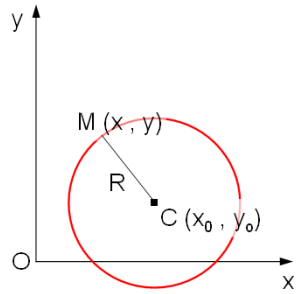
Κύκλος Mohr για τις τάσεις στην επίπεδη εντατική κατάσταση



Εξίσωση κύκλου:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

$$\sigma_{x'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta \Leftrightarrow \left(\sigma_{x'}-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta\right)^2$$

$$\left(\tau_{x'y'}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta\right)^2$$

$$\left(\sigma_{x'}-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{x'y'}^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta\right)^2+\left(-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2\cos^2 2\theta+\tau_{xy}^2\sin^2 2\theta+2\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta\,\tau_{xy}\sin 2\theta+\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2\sin^2 2\theta+\tau_{xy}^2\cos^2 2\theta-2\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta\,\tau_{xy}\cos 2\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sigma_{x'}-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{x'y'}^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2\underbrace{(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)}_{1}+\tau_{xy}^2\underbrace{(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)}_{1}=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2\Rightarrow$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

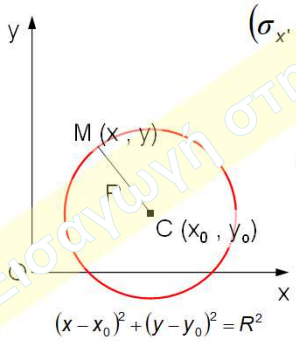
$$\left(\sigma_{x'}-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+(\tau_{x'y'}-0)^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2$$

$$=\qquad =$$

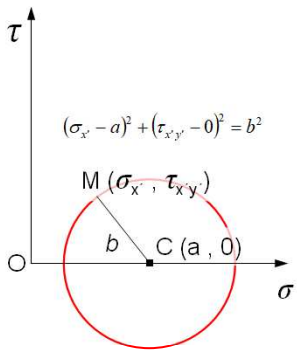
$$(\sigma_{x'}-a)^2+\tau_{x'y'}^2=b^2$$

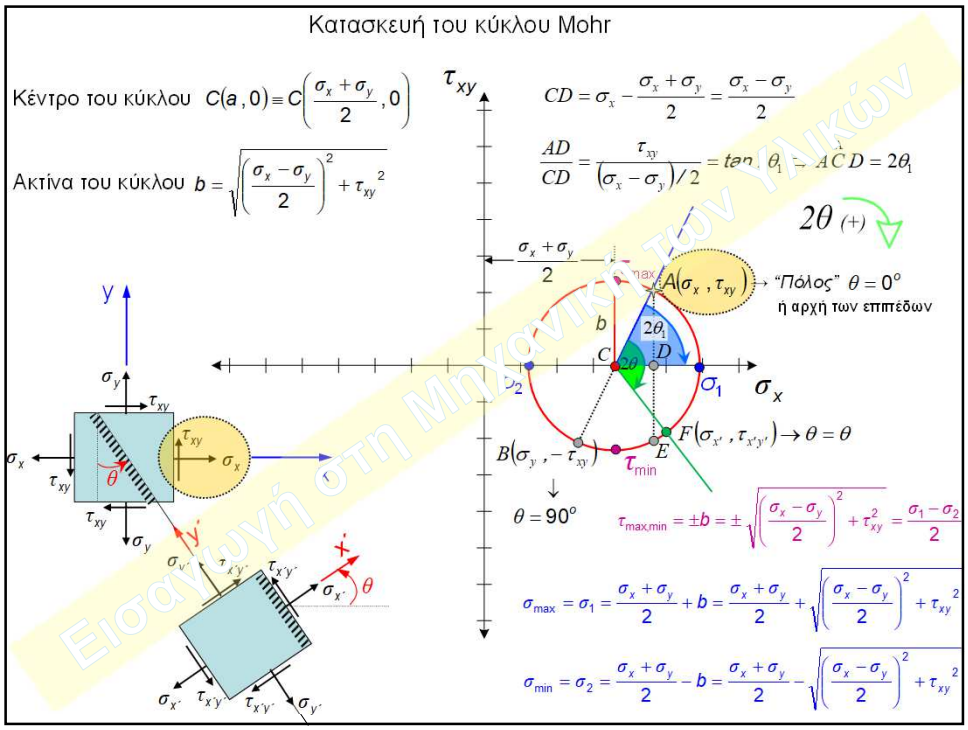
$$a=\sigma_{avg.}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

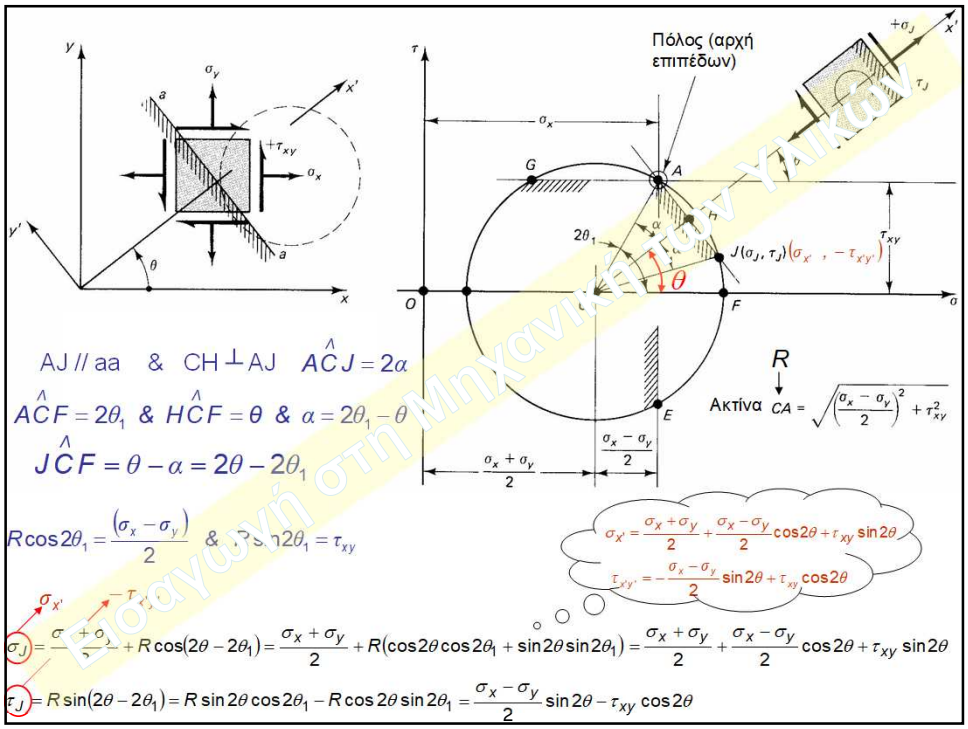
$$b=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

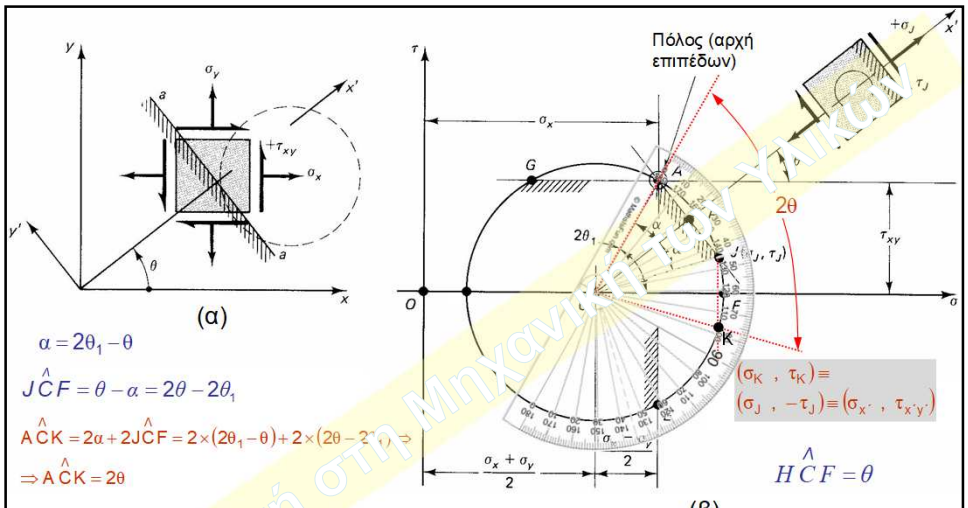


$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

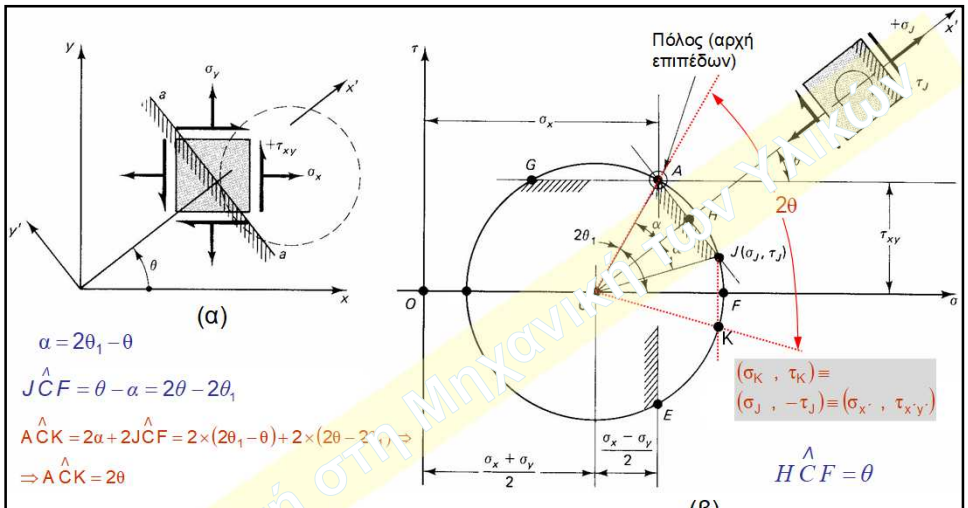






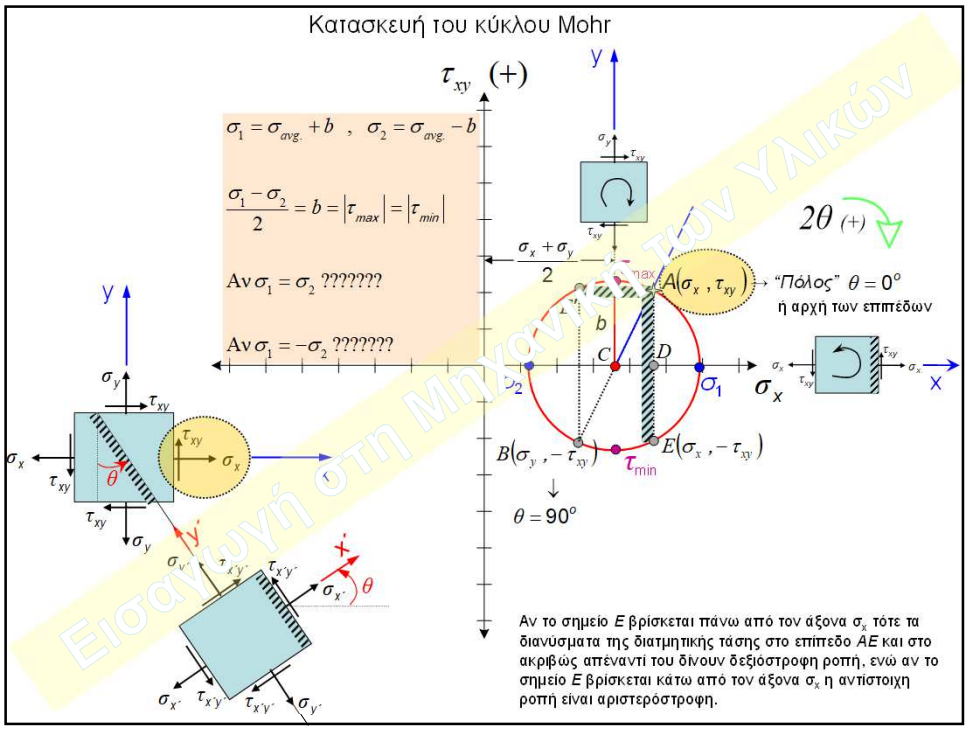


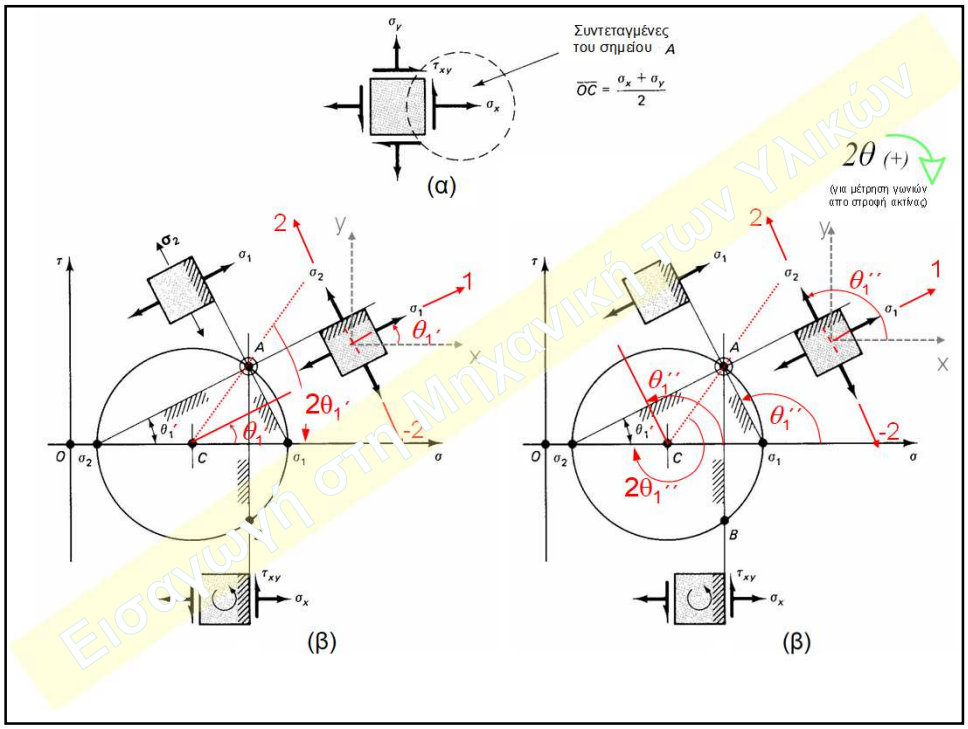
- Τα μέτρα των $(\sigma_{x'}\ ,\ \tau_{x'y'})$ αντιστοιχούν στις συντεταγμένες του σημείου K (στροφή της ακτίνας CA κατά +2θ).
- Ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ Πόλου και σημείου J [συμμετρικού του K ως προς άξονα σ, με συντεταγμένες $(\sigma_{x'}\ ,\ -\tau_{x'y'})$] ⇒ επίπεδο πάνω στο οποίο αναπτύσσονται $(\sigma_{x'}\ ,\ \tau_{x'y'})$. Κάθετη πάνω στο επίπεδο αυτό -> άξονας του επιπέδου πάνω στο οποίο αναπτύσσονται $(\sigma_{x'}\ ,\ \tau_{x'y'})$.
- Αν το σημείο J βρίσκεται πάνω από τον άξονα σ_x τότε τα διανύσματα της διατμητικής τάσης στο επίπεδο AJ και στο ακριβώς απέναντί του δίνουν δεξιόστροφη ροπή, ενώ αν το σημείο J βρίσκεται κάτω από τον άξονα σ_x η αντίστοιχη ροπή είναι αριστερόστροφη.

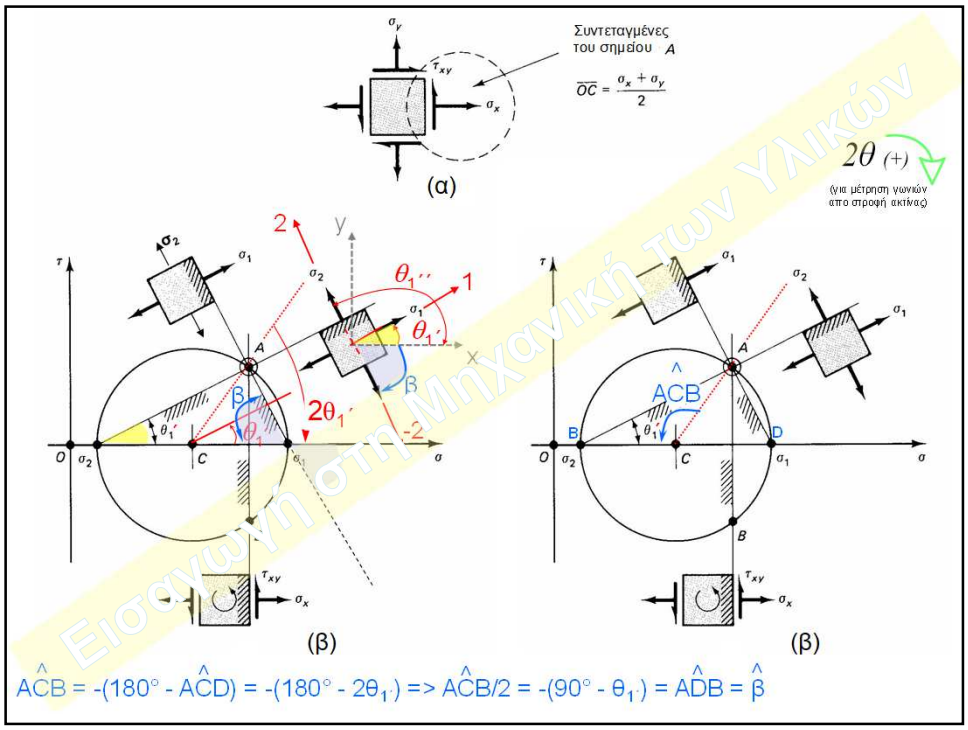


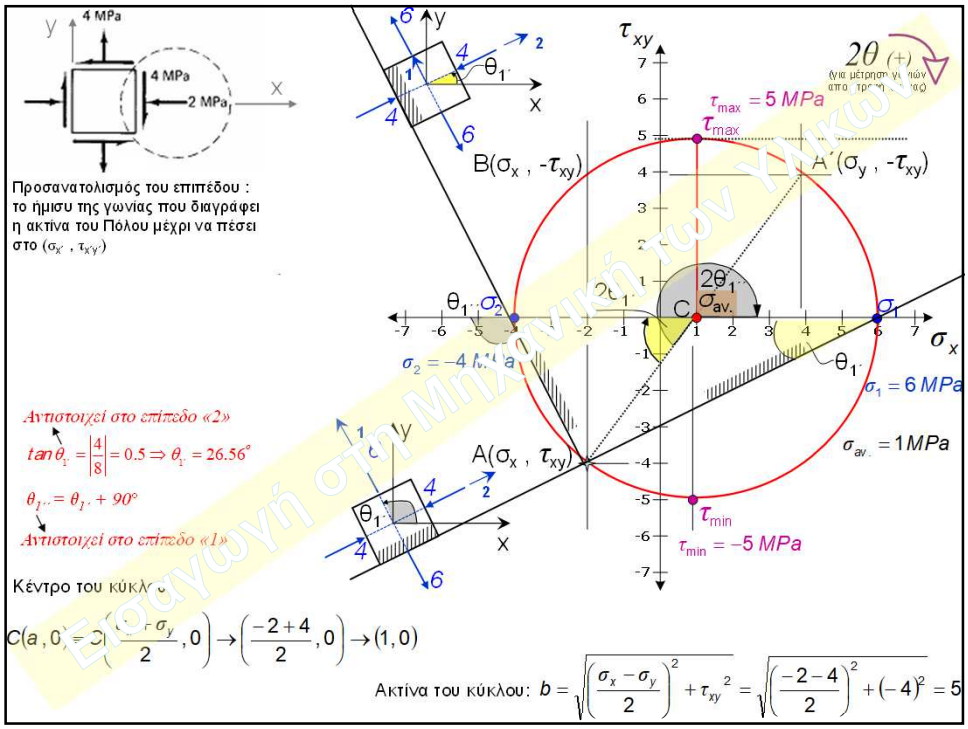
Προσανατολισμός του επιπέδου αυτού: το ήμισυ της γωνίας που διαγράφει η ακτίνα του Πόλου μέχρι να πέσει στο $(\sigma_{x'}\ ,\ \tau_{x'y'})$.

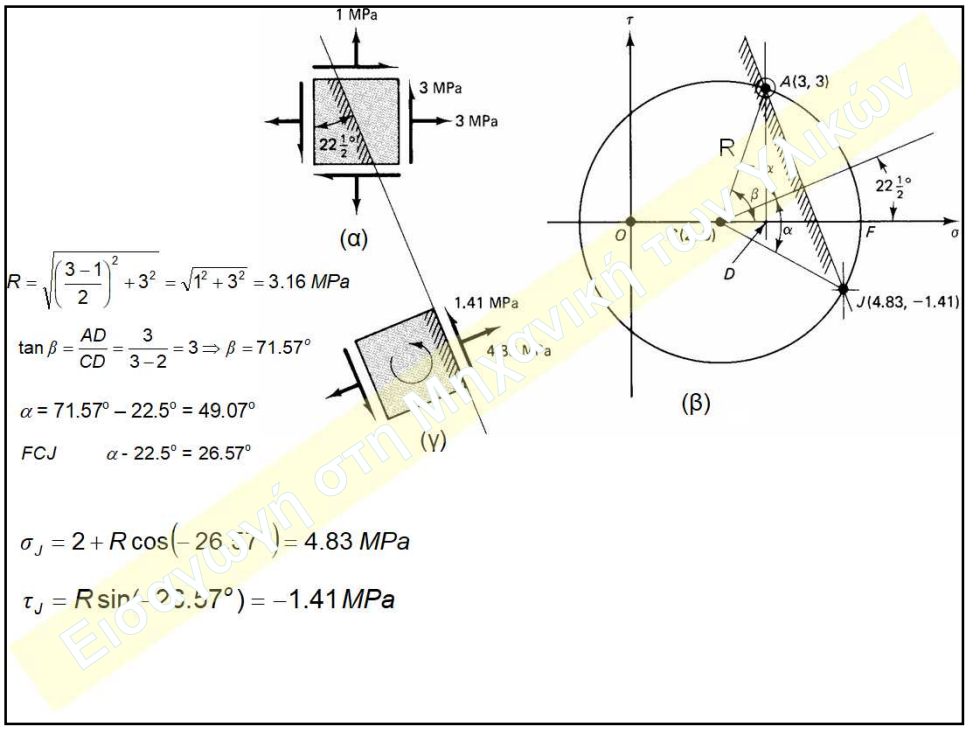
2θ (+)
(για μέτρηση γωνιών από στροφή ακτίνας)











$$R = \sqrt{\left(\frac{3-1}{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3.16\ MPa$$

$$\tan\beta = \frac{AD}{CD} = \frac{3}{3-2} = 3 \Rightarrow \beta = 71.57^o$$

$$\alpha = 71.57^o - 22.5^o = 49.07^o$$

$FCJ \qquad \alpha - 22.5^o = 26.57^o$

$$\sigma_J = 2 + R\cos(-26.57^\circ) = 4.83\ MPa$$

$$\tau_J = R\sin(-26.57^\circ) = -1.41\ MPa$$