ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι ένα μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται στη βελτιστοποίηση προβλημάτων με γραμμικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του. Όπως σε όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης υπάρχει μιά αντικειμενική συνάρτηση (objective function) η οποία εκφράζει το στόχο που θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε, και ένα σύνολο περιορισμών (constraints) (δυναμικότητας, διαθεσιμότητας, τεχνολογίας, κλπ.) που εκφράζουν τους περιορισμούς του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο μπορούμε να κινηθούμε. Η αντικειμενική συνάρτηση έχει συνήθως οικονομική βάση. Η ελαχιστοποίηση του κόστους, η μεγιστοποίηση του κέρδους, η μεγιστοποίηση της παραγωγής, η ελαχιστοποίηση των απαιτούμενων εργατοωρών γιά την εκτέλεση ενός έργου είναι παραδείγματα παραμέτρων προς βελτιστοποίηση. Ο γραμμικός προγραμματισμός εφαρμόζεται μόνο αν η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί περιέχουν γραμμικούς όρους των παραμέτρων του προβλήματος. Είναι μιά τυποποιημένη μέθοδος και εφαρμόζεται ανεξάρτητα από τον αριθμό των παραμέτρων. Προβλήματα με δύο έως τρείς παραμέτρους επιλύονται με το χέρι αναλυτικά ή γραφικά, ενώ γιά περισσότερες παραμέτρους απαιτείται η χρήση προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η πιό γνωστή μέθοδος εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού σε υπολογιστή είναι η μέθοδος SIMPLEX. Στα πλαίσια του μαθήματος η ανάλυση περιορίζεται σε εποπτική μόνο παρουσίαση της μεθόδου γιά την περίπτωση προβλήματων με δύο μεταβλητές.

Παράδειγμα

Μιά βιομηχανία παράγει δύο προιόντα Α και Β. Καθένα από τα προιόντα περνάει από δύο μηχανές Ι και ΙΙ. Το προιόν Α απαιτεί 2 ώρες εργασίας της μηχανής Ι και 1 ώρα εργασίας της μηχανής ΙΙ. Το προιόν Β απαιτεί 1 ώρα εργασίας της μηχανής Ι και 4 ώρες εργασίας της μηχανής ΙΙ. Η βιομηχανία διαθέτει αρκετές μηχανές τύπου Ι και ΙΙ. Ο συνολικός εβδομαδιαίος χρόνος εργασίας των μηχανών Ι είναι 6.000 ώρες και των μηχανών ΙΙ 10.000 ώρες. Το καθαρό κέρδος είναι 3,5 χρηματικές μονάδες για κάθε προιόν Α και 5,0 μονάδες γιά κάθε προιόν Β. Βρείτε τη βέλτιστη κατανομή παραγωγής των δύο προιόντων που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Λύση

Πρώτα πινακοποιούμε τα δεδομένα μας.

Τύπος μηχανής	Απαιτούμενος χρόνος: Προιόν Α	Απαιτούμενος χρόνος: Προιόν Β	Μέγιστος χρόνος εργασίας/εβδομάδα
Ι	2	1	6.000
ΙΙ	1	4	10.000
	κέρδος ανά προιόν		
	3,5	5,0	

Έστω X_1 η παραγόμενη ποσότητα του προιόντος Α ανά εβδομάδα και X_2 η αντίστοιχη ποσότητα του προιόντος Β. Η παραγωγή X_1 προιόντων Α απαιτεί $2X_1$ ώρες εργασίας των μηχανών τύπου Ι. Ομοίως η παραγωγή X_2 προιόντων Β απαιτεί X_2 ώρες εργασίας των μηχανών τύπου Ι. Ο συνολικός χρόνος χρήσης των μηχανών τύπου Ι είναι επομένως $2X_1 + X_2$ ώρες, ο δε μέγιστος εβδομαδιαίος χρόνος που μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μηχανές είναι 6.000 ώρες. Πρέπει συνεπώς

$$2X_1 + X_2 \leq 6.000. \qquad (1)$$

Παρόμοια, γιά τις μηχανές τύπου II ισχύει

$$X_1 + 4X_2 \leq 10.000. \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αντιπροσωπεύουν τους περιορισμούς του προβλήματος. Σε συνήθη πρακτικά προβλήματα οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν θετικές ποσότητες (στο παράδειγμα είναι χωρίς νόημα να θεωρήσουμε αρνητικό αριθμό παραγόμενων προιόντων). Έτσι, έχουμε και τους ακόλουθους περιορισμούς

$$X_1 \geq 0, \qquad (3)$$

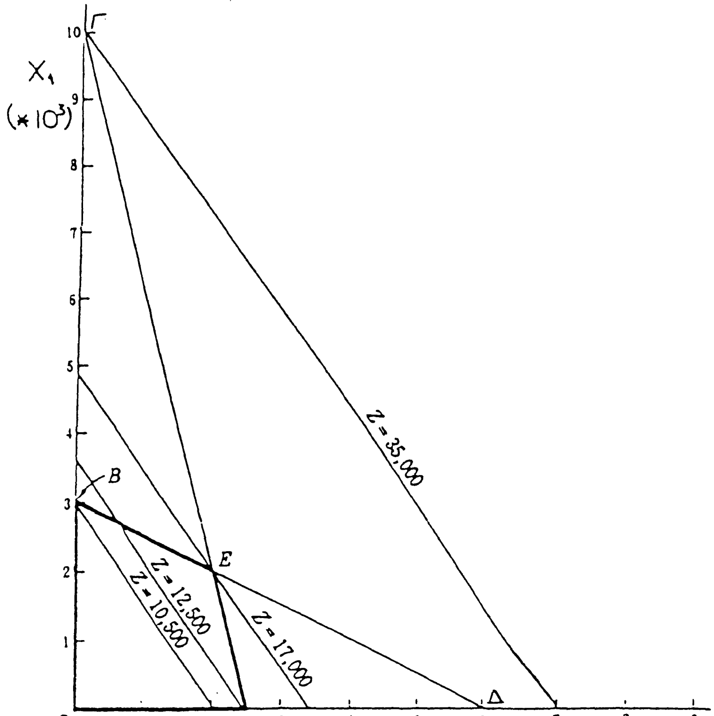
$$X_2 \geq 0. \qquad (4)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση αφορά μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από την παραγωγή του βέλτιστου αριθμού προιόντων A και B.

$$Z = 3{,}5X_1 + 5X_2. \qquad (5)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος φαίνεται στο σχήμα 4. Η σχέση (1) θεωρούμενη ως εξίσωση αντιπροσωπεύται από την ευθεία ΒΔ. Κάθε σημείο (X_1, X_2) που βρίσκεται πάνω από την ΒΔ παραβιάζει τον περιορισμό (1). Η λύση επομένως βρίσκεται στο ημιεπίπεδο κάτω από τη ΒΔ. Με ανάλογους συλλογισμούς βρίσκουμε ότι η επιτρεπόμενη περιοχή μέσα στην οποία μπορεί να βρίσκεται η λύση είναι το τετράπλευρο ΟΑΕΒ.

Η σχέση (5) αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση κέρδους και μπορεί να σχεδιαστεί γιά διάφορες τιμές του Z (π.χ. Z = 10.500). Όλα τα σημεία (X_1, X_2) επί της ευθείας αυτής δίνουν κέρδος 10.500 μονάδων. Είναι λοιπόν αυτή μιά γραμμή ίσου κέρδους. Παρατηρούμε ότι η ευθεία (5) γιά Z = 12.500 είναι γραμμή υψηλότερου κέρδους και δείχνει την κατεύθυνση προς την οποία πρέπει να κινηθούμε γιά να αυξήσουμε το κέρδος. Οι δύο προηγούμενες ευθείες έχουν αρκετά σημεία τους μέσα στην επιτρεπόμενη περιοχή. Συνεχίζοντας την



Σχήμα 4

παράλληλη μετατόπιση βλέπουμε ότι η ευθεία γιά $Z = 17.000$ έχει μόνο ένα σημείο στην επιτρεπόμενη περιοχή, το σημείο τομής των ορίων των περιορισμών (1) και (2). Κάθε άλλη ευθεία κέρδους δεξιά αυτής με $Z = 17.000$ (π.χ. $Z = 35.000$) περιέχει σημεία που αποφέρουν υψηλότερο κέρδος τα οποία όμως παραβιάζουν τους περιορισμούς και γιά το λόγο αυτό απορρίπτονται. Η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στο σημείο Ε και είναι

X_1 = 2.000 προιόντα Α ανά εβδομάδα,

X_2 = 2.000 προιόντα Β ανά εβδομάδα, και

Z = 17.000 χρηματικές μονάδες ανά εβδομάδα.

Στη γενική περίπτωση η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί σε μία από τις κορυφές του πολυγώνου της επιτρεπόμενης περιοχής. Ένας εναλλακτικός τρόπος λύσης είναι επομένως να υπολογίζεται η τιμή του κέρδους γιά κάθε μία από τις κορυφές και να επιλέγεται αυτή που δίνει το μέγιστο κέρδος.

Παράδειγμα

Ένας εργολάβος διαθέτει ένα μηχανικό εκσκαφέα και έναν προωθητή γιά εργασία σε δύο γειτονικά έργα. Το πρώτο αφορά εκσκαφή αργίλου σε ορυχείο και το άλλο διαμόρφωση χωματισμών σε παρακείμενη υπό κατασκευήν οδό. Ο εργολάβος εκτιμά ότι το κέρδος από την εκσκαφή είναι 50 χρηματικές μονάδες για κάθε 1000 μ^3 αργίλου και 60 χρηματικές μονάδες για κάθε 1000 μ^3 χωματισμών. Η εμπειρία δείχνει ότι γιά την εκσκαφή 1000 μ^3 αργίλου απαιτούνται 8 ώρες χρήσης του εκσκαφέα, 4 ώρες χρήσης του προωθητή και 50 ανθρωποώρες εργασίας. Αντίστοιχα, γιά κάθε 1000 μ^3 χωματισμών απαιτούνται 4 ώρες χρήσης του εκσκαφέα, 5 ώρες προωθητή και 13 ανθρωποώρες. Οι εργαζόμενοι (χειριστές μηχανημάτων και εργάτες) απασχολούνται 40 ώρες την εβδομάδα. Ο αριθμός των εργαζομένων που διατίθενται γιά τις παραπάνω εργασίες είναι 5. Πώς πρέπει να διατεθεί το προσωπικό και τα μηχανήματα στα δύο έργα ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος;

Λύση

Θεωρούμε σαν χρόνο ανάλυσης την εβδομάδα. Θέτουμε τις παραμέτρους του προβλήματος που αφορούν τις δυό εναλλακτικές εργασίες που έχουμε (άργιλο ή χωματισμούς) ως εξής :

x_1 : όγκος εκσκαφής αργίλου (σε 1000 μ^3), και

x_2 : όγκος εκσκαφής χωματισμών (σε 1000 μ^3).

Έστω δηλαδή ότι σε μία εβδομάδα το συνεργείο θα σκάψει x_1 όγκους αργίλου και x_2 όγκους χωματισμών. Συμφωνα με τα χρονικά δεδομένα του εκσκαφέα και τον περιορισμό των εργάσιμων ωρών σε 40 ανά εβδομάδα θα πρέπει

$$8x_1 + 4x_2 \leq 40.$$

Οι ανάλογοι περιορισμοί γιά τον προωθητή και το προσωπικό είναι αντίστοιχα

$$4x_1 + 5x_2 \leq 40, \text{ και}$$

$$50x_1 + 13x_2 \leq 200.$$

Πρέπει επίσης να προσθέσουμε τους περιορισμούς

$$x_1 \geq 0, \text{ και}$$

$$x_2 \geq 0,$$

αφού δεν έχει νόημα η εκσκαφή αρνητικού αριθμού όγκων.

Η αντικειμενική συνάρτηση που θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε είναι αυτή του κέρδους (μεγιστοποίηση). Το κέρδος μπορεί να γραφεί ως

$$P = 50x_1 + 60x_2.$$

Το πρόβλημα επομένως σε μορφή γραμμικού προγραμματισμού έχει ως ακολούθως :

Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $P = 50x_1 + 60x_2$

με τους περιορισμούς

$$8x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 40$$

$$50x_1 + 13x_2 \leq 200$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0.$$

Η επιτρεπόμενη περιοχή μέσα στην οποία πρέπει να βρίσκεται η λύση είναι η γραμμοσκιασμένη στο σχήμα 5α. Μιά σειρά από ευθείες γραμμές σχεδιάζονται που έχουν κλίση όμοια με αυτή της αντικειμενικής συνάρτησης,

$$x_2 = (P - 50x_1) / 60 \Rightarrow dx_2 / dx_1 = -5/6$$

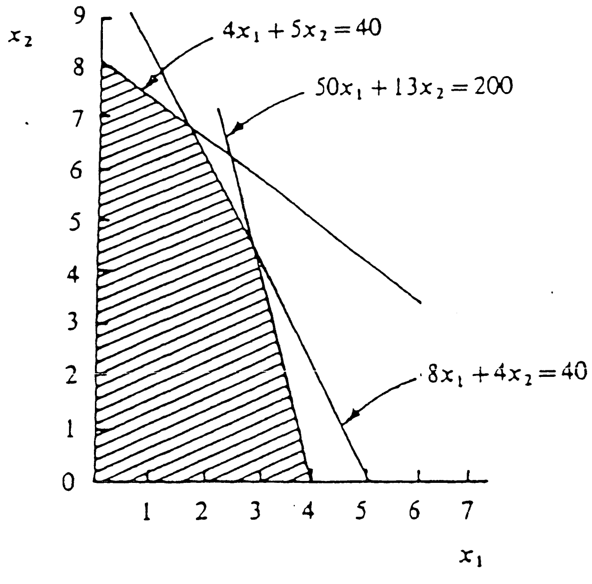
και τουλάχιστον ένα σημείο τους βρίσκεται μέσα στην επιτρεπόμενη περιοχή. Η ευθεία που δίνει τη μέγιστη τιμή του P είναι η ζητούμενη, το δε σημείο της που βρίσκεται στην επιτρεπόμενη περιοχή καθορίζει την τελική λύση. Το σημείο αυτό είναι στην προκειμένη περίπτωση το Α (σχήμα 5β), οι συντεταγμένες του οποίου μπορούν να βρεθούν αναλυτικά (από τις εξισώσεις των ευθειών που τέμνονται στο σημείο αυτό) και είναι :

$x_1 = 1{,}667$ (1667 m^3 αργίλου),

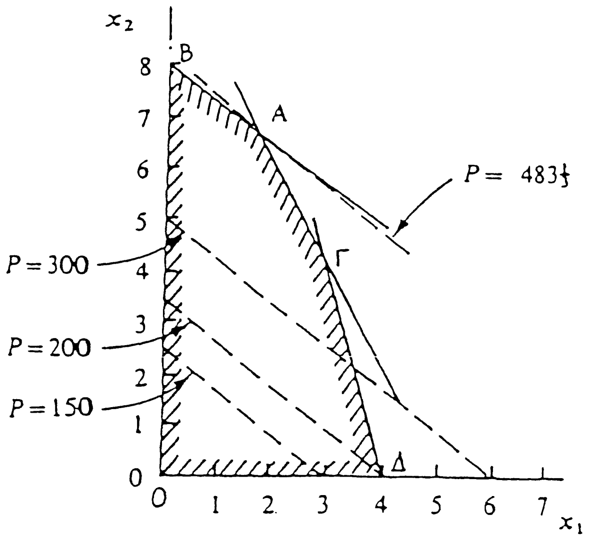
$x_2 = 6{,}667$ (6667 m^3 χωματισμών)

ενώ το κέρδος είναι

$P = 483{,}3$ χρηματικές μονάδες.



Σχήμα 5α



Σχήμα 5β

Το κέρδος που προκύπτει από τις άλλες κορυφές του πολυγώνου της επιτρεπόμενης περιοχής είναι :

$0: \; x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad => \quad P = 0,$

$B: \; x_1 = 0, \quad x_2 = 8 \quad => \quad P = 480,$

$\Gamma: \; x_1 = 2{,}917, \quad x_2 = 4{,}167 \quad => \quad P = 396,$ και

$\Delta: \; x_1 = 4, \quad x_2 = 0 \quad => \quad P = 200.$

Σημειώνεται ότι η βέλτιστη λύση αξιοποιεί μόνο ένα μέρος των διαθέσιμων εργατοωρών. Πράγματι,

$$50x_1 + 13x_2 = 170 < 200.$$

Γενικά όταν ο αριθμός των παραμέτρων είναι μικρότερος του αριθμού των περιορισμών (εξαιρουμένων των περιορισμών της μη αρνητικότητας των μεγεθών) τότε κάποιος ή κάποιοι από τους διαθέσιμους πόρους (που εκφράζονται μέσω των περιορισμών) δεν αξιοποιούνται πλήρως.

Προβλήματα

1. Μιά μονάδα παραγωγής σκυροδέματος εφοδιάζεται αδρανή υλικά από δύο πηγές. Το υλικό από την πρώτη είναι γενικά πιό χονδρόκοκκο απ΄ αυτό της δεύτερης. Το κόστος των αδρανών καθορίζεται από το κόστος θραύσης, καθαρισμού και μεταφοράς του υλικού. Η κοκκομετρική αναλογία, η ποσότητα των αδρανών που απαιτούνται γιά την μηνιαία παραγωγή του σκυροδέματος και το κόστος των αδρανών δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέγεθος	Κιλά ανά τόννο		Απαιτούμενη ποσότητα (τόννοι)
	Πηγή 1	Πηγή 2	
Χοντρό χαλίκι	300	100	10.000
Λεπτό χαλίκι	450	300	15.000
Χοντρή άμμος	200	450	20.000
Λεπτή άμμος	50	150	5.000
Κόστος ανά τόννο	1510	1680	

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του γραμμικού προγραμματισμού διατυπώστε το πρόβλημα (αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμούς) και βρείτε την βέλτιστη ποσότητα αδρανών που πρέπει να ληφθούν από κάθε πηγή ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος αγοράς των.

2. Η εξέταση ενός μαθήματος στο πανεπιστήμιο απαιτεί από το φοιτητή να απαντήσει συνολικά σε όχι περισσότερα από 100 ερωτήματα. Στην εκφώνηση υπάρχουν ερωτήματα τριών κατηγοριών:

α. μικρής δυσκολίας (X_1) με μέσο χρόνο απάντησης 2 λεπτά ανά ερώτηση και απόδοση 4 πόντων,

β. μέσης δυσκολίας (X_2) με μέσο χρόνο απάντησης 3 λεπτά ανά ερώτηση και απόδοση 5 πόντων, και

γ. μεγάλης δυσκολίας (X_3) με μέσο χρόνο απάντησης 4 λεπτά ανά ερώτηση και απόδοση 6 πόντων.

Ο συνολικός διαθέσιμος χρόνος της εξέτασης είναι 3,5 ώρες. Υπάρχει επίσης ο περιορισμός ότι γιά τα ερωτήματα των κατηγοριών α. και β. δε μπορούν να διατεθούν αθροιστικά περισσότερες από 2,5 ώρες. Πόσα ερωτήματα από κάθε κατηγορία πρέπει να απαντήσει ένας φοιτητής ώστε να λάβει το μέγιστο δυνατό βαθμό στην εξέταση; Ποιός είναι αυτός ο βαθμός;