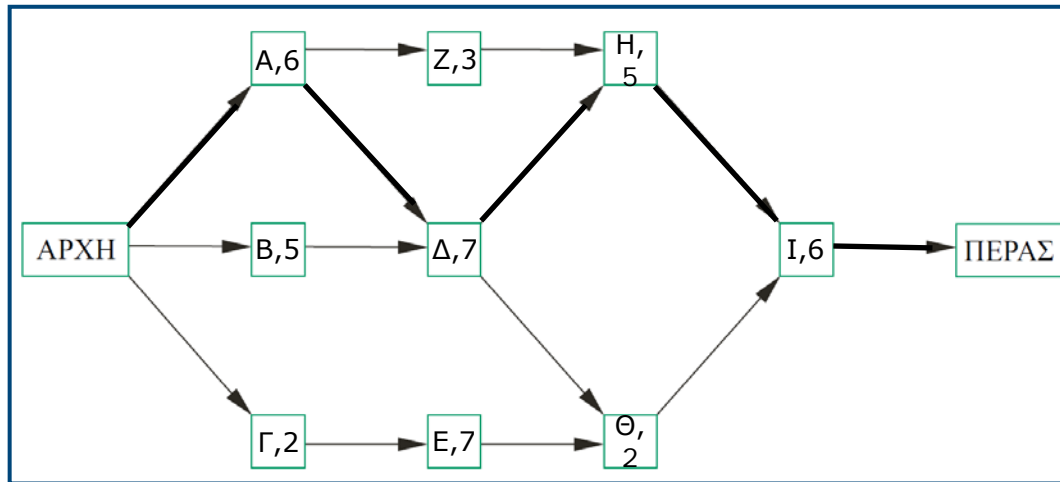
$$TF(\Gamma) = LF(\Gamma) - EF(\Gamma) = 9 - 2 = 7$$

$$FF(\Gamma) = ES(E) - EF(\Gamma) = 2 - 2 = 0$$

$$TF(E) = LF(E) - EF(E) = 16 - 9 = 7$$

$$FF(E) = ES(\Theta) - EF(E) = 13 - 9 = 4$$

	Διάρ.	ES	EF	LS	LF	ΚΔ
ΑΡΧΗ		0	0	0	0	
A	6	0	6	0	6	ΝΑΙ
B	5	0	5	1	6	
Γ	2	0	2	7	9	
Δ	7	6	13	6	13	ΝΑΙ
E	7	2	9	9	16	
Z	3	6	9	10	13	
H	5	13	18	13	18	ΝΑΙ
Θ	2	13	25	16	18	
I	6	18	24	18	24	ΝΑΙ
ΠΕΡΑΣ		24	24	24	24	



Διάγραμμα Gantt

Δικτυωτά γραφήματα:

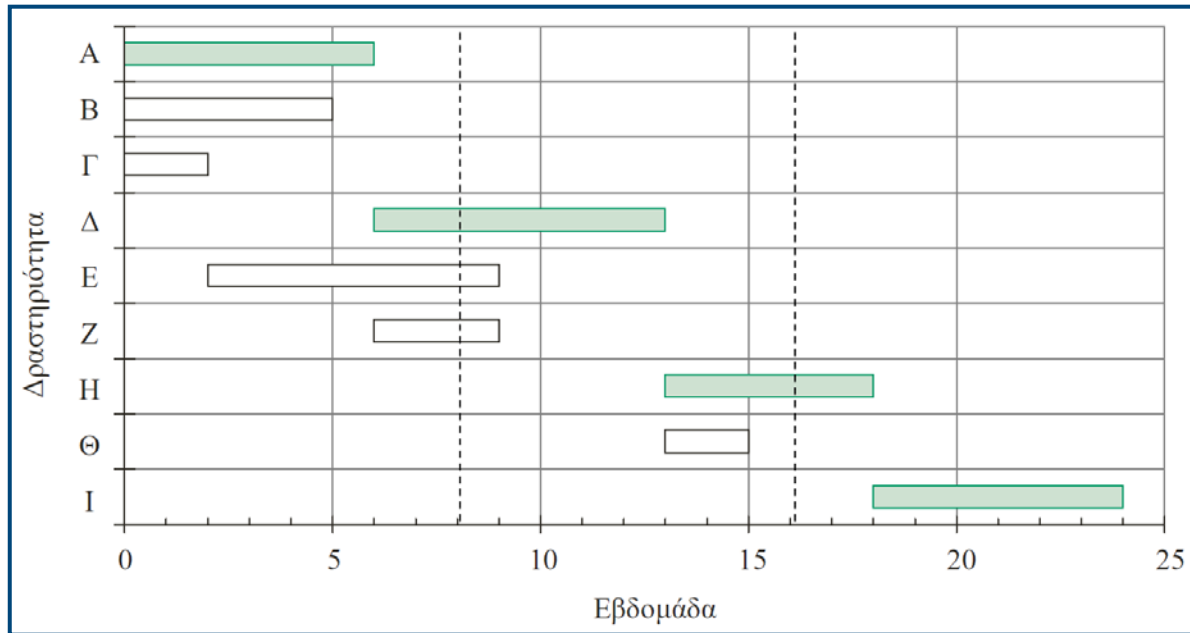
- **Πλεονέκτημα:** Εποπτική παρουσίαση ροής εργασιών που διευκολύνει τον υπολογισμό των μεγεθών του χρονικού προγραμματισμού των δραστηριοτήτων και του έργου.
- **Μειονέκτημα:** Όχι κατάλληλη εποπτική παρουσίαση του χρονοδιαγράμματος του έργου αφού δεν παρέχει άμεση γεωμετρική εποπτεία των διαρκειών των δραστηριοτήτων και των περιθωρίων τους.

Διάγραμμα Gantt (ή ευθύγραμμο γράφημα):

Έχει χρονικά αναλογική μορφή, ο οριζόντιος άξονας αντιπροσωπεύει το χρόνο, και κάθε δραστηριότητα του έργου σχεδιάζεται ως οριζόντιο τμήμα με αρχή τον προγραμματισμένο χρόνο έναρξης και μήκος ίσο με τη διάρκειά της.

- Ιδανικό για την εποπτική παρουσίαση του χρονικού προγραμματισμού του έργου.
- Στο διάγραμμα μπορούν να καταχωρηθούν κι άλλες πληροφορίες προγραμματισμένων υποχρεώσεων του αναδόχου του έργου, πχ, η παραγγελία υλικών, η συνάντηση με τον υπεύθυνο έργου, η ολοκλήρωση μιας φάσης, κα.
- Αποτελεί βασικό εργαλείο για τον προγραμματισμό της διάθεσης των μέσων παραγωγής, αλλά και για τη βελτιστοποίηση των παραμέτρων κόστους – διάρκειας έργου.
- Συμπερασματικά, το διάγραμμα Gantt συμπληρώνει τις ελλείψεις και τα μειονεκτήματα των δικτυωτών γραφημάτων και για το λόγο αυτό, στο χρονικό και οικονομικό προγραμματισμό έργων γίνεται παράλληλη χρήση των δύο μεθόδων απεικόνισης της ροής εκτέλεσης του έργου.

Διάγραμμα Gantt

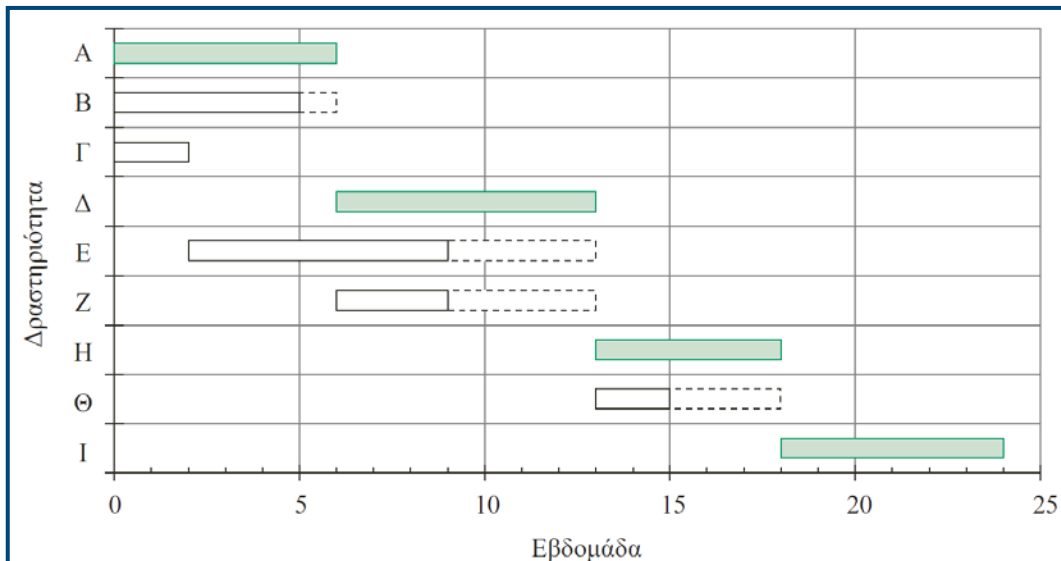


	Διάρ.	ES	EF	LS	LF	TF	FF	ΚΔ
ΑΡΧΗ		0	0	0	0			
A	6	0	6	0	6	0	0	ΝΑΙ
B	5	0	5	1	6	1	1	
Γ	2	0	2	7	9	7	0	
Δ	7	6	13	6	13	0	0	ΝΑΙ
E	7	2	9	9	16	7	4	
Z	3	6	9	10	13	4	4	
H	5	13	18	13	18	0	0	ΝΑΙ
Θ	2	13	25	16	18	3	3	
I	6	18	24	18	24	0	0	ΝΑΙ
ΠΕΡΑΣ		24	24	24	24			

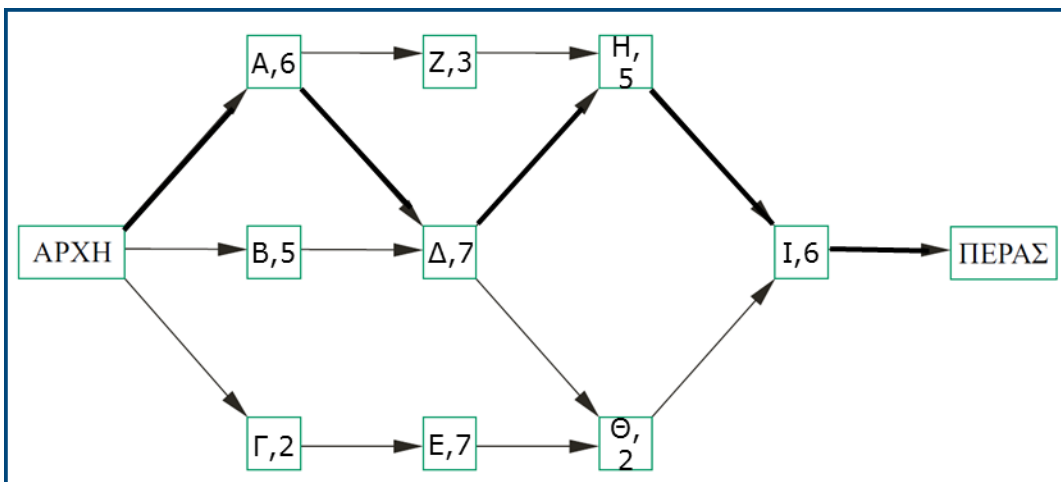
- Όλες οι δραστηριότητες αρχίζουν στον ενωρίτερο χρόνο έναρξης *ES*.
- Οι κρίσιμες δραστηριότητες διακρίνονται από τις μη κρίσιμες, με διαφορετικό χρώμα (πράσινο).
- Οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν ποιες εργασίες εκτελούνται μια συγκεκριμένη στιγμή. Πχ, στο τέλος της 8ης εβδομάδας πρέπει να έχουν τελειώσει οι εργασίες A, B και Γ και να εκτελούνται οι Δ, E και Z.

Διάγραμμα Gantt

Απεικόνιση των ελεύθερων περιθωρίων των δραστηριοτήτων

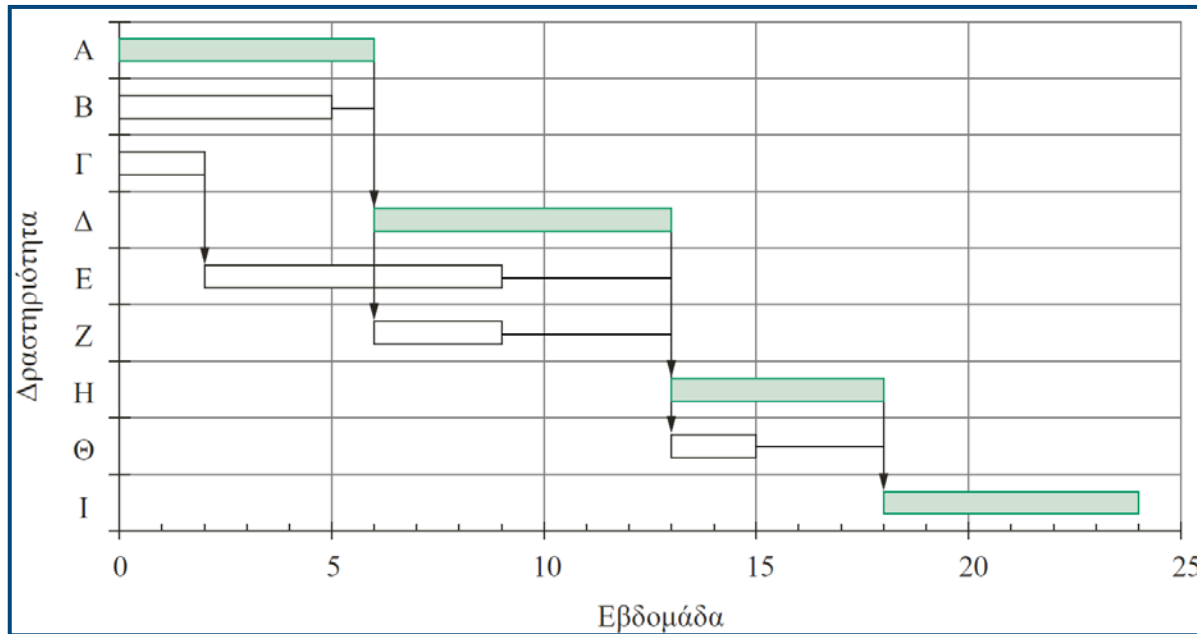


	Διάρ.	ES	EF	LS	LF	TF	FF	ΚΔ
ΑΡΧΗ		0	0	0	0			
A	6	0	6	0	6	0	0	ΝΑΙ
B	5	0	5	1	6	1	1	
Γ	2	0	2	7	9	7	0	
Δ	7	6	13	6	13	0	0	ΝΑΙ
E	7	2	9	9	16	7	4	
Z	3	6	9	10	13	4	4	
H	5	13	18	13	18	0	0	ΝΑΙ
Θ	2	13	25	16	18	3	3	
I	6	18	24	18	24	0	0	ΝΑΙ
ΠΕΡΑΣ		24	24	24	24			



Διάγραμμα Gantt

Απεικόνιση των σχέσεων αλληλεξάρτησης των δραστηριοτήτων



	Διάρ.	Αλληλουχία
A	6	A < Δ,Z
B	5	B < Δ
Γ	2	Γ < E
Δ	7	Δ < H,Θ
E	7	E < Θ
Z	3	Z < H
H	5	H < I
Θ	2	Θ < I
I	6	I < -

Μειονέκτημα του διαγράμματος Gantt είναι ότι έχει περιορισμένη δυνατότητα απεικόνισης των σχέσεων αλληλουχίας μεταξύ των δραστηριοτήτων. Πχ, στο διάγραμμα δεν είναι εμφανές ποια (ή ποιες) από τις Δ, E και Z συνδέονται με τη δραστηριότητα H και ποια (ή ποιες) με τη Θ.

Επακόλουθο του παραπάνω μειονεκτήματος είναι ότι δεν μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των χρονικών μεγεθών του προγραμματισμού

Το μειονέκτημα αυτό γίνεται περισσότερο εμφανές σε μεγάλα έργα, με πολλές εργασίες.

Πρόβλημα 2

Οι περιορισμοί διαδοχής και οι διάρκειες των δραστηριοτήτων ενός έργου φαίνονται στον πίνακα.

Δραστηριότητα	Διάρκεια (ημέρες)	Αμέσως προηγούμενη
A	3	-
B	6	A
Γ	4	A
Δ	2	B, Γ
E	5	B
Z	7	Γ
H	2	Δ, E

- (α) Σχεδιάστε το τοξωτό δικτυωτό γράφημα του έργου (περιλαμβάνει δύο πλασματικές δραστηριότητες).
- (β) Σχεδιάστε το κομβικό δικτυωτό γράφημα.
- (γ) Υπολογίστε τα μεγέθη του χρονικού προγραμματισμού (ενωρίτερη-βραδύτερη έναρξη και πέρας κάθε δραστηριότητας, ολικό και ελεύθερο περιθώριο των δραστηριοτήτων, κρίσιμη διαδρομή)
- (δ) Σχεδιάστε το διάγραμμα Gantt για τις ενωρίτερες ενάρξεις των δραστηριοτήτων δείχνοντας παράλληλα τις επιτρεπόμενες χρονικές μετατοπίσεις των δραστηριοτήτων χωρίς να αυξηθεί η διάρκεια του έργου.

Στοχαστική ανάλυση χρόνων – Μέθοδος Pert

Η μέθοδος PERT είναι μια στοχαστική προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων χρονικού προγραμματισμού που παρέχει τη δυνατότητα να υπολογιστεί:

- η πιθανότητα να ολοκληρωθεί ένα έργο σε δεδομένο χρόνο
- η απαιτούμενη διάρκεια ώστε να ολοκληρωθεί ένα έργο με συγκεκριμένη πιθανότητα, πχ 90%.

Αναπτύχθηκε ως αποτέλεσμα των δυσκολιών στην ακριβή εκτίμηση των διαρκειών των δραστηριοτήτων που παρατηρούνται στην πράξη, οι οποίες συνήθως οφείλονται:

- Στην ανυπαρξία σχετικής εμπειρίας όσον αφορά στην εκτέλεση ορισμένων εργασιών ή/και
- σε σημαντική διακύμανση της διάρκειας ανάλογα με τις υπάρχουσες συνθήκες εκτέλεσης.

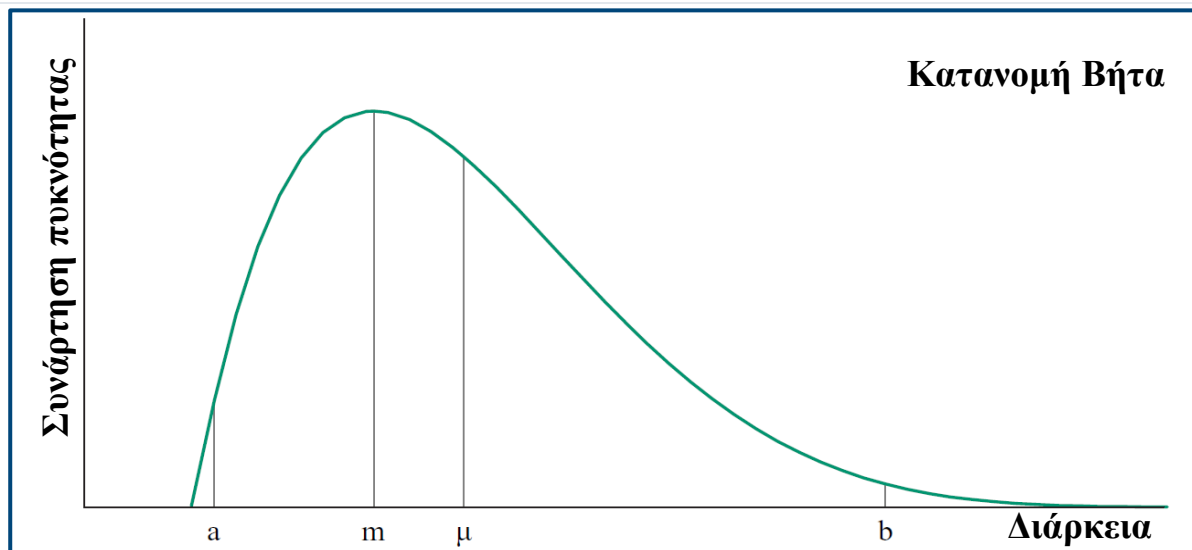
Αν μια συγκεκριμένη εργασία επαναληφθεί πολλές φορές, η διάρκεια της, λόγω αλλαγής των συνθηκών που την επηρεάζουν, δεν θα είναι μια σταθερή τιμή, αλλά μια κατανομή χρόνων.

Έχει παρατηρηθεί ότι η κατανομή των χρόνων διάρκειας μιας εργασίας που επαναλαμβάνεται μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από την **κατανομή Βήτα**.

Στοχαστική ανάλυση χρόνων – Μέθοδος Pert

Σύμφωνα με τη μέθοδο PERT η διάρκεια μιας εργασίας ακολουθεί κατανομή Βήτα μέσης τιμής μ και τυπικής απόκλισης σ . Για να προσδιορισθούν οι τιμές των μ και σ της κατανομής απαιτούνται οι κάτωθι τρεις χρόνοι:

- η **αισιόδοξη διάρκεια** a , η οποία αντιστοιχεί στις πλέον ευνοϊκές συνθήκες εκτέλεσης και ισούται με την ελάχιστη δυνατή διάρκεια που έχει παρατηρηθεί, πχ αυτή που εμφανίζεται μια φορά στις 100 παρατηρήσεις,
- η **απαισιόδοξη διάρκεια** b , η οποία αντιστοιχεί στις πλέον δυσμενείς συνθήκες εκτέλεσης και ισούται με τη μέγιστη διάρκεια που έχει παρατηρηθεί, πχ αυτή που εμφανίζεται μια φορά στις 100 παρατηρήσεις και
- η **πιθανότερη διάρκεια** m , η οποία αντιστοιχεί σε κανονικές συνθήκες εκτέλεσης και ισούται με τη διάρκεια που έχει παρατηρηθεί τις περισσότερες φορές.



Στοχαστική ανάλυση χρόνων – Μέθοδος Pert

Η μέση τιμή μ_i και η τυπική απόκλιση σ_i μιας εργασίας i , δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mu_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6} \quad (11)$$

$$\sigma_i = \frac{b_i - a_i}{6} \quad (12)$$

όπου a_i , m_i και b_i η αισιόδοξη, η πιθανότερη και η απαισιόδοξη διάρκεια, αντίστοιχα της εργασίας i .

Έστω ότι ένα έργο έχει μια κρίσιμη διαδρομή, υπολογισμένη με τις μέσες τιμές μ_i , η οποία αποτελείται από N εργασίες. Θεωρώντας ότι οι διάρκειες d_i (όπου $i=1,2,N$) των εργασιών ακολουθούν κατανομή Βήτα, οι τιμές μ_i και σ_i όλων των N εργασιών προσδιορίζονται από τις (11) και (12), αντίστοιχα.

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, παρόλο που οι διάρκειες d_i ακολουθούν κατανομή Βήτα, η συνολική διάρκεια του έργου d ακολουθεί **κανονική κατανομή** με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ , που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_N \quad (13)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_N^2} \quad (14)$$

**Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα προβλέπει ότι το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων στατιστικών παραμέτρων ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή, ανεξαρτήτως από το ποια κατανομή ακολουθούν οι επιμέρους παράμετροι.*

Στοχαστική ανάλυση χρόνων – Μέθοδος Pert

Η πιθανότητα P να ολοκληρωθεί το έργο σε χρόνο μικρότερο ή ίσο μιας δεδομένης τιμής τ προκύπτει από τη σχέση:

$$P(d \leq \tau) = P\left(\frac{d - \mu}{\sigma} \leq \frac{\tau - \mu}{\sigma}\right) = P\left(z \leq \frac{\tau - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\tau - \mu}{\sigma}\right) \quad (15)$$

όπου $z = \frac{d - \mu}{\sigma}$ μια αδιάστατη μεταβλητή η οποία ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή ($\mu=0$, $\sigma=1$) και $\Phi\left(\frac{\tau - \mu}{\sigma}\right)$ το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας της τυποποιημένη κανονικής κατανομής από το $-\infty$ έως την τιμή $x = \frac{\tau - \mu}{\sigma}$ και ισούται με τη ζητούμενη πιθανότητα $P(d \leq \tau)$.

Το εμβαδό $\Phi(x)$ δίνεται από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής διατομής στις επόμενες σελίδες (με ακρίβεια 2^{ου} δεκαδικού ψηφίου στην μεταβλητή x).

Χρήσιμες ιδιότητες τυποποιημένης κανονικής κατανομής

Για $a \geq 0$ και $b \geq 0$ ισχύει:

$$P(z > a) = 1 - P(z \leq a) = 1 - \Phi(a)$$

$$P(a \leq z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (16)$$

$$P(z \leq -a) = \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

$$P(-a \leq z \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1$$

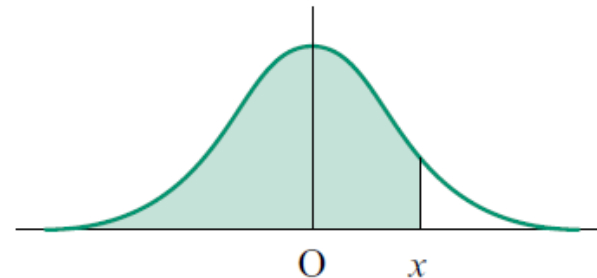
Στοχαστική ανάλυση χρόνων – Μέθοδος Pert

Πίνακας τιμών της κανονικής κατανομής

Εμβαδό της Κανονικής Καμπύλης

από $-\infty$ έως x

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319

Στοχαστική ανάλυση χρόνων – Μέθοδος Pert

Συνέχεια πίνακα προηγούμενης διαφάνειας

1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Online tool

http://onlinestatbook.com/2/calculators/normal_dist.html

Συναρτήσεις excel

NORM.DIST(x,mean,standard dev,cumulative)

NORM.S.DIST(z)

Πρόβλημα 3

Μια πιο αναλυτική εκτίμηση των διαρκειών του έργου του προβλήματος 2 δίνεται στον πίνακα. Ειδικότερα, οι διάρκειες των δραστηριοτήτων του έργου δίνονται μέσω τριών τιμών, της αισιόδοξης (a), της πιθανότερης (m) και της απαισιόδοξης διάρκειας (b). Οι «πιθανότερες» τιμές των διαρκειών του παρακάτω πίνακα είναι οι ίδιες με τις τιμές των διαρκειών του προβλήματος 2.

Δραστηριότητα	Αμέσως προηγούμενη	Διάρκεια (ημέρες)		
		a	m	b
A	-	2	3	4
B	A	4	6	8
Γ	A	1	4	7
Δ	B, Γ	1	2	9
E	B	3	5	7
Z	Γ	4	7	10
H	Δ, E	1	2	9

(α) Να υπολογιστεί για κάθε δραστηριότητα η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της διάρκειας της.

(β) Να υπολογιστούν τα μεγέθη του χρονικού προγραμματισμού, με βάση τη μέση τιμή της διάρκειας κάθε δραστηριότητας.

(γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα που αντιστοιχεί σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Το έργο να τελειώσει σε 18 ημέρες ή λιγότερο
- Το έργο να τελειώσει σε 15 ημέρες ή λιγότερο.
- Το έργο να τελειώσει σε περισσότερο από 18 ημέρες.

(δ) Να υπολογιστεί η απαιτούμενη διάρκεια ολοκλήρωσης του έργου που αντιστοιχεί σε πιθανότητα 80%.

Σύνθετες σχέσεις αλληλουχίας εργασιών

Στα τεχνικά έργα συχνά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σύνθετους περιορισμούς διαδοχής. Για παράδειγμα, οι εργασίες για την τοποθέτηση αγωγών αποχέτευσης κατά μήκος ενός δρόμου είναι:

- Εκσκαφή του δρόμου,
- Τοποθέτηση των αγωγών και
- Κάλυψη των αγωγών,

Για τη μείωση του συνολικού χρόνου περάτωσης του έργου, είναι εφικτό (και επιθυμητό) να εκτελεστούν οι εργασίες εν μέρει παράλληλα.

Δηλαδή, με την πρόοδο της εκσκαφής σε ένα αρχικό μήκος, αρχίζει η τοποθέτηση των αγωγών στο τμήμα αυτό, ενώ παράλληλα προχωράει η εκσκαφή στο επόμενο τμήμα. Όμοια, η κάλυψη του αγωγού ξεκινάει στο αρχικό τμήμα, όταν η τοποθέτηση των αγωγών έχει προχωρήσει επαρκώς. Έτσι, είναι δυνατό να εκτελούνται και οι τρεις εργασίες ταυτόχρονα σε διαφορετικό τμήμα η κάθε μία.

Η δυνατότητα να προγραμματιστούν εξαρτώμενες εργασίες, ώστε να εκτελούνται εν μέρει παράλληλα, όπου αυτό είναι τεχνικά εφικτό, παρέχεται με τη χρησιμοποίηση των **χρόνων προπόρευσης** (lead time) και **υστέρησης** (lag time).

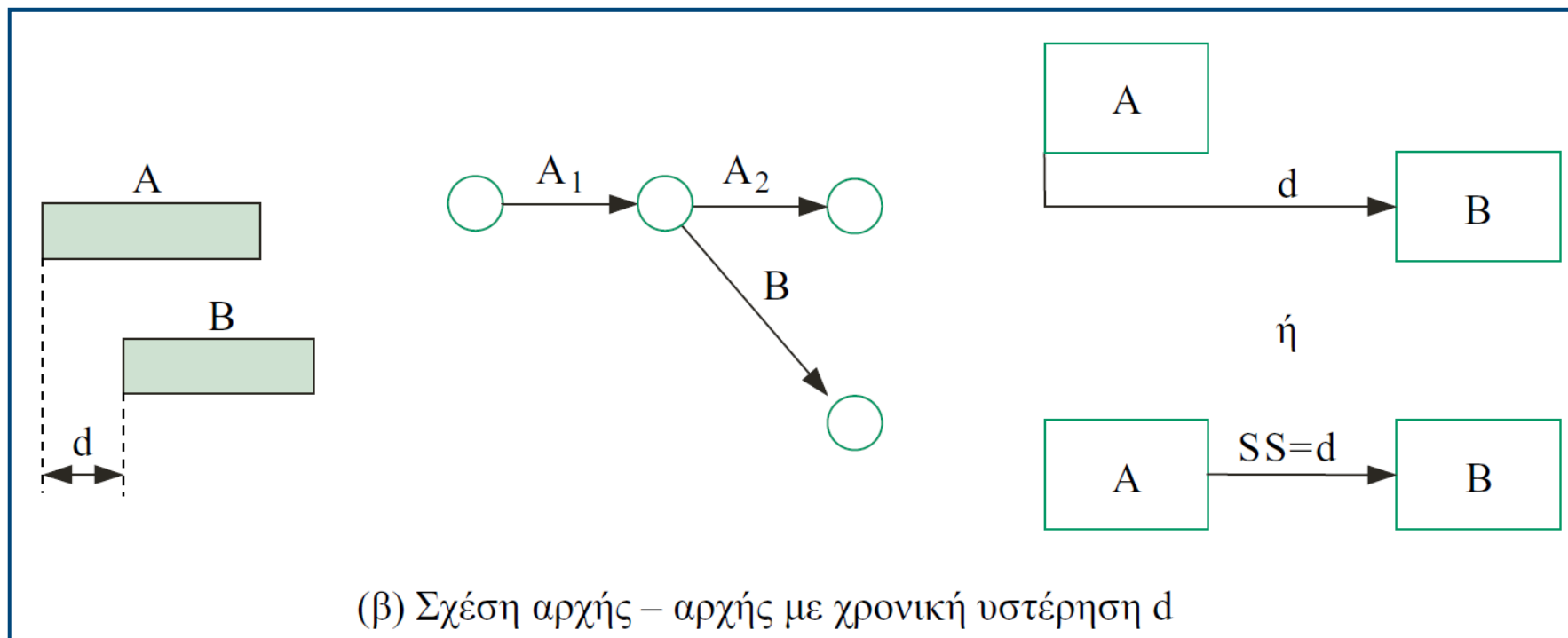
Σύνθετες σχέσεις αλληλουχίας εργασιών

Απεικόνιση σύνθετων σχέσεων αλληλουχίας

Σχέση διαδοχής

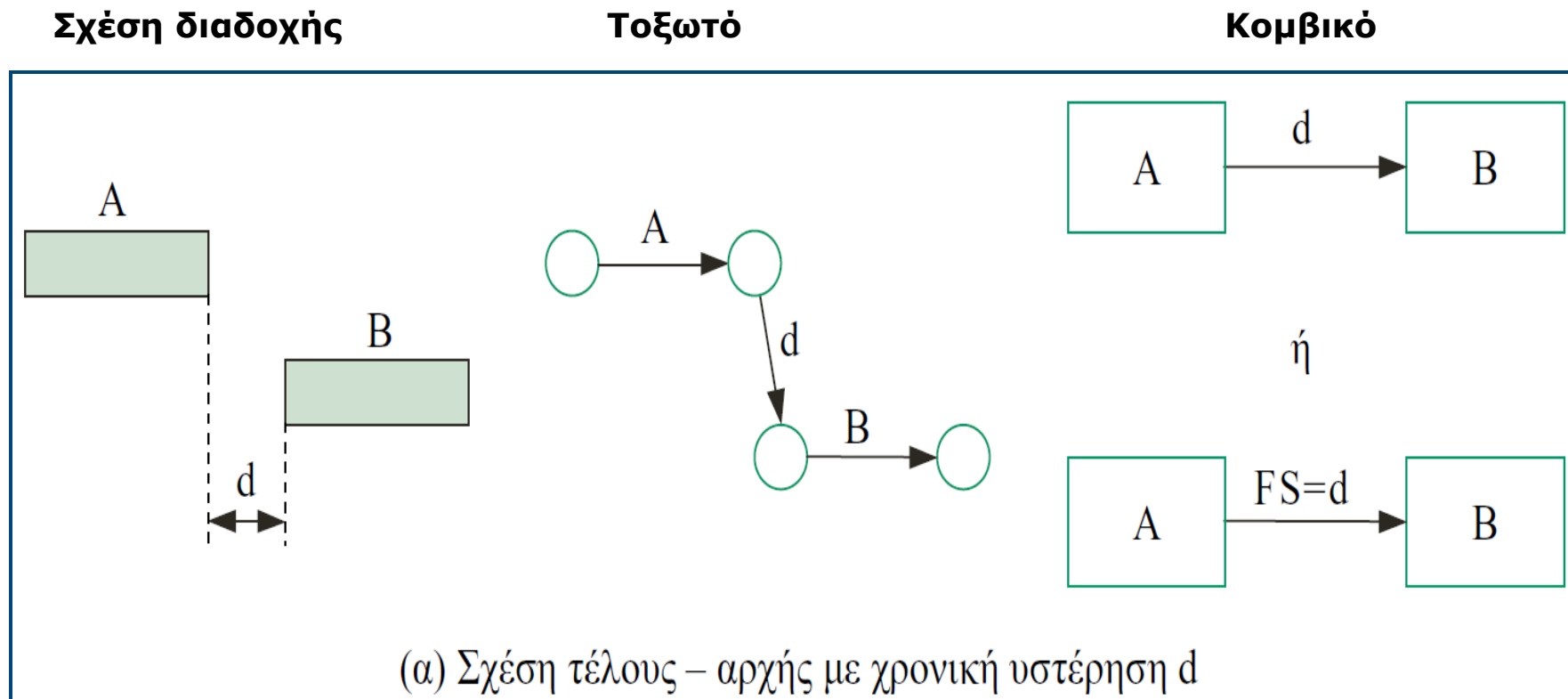
Τοξωτό

Κομβικό



Σύνθετες σχέσεις αλληλουχίας εργασιών

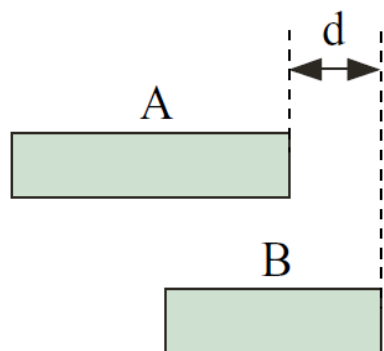
Απεικόνιση άλλων σύνθετων σχέσεων αλληλουχίας



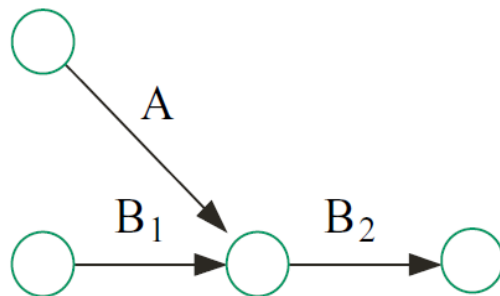
Σύνθετες σχέσεις αλληλουχίας εργασιών

Απεικόνιση άλλων σύνθετων σχέσεων αλληλουχίας

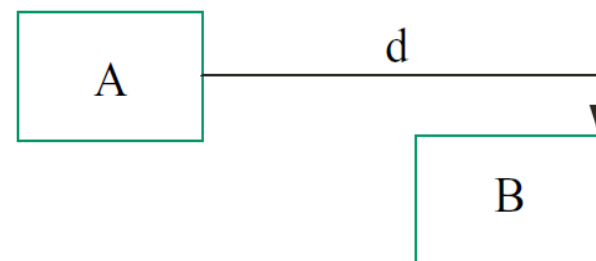
Σχέση διαδοχής



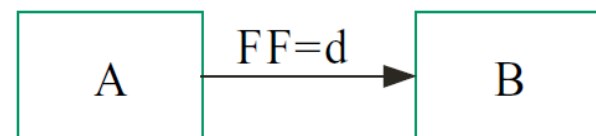
Τοξωτό



Κομβικό

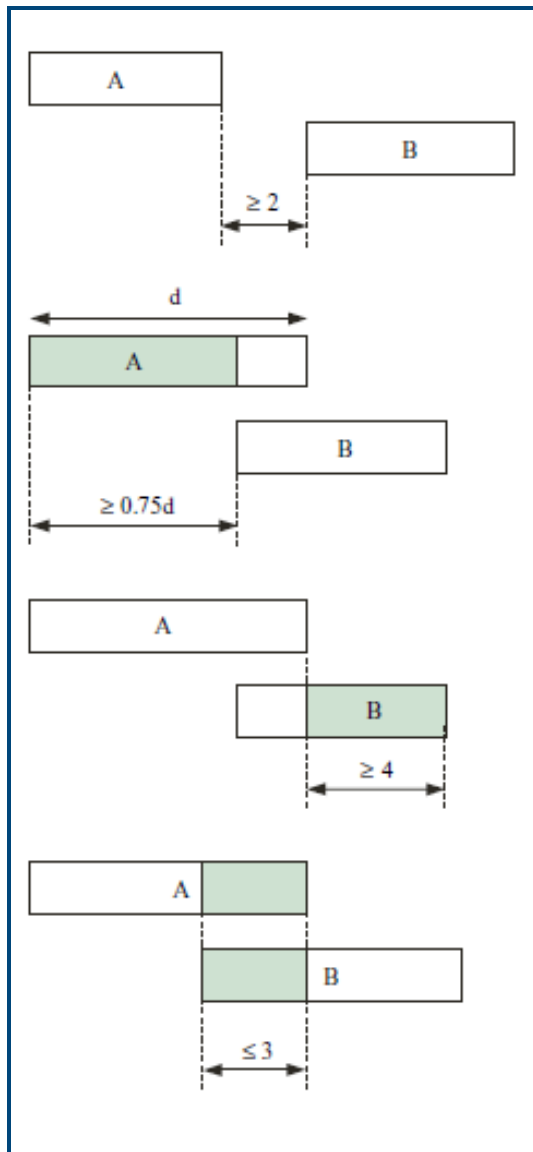


ή



(γ) Σχέση τέλους –τέλους με χρονική υστέρηση d

Κωδικοποίηση σύνθετων σχέσεων αλληλουχίας



Σχέση τέλους-αρχής με χρονική υστέρηση.

Η εργασία B δεν μπορεί να αρχίσει πριν περάσουν τουλάχιστον δύο ημέρες μετά το πέρας της εργασίας A.

Σχέση αρχής-αρχής με χρονική υστέρηση.

Η εργασία B μπορεί να αρχίσει αφότου έχει ολοκληρωθεί η εργασία A σε ποσοστό 75%.

Σχέση τέλους-τέλους με χρονική υστέρηση.

Η εργασία B πρέπει να ολοκληρωθεί τουλάχιστον 4 ημέρες αφού έχει ολοκληρωθεί η εργασία A.

Σχέση τέλους-αρχής με χρονική επικάλυψη.

Η εργασία B μπορεί να αρχίσει το νωρίτερο 3 ημέρες πριν ολοκληρωθεί η εργασία A.

Υπολογισμοί χρονικού προγραμματισμού

➤ Η ύπαρξη σύνθετων (γενικευμένων) σχέσεων διαδοχής μεταξύ των εργασιών επηρεάζει τον τρόπο (μαθηματικές σχέσεις) υπολογισμού των μεγεθών του χρονικού προγραμματισμού, οι οποίες μαθηματικές σχέσεις προσαρμόζονται στην εκάστοτε σχέση διαδοχής. Για παράδειγμα, τα χρονικά περιθώρια υπολογίζονται ως ακολούθως:

➤ Ολικό περιθώριο της δραστηριότητας i (ισχύει για οποιαδήποτε σχέση διαδοχής):

$$TF(i) = EF(i) - ES(i) = LF(i) - EF(i).$$

➤ Ελεύθερο περιθώριο της δραστηριότητας i : Εξετάζεται κατά περίπτωση και ξεχωριστά για κάθε αμέσως επόμενη εργασία. Από τα επιμέρους ελεύθερα περιθώρια, επιλέγεται τελικά το ελάχιστο.

Παράδειγμα: Έστω η εργασία A ακολουθείται από τη B με σχέση διαδοχής $FS-1$, από τη Γ με σχέση διαδοχής $SS+2$ κι από τη Δ με σχέση διαδοχής FF .

Το ελεύθερο περιθώριο της A είναι:

- ως προς τη B : $FF_1 = ES(B) - EF(A) + 1$, (σχέση διαδοχής $FS-1$)

- ως προς τη Γ : $FF_2 = ES(\Gamma) - ES(A) - 2$, (σχέση διαδοχής $SS+2$)

- ως προς τη Δ : $FF_3 = EF(\Delta) - EF(A)$, (σχέση διαδοχής FF)

- και συνολικά : $FF(A) = \min\{FF_1, FF_2, FF_3\}$.

Πρόβλημα 4

Να υπολογιστούν τα μεγέθη του χρονικού προγραμματισμού του έργου του προβλήματος 2:

- ενωρίτερη-βραδύτερη έναρξη και πέρας κάθε δραστηριότητας,
- ολικό και ελεύθερο περιθώριο των δραστηριοτήτων,
- κρίσιμη διαδρομή,

λαμβάνοντας υπόψη τις σύνθετες σχέσεις διαδοχής που δίνονται στον πίνακα.

Δραστηριότητα	Εξαρτάται από	Διάρκεια (ημέρες)
A	-	3
B	A	6
Γ	A	4
Δ	B(fs-1), Γ(ss+3)	2
E	B	5
Z	Γ (fs+4)	7
H	Δ (ff+1), E	2

Υπόδειξη: Όπου δεν αναφέρεται ειδική σχέση διαδοχής, εννοείται διαδοχή της μορφής fs.

Τέλος παρουσίασης