

## Προγραμματισμός έργων με σύνθετες σχέσεις διαδοχής εργασιών

### Τύποι συσχετίσεων εργασιών

Το βασικό πρόβλημα προγραμματισμού έργων θεωρεί την τυπική (και απλούστερη) μορφή διαδοχής (αλληλεξάρτησης) εργασιών στην οποία η επόμενη εργασία (successor task) ξεκινάει όταν έχει περατωθεί η αμέσως προηγούμενη (predecessor task). Με τον όρο “επόμενη” δεν αναφερόμαστε υποχρεωτικά στην χρονική έννοια του όρου αλλά κυρίως στην έννοια της εξάρτησης της επόμενης από την προηγούμενη. Στην ανάλυση τεχνικών έργων, οι συσχετίσεις των εργασιών μπορούν να λάβουν κι άλλες μορφές. Οι βασικοί τύποι συσχετίσεων που μπορούν να εμφανιστούν είναι:

**Σχέση τέλους-αρχής** (Finish to Start relationship ή **FS**) : η επόμενη εργασία αρχίζει μόλις τελειώσει η προηγούμενη. Για παράδειγμα, η θεμελίωση μιας μικρής κατοικίας αρχίζει όταν τελειώσει η εκσκαφή.

**Σχέση τέλους-τέλους** (Finish to Finish relationship ή **FF**) : η επόμενη εργασία τελειώνει με το τέλος της προηγούμενης. Παράδειγμα τέτοιας συσχέτισης αποτελούν οι εργασίες μεταφοράς χωματισμών και διάστρωσης τους για τη δημιουργία επιχώματος ενός δρόμου.

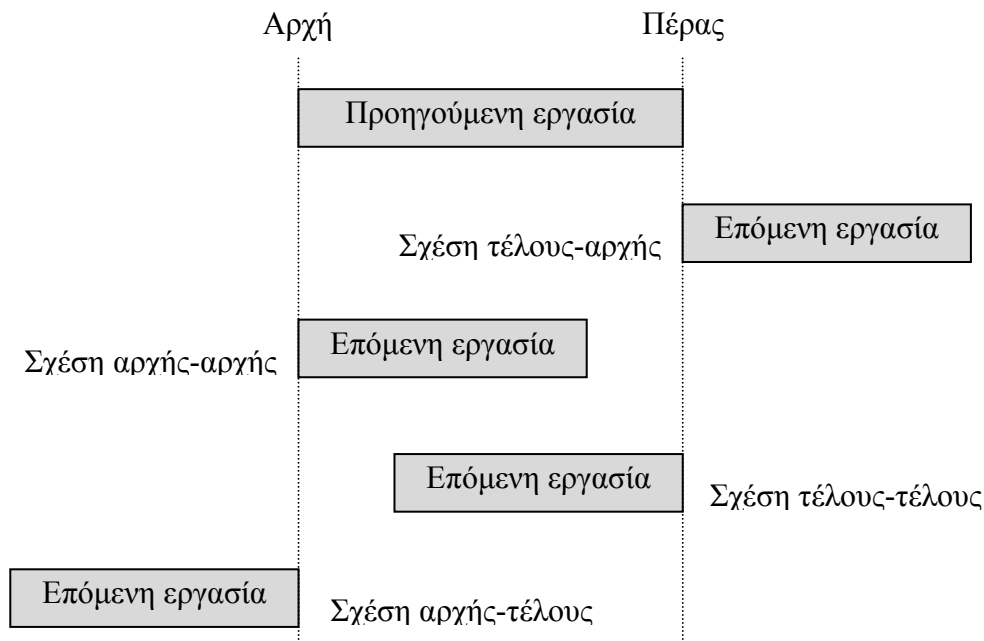
**Σχέση αρχής-αρχής** (Start to Start relationship ή **SS**) : η επόμενη εργασία αρχίζει ταυτόχρονα με την προηγούμενη. Για παράδειγμα, ο καθαρισμός του χώρου ενός εργοταξίου μπορεί να αρχίσει ταυτόχρονα με τη διαδικασία μεταφοράς μηχανημάτων στο εργοτάξιο.

**Σχέση αρχής-τέλους** (Start to Finish relationship ή **SF**) : το τέλος της επόμενης εργασίας εξαρτάται από την έναρξη της προηγούμενης. Δεν είναι συνηθισμένη σχέση στην απλή μορφή της αλλά χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με χρόνο υστέρησης που εξηγείται παρακάτω.

Στο Σχήμα 1 φαίνονται οι παραπάνω τύποι συσχετίσεων. Ο (νοητός) οριζόντιος άξονας αντιπροσωπεύει το χρόνο. Η εργασία φαίνεται ως ένα οριζόντιο τμήμα με μήκος όσο η διάρκεια της, τα δε άκρα του καθορίζουν τα χρονικά σημεία έναρξης και πέρατός της. Η “επόμενη εργασία” τοποθετείται σε διάφορες θέσεις σε σχέση με την “προηγούμενη εργασία” για να καταδείξει τους εναλλακτικούς τύπους συσχέτισης.

Σε τεχνικά έργα είναι πολύ συνηθισμένο να έχουμε περιορισμούς διαδοχής πιο σύνθετους από αυτούς που περιγράφηκαν παραπάνω. Για παράδειγμα, η τοποθέτηση αγωγών αποχέτευσης κατά μήκος ενός δρόμου απαιτεί την

- εκσκαφή του δρόμου,
- τοποθέτηση των αγωγών, και
- κάλυψη των αγωγών.

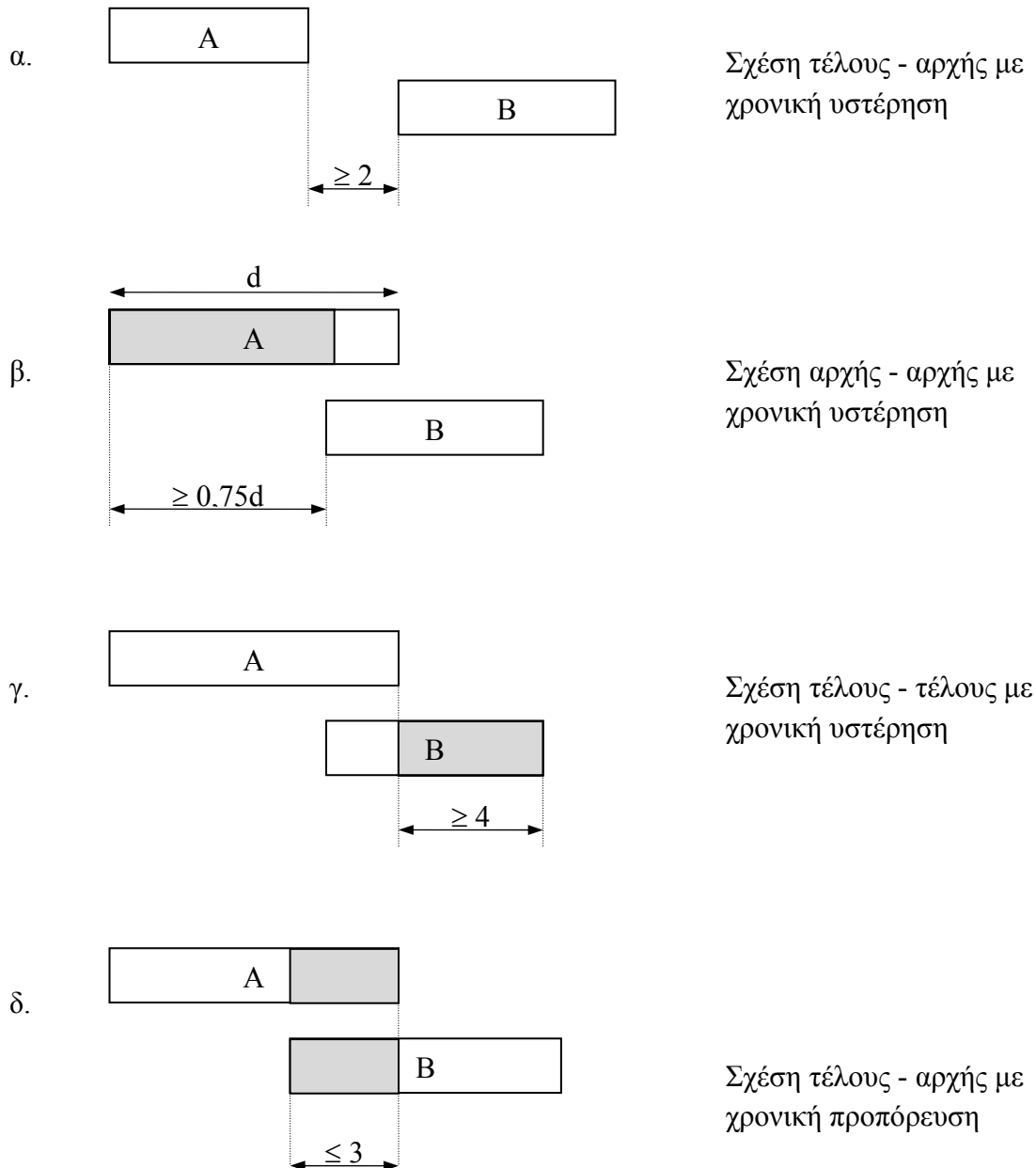


**Σχήμα 1** Οι βασικοί τύποι συσχετίσεων εργασιών

Οι τρεις αυτές εργασίες, αν και η λογική σχέση διαδοχής είναι σειριακή, δεν είναι απαραίτητο να γίνουν σειριακά αλλά, τουλάχιστον εν μέρει, παράλληλα. Αυτό πρακτικά μπορεί να γίνει αν, με την πρόοδο της εκσκαφής σε ένα αρχικό μήκος, αρχίσει η τοποθέτηση των αγωγών στο τμήμα αυτό ενώ παράλληλα προχωράει η εκσκαφή στο επόμενο τμήμα. Με παρόμοιο τρόπο, η κάλυψη του αγωγού μπορεί να ξεκινήσει στο αρχικό τμήμα όταν η τοποθέτηση των αγωγών έχει προχωρήσει επαρκώς. Έτσι, είναι δυνατό να εκτελούνται και οι τρεις εργασίες ταυτόχρονα σε διαφορετικό τμήμα η κάθε μια με σκοπό τη μείωση του συνολικού χρόνου του έργου.

Η δυνατότητα να προγραμματίσουμε εξαρτώμενες εργασίες ώστε να εκτελούνται εν μέρει παράλληλα, όπου αυτό είναι τεχνικά εφικτό, παρέχεται με τη χρησιμοποίηση των **χρόνων προπόρευσης** (lead time) και **υστέρησης** (lag time). Στο Σχήμα 2 φαίνονται μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις συσχετίσεων εργασιών οι οποίες είναι αρκετά συνηθισμένες σε τεχνικά έργα. Συγκεκριμένα:

- α. Η εργασία Β δεν μπορεί να αρχίσει πριν περάσουν τουλάχιστον δυο ημέρες μετά το πέρας της εργασίας Α (π.χ., μεταξύ της σκυροδέτησης και της καθαίρεσης ξυλοτύπου απαιτείται ένα διάστημα για στερεοποίηση του σκυροδέματος).
- β. Η εργασία Β μπορεί να αρχίσει αφότου έχει ολοκληρωθεί η εργασία Α σε ποσοστό 75% (υποθέτουμε γενικά, αλλά όχι υποχρεωτικά, ότι μια εργασία εκτελείται με ομοιόμορφο ρυθμό καθ' όλη τη διάρκεια της).
- γ. Η εργασία Α πρέπει να ολοκληρωθεί τουλάχιστον 4 ημέρες πριν ολοκληρωθεί η εργασία Β.
- δ. Η εργασία Β μπορεί να αρχίσει το ενωρίτερο 3 ημέρες πριν ολοκληρωθεί η εργασία Α.



**Σχήμα 2** Σύνθετοι τύποι συσχέτισης εργασιών

**Άσκηση:** Σχεδιάστε γραφήματα σαν αυτά στο Σχήμα 2 τοποθετώντας τις εργασίες σύμφωνα με τους ακόλουθους περιορισμούς.

- Η εργασία B θα περατωθεί το λιγότερο 2 ημέρες μετά το πέρας της εργασίας A.
- Η εργασία B μπορεί να αρχίσει όχι νωρίτερα από το τελευταίο μισό της εργασίας A.
- Η εργασία B δεν μπορεί να ολοκληρωθεί πριν περάσουν τουλάχιστον 10 ημέρες από την έναρξη της εργασίας A.

Σαν επίλογο της ενότητας αυτής και λαμβάνοντας υπόψη ότι η μείωση της συνολικής διάρκειας του έργου είναι ένας επιθυμητός στόχος του σχεδιασμού θα λέγαμε ότι :

Η δυνατότητα να αναγνωριστούν συσχετίσεις εργασιών τεχνικών έργων που επιτρέπουν χρονική επικάλυψή τους είναι μια από τις καλύτερες λύσεις που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο υπεύθυνος έργου για να μειώσει τη συνολική διάρκεια του έργου. Αναζητήστε συσχετίσεις της μορφής “αρχής-αρχής” ή “τέλους-τέλους” σε συνδυασμό με χρόνους προπόρευσης ή υστέρησης όπου αυτές είναι δυνατόν να εφαρμοστούν.

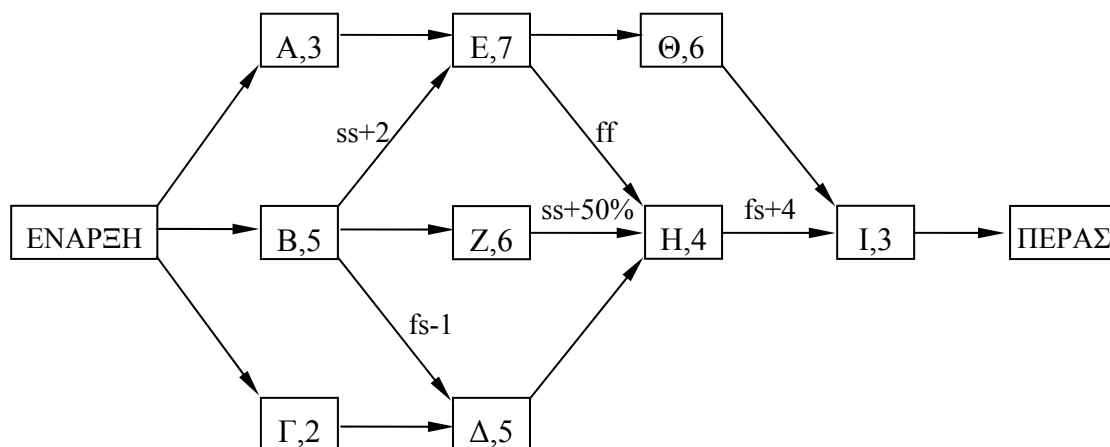
### Παράδειγμα

Δίνεται το κομβικό δίκτυο ενός έργου (Σχήμα 3) και οι διάρκειες των εργασιών (σε ημέρες). Οι περιορισμοί διαδοχής των εργασιών είναι της μορφής “τέλους - αρχής” με τις ακόλουθες εξαιρέσεις :

1. η εργασία Δ μπορεί να αρχίσει 1 ημέρα πριν το τέλος της εργασίας Β,
2. η εργασία Ε μπορεί να αρχίσει 2 ημέρες μετά την έναρξη της εργασίας Β,
3. η εργασία Η μπορεί να αρχίσει όταν έχει ολοκληρωθεί η εργασία Ζ κατά 50%,
4. η εργασία Η δεν μπορεί να ολοκληρωθεί πριν το τέλος της εργασίας Ε, και
5. η εργασία Ι μπορεί να αρχίσει 4 ημέρες μετά την ολοκλήρωση της εργασίας Η.

Οι παραπάνω περιορισμοί κωδικοποιούνται στο γράφημα. Να υπολογιστούν τα μεγέθη του χρονικού προγραμματισμού.

### Λύση



Σχήμα 3 Κομβικό δίκτυο έργου

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΝΩΡΙΤΕΡΩΝ ΧΡΟΝΩΝ ΕΝΑΡΞΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΑΤΟΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ**

Οι A, B και Γ είναι αρχικές δραστηριότητες και δεν προηγείται καμιά άλλη δραστηριότητα

$$A: \mathbf{ES(A)=0} \quad \mathbf{EF(A)=0+d(A)=0+3=3}$$

$$B: \mathbf{ES(B)=0} \quad \mathbf{EF(B)=0+d(B)=0+5=5}$$

$$Γ: \mathbf{ES(Γ)=0} \quad \mathbf{EF(Γ)=0+d(Γ)=0+2=2}$$

Δ: η Δ συσχετίζεται με τις B και Γ (2 διαδρομές)

Η σχέση διαδοχής B και Δ είναι (fs-1) που σημαίνει ότι η Δ μπορεί να αρχίσει το ενωρίτερο 1 ημέρα πριν το τέλος της B

$$\text{Άρα } \mathbf{ES(Δ)} = \max \{ \mathbf{ES(B)-1}, \mathbf{ES(Γ)} \} = \max \{ 5-1, 2 \} = \max \{ 4, 2 \} = 4$$

$$\mathbf{EF(Δ)} = \mathbf{ES(Δ)+d(Δ)=4+5=9}$$

E: η E σχετίζεται με τις A και B (2 διαδρομές)

Η σχέση διαδοχής B-E είναι (ss+2) που σημαίνει ότι η E μπορεί να αρχίσει το ενωρίτερο 2 ημέρες μετά την έναρξη της B αλλά το σημαντικότερο είναι ότι το E επηρεάζεται από την έναρξη και όχι το τέλος της B.

$$\text{Άρα } \mathbf{ES(E)} = \max \{ \mathbf{EF(A)}, \mathbf{ES(B)+2} \} = \max \{ 3, 0+2 \} = \max \{ 3, 2 \} = 3$$

$$\mathbf{EF(E)} = \mathbf{ES(E)+d(E)=3+7=10}$$

Z: η Z σχετίζεται μόνο με τη B

$$\text{Άρα } \mathbf{ES(Z)} = \mathbf{EF(B)=5}$$

$$\text{Το } \mathbf{EF(Z)} = \mathbf{ES(Z)+d(Z)=5+6=11}$$

H: η H σχετίζεται με τις Δ, E και Z.

Η σχέση E-H είναι σχέση ff δηλαδή τα E, H πρέπει να τελειώσουν μαζί ή ακριβέστερα το H μπορεί να τελειώσει το ενωρίτερο μαζί με το E. Άρα το H μπορεί να αρχίσει στο EF(E) αφαιρούμενης της διάρκειας του, δηλαδή σε EF(E)-4, δηλαδή σε 10-4=6 ημέρες.

Η σχέση Z-H είναι ss+50% δηλαδή το H μπορεί να αρχίσει αφού έχει ολοκληρωθεί τουλάχιστον το 1/2 του Z δηλαδή σε ES(Z)+1/2\*d(Z)=5+0.5\*6=8

$$\text{Επειδή } \mathbf{EF(Δ)=9}, \text{ τελικά } \mathbf{ES(H)} = \max \{ 9, 6, 8 \} = 9$$

$$\mathbf{EF(H)} = \mathbf{ES(H)+d(H)=9+4=13}$$

Θ: η Θ σχετίζεται μόνο με την E

$$\mathbf{ES(Θ)} = \mathbf{EF(E)=10}$$

$$\mathbf{EF(Θ)} = \mathbf{ES(Θ)+d(Θ)=10+6=16}$$

I: η I σχετίζεται με τις H και Θ

Υπάρχει σύνθετη σχέση H-I (fs+4) που σημαίνει ότι το I μπορεί να αρχίσει το ενωρίτερο 4 ημέρες μετά το τέλος του H, δηλαδή σε  $EF(H)+4=13+4=17$

Επειδή  $EF(\Theta)=16$  ισχύει ότι  $ES(I) = \max\{17,16\}=17$

$EF(I) = ES(I)+d(I)=17+3=20$

**ΑΡΑ Η ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ ΕΙΝΑΙ 20 ΗΜΕΡΕΣ**

### ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΡΑΔΥΤΕΡΩΝ ΧΡΟΝΩΝ ΕΝΑΡΞΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΑΤΟΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

H I είναι η τελική δραστηριότητα

$LF(I) = 20$

$LS(I) = LF(I)-d(I)=20-3=17$

Θ: Ακολουθείται μόνο από την I

$LF(\Theta) = LS(I)=17$

$LS(H) = LF(I) - d(\Theta)=17-6=11$

H: Ακολουθείται μόνο από την I

Υπάρχει σύνθετη σχέση H-I (fs+4) που σημαίνει ότι το I μπορεί να αρχίσει το ενωρίτερο 4 ημέρες μετά το τέλος του H ή καλύτερα ότι το τέλος του H προηγείται τουλάχιστον κατά 4 ημέρες της αρχής του I

$LF(H) = LS(I)-4=17-4=13$

$LS(H) = LF(H)-d(H)=13-4=9$

Z: Ακολουθείται μόνο από την H

Η σχέση Z-H είναι ss+50% δηλαδή το H μπορεί να αρχίσει αφού έχει ολοκληρωθεί τουλάχιστον το 1/2 του Z και επομένως όταν αρχίζει το H υπολείπεται ακόμη το 1/2 του Z

Άρα  $LF(Z) = LS(H) + 1/2*d(Z)=9+0.5*6=12$

$LS(Z) = LF(Z) - d(Z)=12-6=6$

E: Ακολουθείται από τις Θ και H

Η σχέση E-H είναι σχέση ff δηλαδή τα E, H πρέπει να τελειώσουν μαζί ή ακριβέστερα το H μπορεί να τελειώσει το ενωρίτερο μαζί με το E. Επομένως ισχύει:

$LF(E) = \min\{LS(\Theta), LF(H)\} = \min\{11,13\}=11$

$LS(E) = LF(E) - d(E)=11-7=4$

Δ: Ακολουθείται μόνο από την H

$LF(\Delta) = LS(H)=9$

$$\mathbf{LS}(\Delta) = \mathbf{LF}(\Delta) - d(\Delta) = 9 - 5 = 4$$

Γ: Ακολουθείται μόνο από τη Δ

$$\mathbf{LF}(\Gamma) = \mathbf{LS}(\Delta) = 4$$

$$\mathbf{LS}(\Gamma) = \mathbf{LF}(\Gamma) - d(\Gamma) = 4 - 2 = 2$$

Β: Ακολουθείται από τις Δ, Ε και Ζ

Η σχέση διαδοχής Β και Δ είναι (fs-1) που σημαίνει ότι η Δ μπορεί να αρχίσει το ενωρίτερο 1 ημέρα πριν το τέλος της Β ή καλύτερα ότι η Β μπορεί να τελειώσει μια ημέρα μετά την αρχή της Δ.

Όμως έχουμε και σχέση διαδοχής Β-Ε (ss+2) που σημαίνει ότι η Ε μπορεί να αρχίσει το ενωρίτερο 2 ημέρες μετά την έναρξη της Β η αλλιώς ότι το τέλος της Β διαφέρει από το τέλος της Ε κατά τη διάρκεια της Β και επιπρόσθετα 2 ημέρες

$$\text{Άρα } \mathbf{LF}(\mathbf{B}) = \min\{\mathbf{LS}(\Delta)+1, \mathbf{LS}(\mathbf{E})+d(\mathbf{B}) - 2, \mathbf{LS}(\mathbf{Z})\} = \min\{4+1, 4+5-2, 6\} = \min\{5, 7, 6\} = 5$$

$$\mathbf{LS}(\mathbf{B}) = \mathbf{LF}(\mathbf{B}) - d(\mathbf{B}) = 5 - 5 = 0$$

Α: Ακολουθείται μόνο από την Ε

$$\mathbf{LF}(\mathbf{A}) = \mathbf{LS}(\mathbf{E}) = 4$$

$$\mathbf{LS}(\mathbf{A}) = \mathbf{LF}(\mathbf{A}) - d(\mathbf{A}) = 4 - 3 = 1$$

### **ΚΡΙΣΙΜΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ**

Περιέχει τις δραστηριότητες για τις οποίες ισχύει  $ES=LS$  δηλαδή τις Β, Δ, Η και Ι

### **ΟΛΙΚΑ ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ (TF)**

Ισχύει  $TF=LS-ES$

Τα αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω Πίνακα 1.

### **ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ**

Εξετάζονται μόνο οι μη κρίσιμες δραστηριότητες Α, Γ, Ε, Ζ, Θ

Α: Ακολουθείται μόνο από την Ε

$$\mathbf{FF}(\mathbf{A}) = \mathbf{ES}(\mathbf{E}) - \mathbf{EF}(\mathbf{A}) = 3 - 3 = 0$$

Γ: Ακολουθείται μόνο από τη Δ

$$\mathbf{FF}(\mathbf{\Gamma}) = \mathbf{ES}(\Delta) - \mathbf{EF}(\Gamma) = 4 - 2 = 2$$

Ε: Ακολουθείται από τις Θ και Η

Η σχέση E-H είναι σχέση ff δηλαδή τα E, H πρέπει να τελειώσουν μαζί ή ακριβέστερα το H μπορεί να τελειώσει το ενωρίτερο μαζί με το E.

$$\text{Ισχύει } ES(\Theta) - EF(E) = 10 - 10 = 0$$

$$\text{Ισχύει } EF(H) - EF(E) = 13 - 10 = 3$$

$$FF(E) = \min\{0, 3\} = 0$$

Z: Ακολουθείται μόνο από την H

Η σχέση Z-H είναι ss+50% δηλαδή το H μπορεί να αρχίσει αφού έχει ολοκληρωθεί τουλάχιστον το 1/2 του Z και επομένως όταν αρχίζει το H υπολείπεται ακόμη το 1/2 του Z

$$FF(Z) = ES(H) - ES(Z) - 1/2 * d(Z) = 9 - 5 - 1/2 * 6 = 9 - 5 - 3 = 1$$

Θ: Ακολουθείται μόνο από την I

$$FF(\Theta) = ES(I) - EF(\Theta) = 17 - 16 = 1$$

Τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα 1.

**Πίνακας 1:** Μεγέθη χρονικού προγραμματισμού έργου.

Δραστηριότητα α	Διάρκει α	ES	EF	LS	LF	TF	FF	ΚΔ
Έναρξη	0	0	0	0	0			
A	3	0	3	1	4	1	0	
B	5	0	5	0	5	0	0	ΚΔ
Γ	2	0	2	2	4	2	2	
Δ	5	4	9	4	9	0	0	ΚΔ
E	7	3	10	4	11	1	0	
Z	6	5	11	6	12	1	1	
H	4	9	13	9	13	0	0	ΚΔ
Θ	6	10	16	11	17	1	1	
I	3	17	20	17	20	0	0	ΚΔ
Πέρας	0	20	20	20	20			