

**Κεφάλαιο 6**  
**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΤΡΕΨΗ**

1

Όταν ένα δομικό στοιχείο καταπονείται με ροπές που αντιστοιχούν τα διανύσματα είναι παράλληλα προς τον άξονα του στοιχείου, δηλαδή προκύπτει αντιστροφή του στοιχείου ως προς τον άξονα αυτού, τότε λέμε ότι το στοιχείο υφίσταται στρέψη.

$\tau = \tau + \tau$

Αν  $A(x) = c_1$  &  $T(x) = c_2$  τότε η στρέψη καλείται ομοιόμορφη

Αν η στρέψη δρα απουσία άλλων εντατικών μεγεθών (π.χ. τέμνουσα, κάμψη) τότε ονομάζεται καθαρή

2

**Κύρια αποτελέσματα της στρέψης σε δομικά στοιχεία**

- Σχετική στρέψη των διατομών
- Ανάπτυξη διαμηττικών τάσεων  $\tau_{xy}$  στο επίπεδο κάθε διατομής

**Βασικός στόχος 1ου κεφαλαίου**

Υπολογισμός των τάσεων αυτών και των στρεφών για απλές περιπτώσεις κυλινδρικών δομικών στοιχείων  $\phi$  με συμπαγείς ή λεπτοτοιχίες διατομές.

3

**Εφαρμογή της μεθόδου των τομών για την κατασκευή διαγραμμάτων ροπής στρέψης**

$\Sigma T = 0 \Rightarrow 40 - 60 + T_A = 0 \Rightarrow T_A = 20 \text{ kNm}$

$0 \leq x < \ell/2 \Rightarrow T_A + T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = -T_A = -20 \text{ kNm}$

$\ell/2 \leq x \leq \ell \Rightarrow T_A - 60 + T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = +40 \text{ kNm}$

4

**Ελαστική στρέψη δομικών στοιχείων κυκλικής διατομής**

**Βασικές κινηματικές (γεωμετρικές) παραμορφώσεις:**

- (α) Κάθε επίπεδη διατομή πριν από την στρέψη παραμένει επίπεδη και μετά την εφαρμογή της ροπής στρέψης, δηλαδή δεν υφίσταται παραμόρφωση (έτσι όλες οι διατομές παραμένουν παράλληλες μεταξύ τους).
- (β) Η σχετική στρέψη δύο διατομών είναι ανάλογη της μεταξύ τους απόστασης.
- (γ) Κάθε ακτίνα της εγκάρσιας διατομής πριν τη στρέψη ( $O_1D$ ) παραμένει ευθεία και μετά τη στρέψη ( $O_1D'$ ).

Επίσης, ισχύει ο νόμος του Hooke.

$DO_1O_3C \rightarrow D'O_1C_3C$

Στις ακτίνες των ακτίνων  $O_1D$  &  $O_2B$  στις  $O_1D'$  &  $O_2B'$

5

Το υλικό του κυλίνδρου υφίσταται διαμηττική παραμόρφωση, η οποία είναι μέγιστη στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου και μειώνεται γραμμικά όσο πλησιάζουμε προς τον άξονα.

$\phi \propto T$   
 $\phi \propto \ell$

Οι διατομές των κυλινδρικών διατομών παραμορφώνονται στο επίπεδο τους λόγω στρέψης.

6

Νόμος του Hooke:  $\tau = G\gamma$

- Δρουν πάνω στο επίπεδο κάθε διατομής του κυλίνδρου
- Έχουν φορά κάθετη στην ακτίνα που συνδέει το κέντρο του κύκλου με το σημείο όπου δρουν
- Έχουν μέγεθος το οποίο μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από το κέντρο του κύκλου.

$$\int_A \tau \rho dA = \int_A \frac{\rho}{c} \tau_{\max} \rho dA = T \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \& \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

$\int_A \rho^2 dA = J$  πολική ροπή αδράνειας

7

Συμπαγείς κυκλικές διατομές

$J = \frac{1}{2} \pi c^4$

Κοίλες κυκλικές διατομές

$J = \frac{1}{2} \pi (c^4 - b^4)$

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_b^c 2\pi \rho^3 d\rho = \frac{\pi c^4}{2} - \frac{\pi b^4}{2}$$

8

Συμπαγείς κυκλικές διατομές

$J = \frac{1}{2} \pi c^4$

Κοίλες κυκλικές διατομές

$J = 2\pi R^3 t$

$$J = \frac{1}{2} \pi \left( (R+t/2)^4 - (R-t/2)^4 \right)$$

9

Προσδιορισμός της σχετικής γωνίας στρώσης μεταξύ δύο διατομών

Δεδομένου ότι  $\gamma_{\max} \ll 1$  rad

$$d\phi = \frac{\gamma_{\max} dx}{c} \Rightarrow \gamma_{\max} = \tau_{\max} / G$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

Γωνίες στρώσης των διατομών Α και Β ως προς κάποιο σύστημα  $\phi_A$  και  $\phi_B$

Σχετική γωνία στρώσης (σε rad) μεταξύ των διατομών, είναι  $\phi_B$  και  $\phi_A$

$$\phi = \phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_A^B \frac{T}{GJ} dx$$

10

$\phi = \phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_A^B \frac{T}{GJ} dx$   $GJ \rightarrow$  Δυστρεψία

Γενικά:  $T(x), G(x), J(x)$

Αν το δομικό στοιχείο μεταξύ των διατομών Α και Β μπορεί να χωριστεί σε  $n$  τμήματα όπου το κάθε τμήμα έχει ροπή στρέψης  $T_i$ , μήκος  $L_i$ , υλικό με μέτρο διάτμησης  $G_i$  και διατομή με πολική ροπή αδράνειας  $J_i$ , τότε:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

11

Η στρέψη της διατομής Β-Β σχετικά με αυτήν της διατομής Α-Α είναι:

$$\phi = \phi_B - \phi_A = \frac{T}{GJ} \int_0^L dx \Rightarrow \phi = \frac{TL}{GJ}$$

$\Delta \ell = \frac{PL}{AE} \Leftrightarrow P = \left( \frac{AE}{L} \right) \Delta \ell \Leftrightarrow P = k\Delta \ell$

Σταθερά του ελατηρίου:  $k = \left( \frac{AE}{L} \right) \gg \frac{AE}{L}$  γενικά

Γραμμικό ελατήριο

$f = 1/k = L/A \cdot \Delta \ell / P \gg$  Ευτένεια

Στροφικό ελατήριο

$T = k_t \phi$

$k_t = \frac{T}{\phi} = \frac{GJ}{L}$  στροφική σταθερά

$f_t = 1/k_t$  Ευστρεψία

12

Αν το κυλινδρικό στοιχείο αποτελείται από δύο υλικά, ένα στο εσωτερικό και ένα εξωτερικά

κοινό στο σημείο  $\gamma$

$$\tau_{B_1} = G_1 \gamma \Rightarrow \frac{\tau_{B_2}}{\tau_{B_1}} \propto \frac{G_2}{G_1}$$

**Αρχή του Saint Venant:** Τυχόν ανωμαλίες στην κατανομή των διατμητικών τάσεων εμφανίζονται μόνο σε μικρή περιοχή του δομικού στοιχείου, που φθάνει, ύστερα από σταθερά από το σημείο εφαρμογής της ροπής στρέψης, περίπου ίση με την διάμετρο του κυλίνδρου.

13

### Συγκεντρώσεις τάσεων

- Η εξαγωγή της σχέσης,  $\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$  προϋποθέτει έναν κύλινδρο αμετέωλο κατά το μήκος του διατομικά, υποβαλλόμενο σε στρέψη μέσω των 2 άκαμπτων πλακών στην αρχή και στο τέλος του.
- Οι χημική φλαντζών, γραναζιών κ.ά. ασυνεχειών μπέρουν να προκαλέσουν φαινόμενα συγκέντρωσης τάσεων
- Οι συντελεστές συγκέντρωσης τάσεων μπορούν να προσδιοριστούν είτε πειραματικά είτε αναλυτικά και εφαρμόζονται ως εξής:

$$\tau_{max} = K \frac{Tc}{J}$$

Fig. 1-26 Stress-concentration factors for fillet in circular shafts.†

14

### Μορφή αστοχίας κυλινδρικών στοιχείων λόγω στρέψης

- Σε στοιχεία με πλευρές παράλληλες και κάθετες στον άξονα του κυλίνδρου αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις ΜΟΝΟ.
- Συνδυασμοί ορθών και διατμητικών τάσεων αναπτύσσονται σε στοιχεία με άλλο προσανατολισμό.

15

Στοιχείο με πλευρές τ.υ. σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα του κυλίνδρου:

$$F = 2(\tau_{max} \cdot A_0) \cos 45^\circ = \tau_{max} \cdot 40 \sqrt{2}$$

$$\tau_{45} = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{max} \cdot 40 \sqrt{2}}{40 \sqrt{2}} = \tau_{max}$$

- Το στοιχείο α βρίσκεται υπό καθαρή διάτμηση.
- Στο στοιχείο β αναπτύσσονται δύο θλιπτικές τάσεις σε απέναντι επιφάνειες και δύο εφελκυστικές στις δύο άλλες.
- Οι τάσεις που αναπτύσσονται στα στοιχεία α και β (δηλ. το μέτρο τους) είναι ίσες.

16

Η θεωρία που περιγράφει την αστοχία ολκίμων υλικών είναι αυτή της μέγιστης διατμητικής τάσης

Η θεωρία που περιγράφει την αστοχία ψαθυρών υλικών είναι αυτή της μέγιστης κύριας τάσης

Τα ολκίμα υλικά αστοχούν γενικά λόγω διάτμησης, ενώ τα ψαθυρά υλικά είναι πιο «αδύναμα» σε εφελκυσμό από ότι σε διάτμηση.

17

### Ολκίμα Υλικά

Η μορφή αστοχίας του κυλίνδρου λόγω στρέψης θα χαρακτηρίζεται από ένα σχήμα πόνου σε μία διατομή του κυλίνδρου. Υπεύθυνη για την θραύση αυτή η μορφή θα είναι η **μέγιστη διατμητική τάση**, η οποία θα οδηγήσει τελικά σε μορφή θραύσης που χαρακτηρίζεται από **επιφάνεια θραύσης που είναι επίπεδη και κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου**.

### Ψαθυρά Υλικά

Η επιφάνεια θραύσης στα ψαθυρά υλικά είναι κάθετη στις κύριες εφελκυστικές τάσεις. Η μορφή αστοχίας ενός κυλίνδρου από ψαθυρό υλικό έχει χαρακτηριστική ελικοειδή μορφή.

18



**Θλιμνά Υλικά**



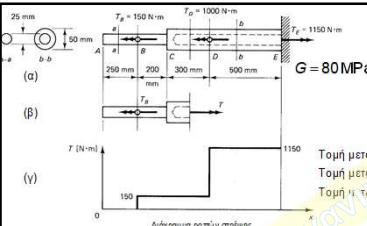
Η μορφή αστοχίας του κυλίνδρου λόγω στρέψης θα χαρακτηρίζεται από διάσπαση πάνω σε μία διατομή του κυλίνδρου. Υπεύθυνη για την θραύση αυτή θα είναι η **μέγιστη διαμηκτική τάση**, η οποία θα οδηγήσει τελικά σε μορφή θραύσης που χαρακτηρίζεται από **επιπέδη και κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου**.

**Ψαθυρά Υλικά**



Η επιφάνεια θραύσης στα ψαθυρά υλικά είναι κάθετη στις κύριες εφελκυστικές τάσεις.  
Η μορφή αστοχίας ενός κυλίνδρου από ψαθυρό υλικό έχει χαρακτηριστική ελικοειδή μορφή.

19



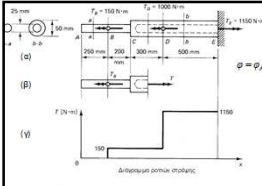
Τομή μεταξύ Α-Β:  $J_{AC} = \pi(12.5)^4 / 2 = 38.3 \times 10^3 \text{ mm}^4$   
Τομή μεταξύ Β-Γ (Σχ. 6.15β):  $T = T_B = 150 \text{ Nm}$   
Τομή γ: τ: Δ-Ε:  $T = T_{BC} + T_D = 150 + 1000 = 1150 \text{ Nm}$

Διάγραμμα ροπών στρέψης

Διάγραμμα γωνιών στρέψης

Το  $\phi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$

20



$\phi = \phi_B - \phi_A = -(\phi_E - \phi_A) = \int_A^E \frac{T dx}{GJ} = \int_A^B \frac{T_{AB} dx}{GJ_{AC}} + \int_B^C \frac{T_{BC} dx}{GJ_{BC}} + \int_C^D \frac{T_{CD} dx}{GJ_{CD}} + \int_D^E \frac{T_{DE} dx}{GJ_{DE}}$

$\phi = \left( \frac{T_{AB} L_{AB}}{GJ_{AC}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{GJ_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{GJ_{CD}} + \frac{T_{DE} L_{DE}}{GJ_{DE}} \right)$

$= \left( \frac{150 \times 10^3 \times 200}{38.3 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} + \frac{150 \times 10^3 \times 300}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} + \frac{1150 \times 10^3 \times 500}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} \right)$

$= (1.0 \times 10^{-3} + 1.0 \times 10^{-3} + 12.5 \times 10^{-3}) = 23.3 \times 10^{-3} \text{ rad (δεξιόστροφον)}$

$\phi = \phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_A^B \frac{T}{GJ} dx$

21

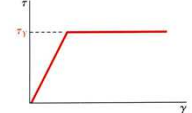
**Πλαστικές παραμορφώσεις**

- Εάν το υλικό συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά, τότε  $\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$
- Εάν, όμως, το υλικό διαρρέσει, τότε το υλικό έχει μία μη-γραμμική σχέση διαμηκτικών τάσεων λόγω στρέψης - παραμόρφωσης, τότε η τρέψη τάση δεν ισχύει!!!
- Η παραμόρφωση λόγω στρέψης ( $\gamma$ ) μεταβάλλεται γραμμικά με την ακτίνα, ανεξάρτητα από τις ιδιότητες του υλικού. Η εφαρμογή της σχέσης διαμηκτικών τάσεων λόγω στρέψης-παραμόρφωσης επιτρέπει τον εύκολο διαρισμό της κατανομής των τάσεων.
- Το ολοκλήρωμα των ροπών που προκύπτουν από την κατανομή των διαμηκτικών τάσεων στη διατομή είναι ίσο με τη ροπή στρέψης που εφαρμόζεται στον κύλινδρο στην εν λόγω διατομή.

$T = \int_0^c \rho t (2\rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^2 t d\rho$

22

**Ελαστοπλαστικά υλικά**



- Η μέγιστη ροπή στρέψης ( $T_Y$ ) και η αντίστοιχη γωνία στρέψης ( $\phi_Y$ ) που μπορεί να εφαρμοστεί σε έναν κύλινδρο, έτσι ώστε αυτός να συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά είναι:

$T_Y = \frac{J}{c} \tau_Y = \frac{1}{2} \pi^3 \tau_Y$

$J = \frac{1}{2} \pi^4 \frac{c^4}{4} = \frac{\pi^4 c^4}{8}$

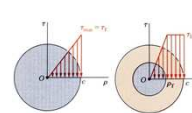
$\frac{T_Y}{GJ} = \frac{1}{2} \pi^3 \tau_Y \frac{8}{\pi^4 c^4} = \frac{4 T_Y}{\pi G c^3} \Rightarrow \phi_Y = \frac{L \gamma_Y}{c}$

- Καθώς αυξάνεται η ροπή στρέψης, διαμορφώνεται μία πλαστικοποιημένη περιοχή στη διατομή περί ενός πυρήνα που συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά:

για  $\begin{cases} 0 \leq \rho \leq \rho_T, & 0 \leq t \leq \tau_Y \text{ με } t = \frac{\rho}{\rho_T} \tau_Y \\ \rho_T \leq \rho \leq c, & t = \tau_Y \end{cases}$

23

**Ελαστοπλαστικά υλικά**



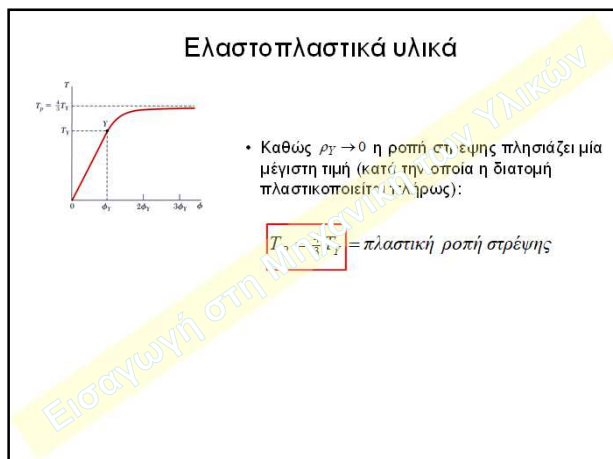
$\tau = \frac{\rho}{\rho_T} \tau_Y \Leftrightarrow \frac{TP}{J} = \frac{\rho}{\rho_T} \tau_Y \Leftrightarrow \rho_T = \frac{JG \tau_Y}{T} \Rightarrow \rho_T = \frac{L}{\gamma_T} \tau_Y$

$T = 2\pi \int_0^{\rho_T} \rho^2 t d\rho + 2\pi \int_{\rho_T}^c \rho^2 \tau_Y d\rho = 2\pi \int_0^{\rho_T} \rho^2 \frac{\rho}{\rho_T} \tau_Y d\rho + 2\pi \tau_Y \int_{\rho_T}^c \rho^2 d\rho$

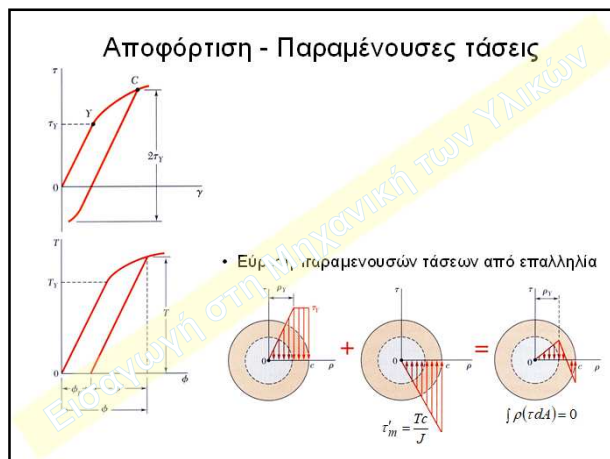
$= 2\pi \frac{\tau_Y}{\rho_T} \int_0^{\rho_T} \rho^3 d\rho + 2\pi \tau_Y \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho_T}^c = \frac{2}{3} \pi \tau_Y \left( 1 - \frac{\rho_T^3}{4} \right) = \frac{4}{3} \tau_Y \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_T^3}{c^3} \right) = \frac{4}{3} \tau_Y \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\phi^3}{\phi_T^3} \right)$

$\left[ \rho = \frac{L}{\gamma_T} \tau_Y, \phi = \frac{L \gamma_T}{c} \right] \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_T} = \left( \frac{\rho}{\phi_T} \right)^{1/3} = \left( \frac{L \gamma_T}{\phi_T} \right)^{1/3} = \left( \frac{\phi}{\phi_T} \right)^{1/3}$

24



25



26