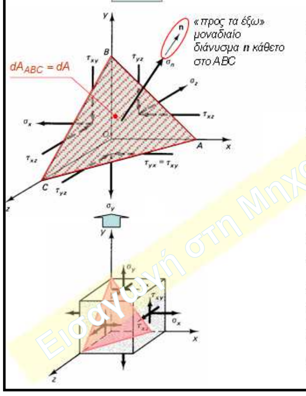
Κύριες τάσεις σε τρισδιάστατη εντατική κατάσταση

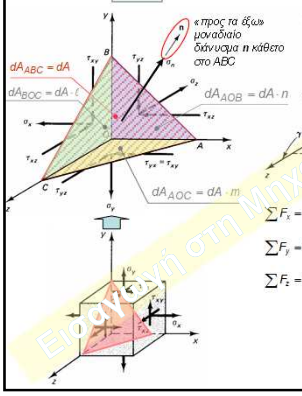


Ψάχνουμε το επίπεδο (δηλ. τον προσανατολισμό του ως προς το σύστημα συντεταγμένων xyz) πάνω στο οποίο αναπτύσσεται μία μόνο τάση και δη ορθή – η σ_n (κύριο επίπεδο) – η οποία είναι ικανή να εξασφαλίσει ισορροπία κατά τους άξονες x, y, z. Επίσης, ψάχνουμε και την τιμή της κύριας αυτής τάσης.

Καθώς τα κύρια αμοιβαίως κάθετα μεταξύ τους επίπεδα είναι 3, η διαδικασία πρέπει να μας δώσει 3 κύριες τάσεις και τον προσανατολισμό των αντίστοιχων (3ών) κυρίων επιπέδων.

1

Κύριες τάσεις σε τρισδιάστατη εντατική κατάσταση



Συνημίτονα διεύθυνσης: $\begin{cases} \ell = \cos\alpha \\ m = \cos\beta \\ n = \cos\gamma \end{cases}$

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας δίνουν:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \sigma_n dA \cdot \ell - \sigma_x dA \cdot \ell - \tau_{xy} dA \cdot m - \tau_{xz} dA \cdot n = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_n dA \cdot m - \sigma_y dA \cdot m - \tau_{yz} dA \cdot n - \tau_{xy} dA \cdot \ell = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \sigma_n dA \cdot n - \sigma_z dA \cdot n - \tau_{xz} dA \cdot \ell - \tau_{yz} dA \cdot m = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma_n) \cdot \ell + \tau_{xy} \cdot m - \tau_{xz} \cdot n = 0$$

$$\tau_{xy} \cdot \ell + (\sigma_y - \sigma_n) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n = 0$$

$$\tau_{xz} \cdot \ell + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma_n) \cdot n = 0$$

2

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma_n) \cdot \ell + \tau_{xy} \cdot m - \tau_{xz} \cdot n = 0 \\ &\tau_{xy} \cdot \ell + (\sigma_y - \sigma_n) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n = 0 \\ &\tau_{xz} \cdot \ell + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma_n) \cdot n = 0 \end{aligned}\right\}$$

υπάρχει λύση αν και μόνο αν: $\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ......$

$$\boxed{\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0}$$

3 πραγματικές ρίζες ≡ οι ιδιοτιμές της ορίζουσας ≡ οι κύριες τάσεις του προβλήματος (έστω σ_1, σ_2, σ_3, με $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

Αναλλοίωτες των τάσεων
$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\ I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - (\sigma_x \tau_{yz}^2 + \sigma_y \tau_{xz}^2 + \sigma_z \tau_{xy}^2) \end{cases}$$

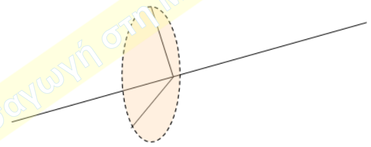
Οι **κύριες διευθύνσεις** (ή οι κύριοι άξονες, επομένως και τα αντίστοιχα επίπεδα πάνω στα οποία δρουν οι τάσεις αυτές - κύρια επίπεδα) προσδιορίζονται ως εξής:

Αντικατάσταση της κύριας τάσης που μας ενδιαφέρει σε 2 από τις 3 εξισώσεις στο πάνω αριστερό τμήμα της διαφάνειας (σχ. 4.19 στις Σημειώσεις) και συμπλήρωση του συστήματος με τη σχέση $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$
Έτσι, έχουμε ένα σύστημα με 3 εξισώσεις και 3 αγνώστους τα συνημίτονα κατεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος το οποίο αναι κάθετο στο κύριο επίπεδο που μας ενδιαφέρει.

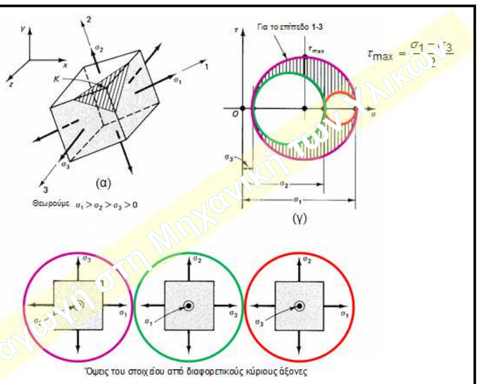
3

Κύκλος Mohr σε τρισδιάστατη εντατική κατάσταση

- Αν οι δύο από τις τρεις κύριες τάσεις είναι ίσες, η τρίτη έχει καθορισμένη διεύθυνση. Στην περίπτωση αυτή οποιεσδήποτε δύο διευθύνσεις κάθετες σε αυτήν αλλά και μεταξύ τους ορίζουν μία τριάδα κυρίων διευθύνσεων. Η αντίστοιχη εντατική κατάσταση ονομάζεται **αξονοσυμμετρική (ή κυλινδρική).**
- Αν και οι τρεις κύριες τάσεις είναι ίσες, τότε οποιαδήποτε τριάδα κάθετων μεταξύ τους διευθύνσεων αποτελεί κύριες διευθύνσεις και η αντίστοιχη εντατική κατάσταση ονομάζεται **υδροστατική (ή σφαιρική).**



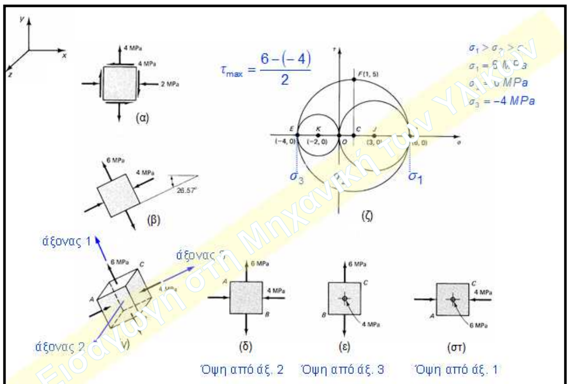
4



Όψεις του στοιχείου από διαφορετικούς κύριους άξονες

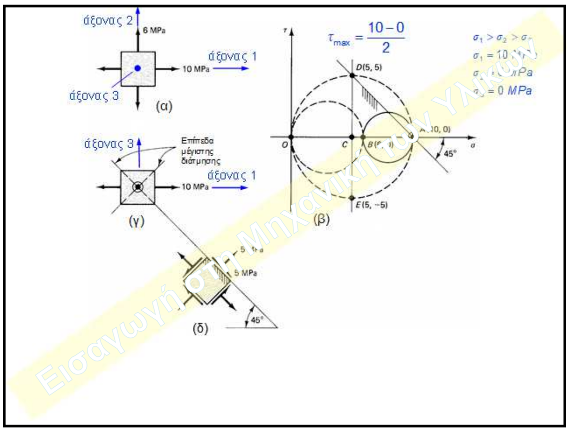
(β)

5

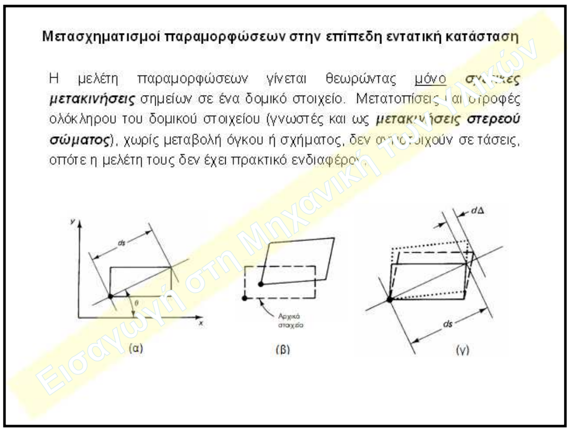


Όψη από άξ. 2 Όψη από άξ. 3 Όψη από άξ. 1

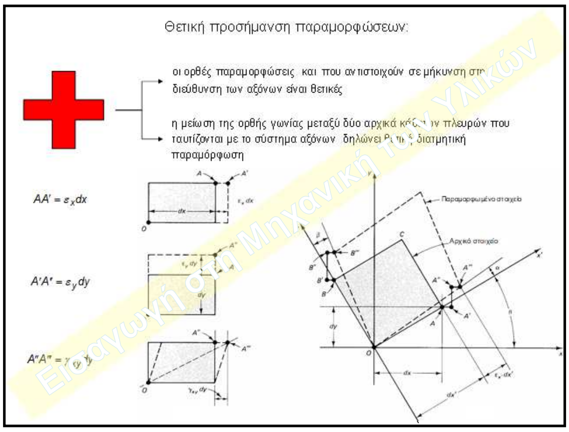
6


άξονας 2
6 MPa
άξονας 1
10 MPa
άξονας 3
(α)
Επίπεδα μέγιστης διάτμησης
(γ)
$\tau_{max} = \frac{10-0}{2}$
D(5, 5)
E(5, −5)
45°
(β)
5 MPa
(δ)

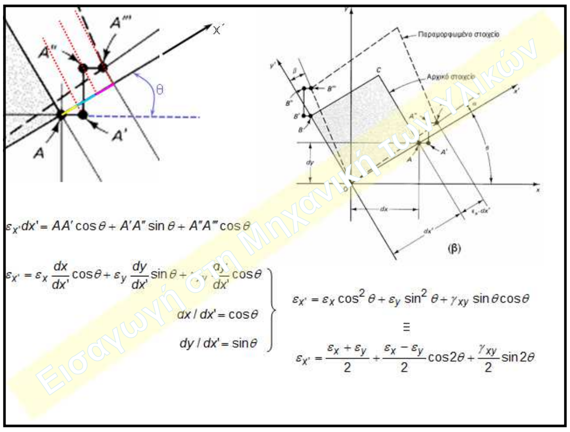
7


Μετασχηματισμοί παραμορφώσεων στην επίπεδη εντατική κατάσταση
Η μελέτη παραμορφώσεων γίνεται θεωρώντας μόνο
μετακινήσεις σημείων σε ένα δομικό στοιχείο.
ολόκληρου του δομικού στοιχείου (γνωστές και ως
σώματος), χωρίς μεταβολή όγκου ή σχήματος, δεν
οπότε η μελέτη τους δεν έχει πρακτικό ενδιαφέρον
ds
Αρχικό στοιχείο
dΔ
(α)
(β)
(γ)

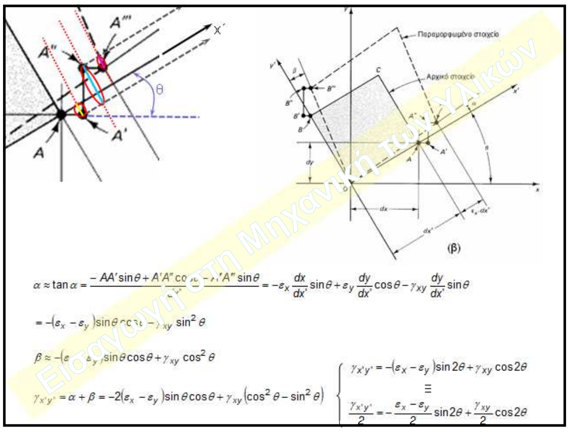
8


Θετική προσήμανση παραμορφώσεων:
οι ορθές παραμορφώσεις και που αντιστοιχούν σε μήκυνση στη
διεύθυνση των αξόνων είναι θετικές
η μείωση της ορθής γωνίας μεταξύ δύο αρχικά κάθετων πλευρών που
ταυτίζονται με το σύστημα αξόνων δηλώνει θετική διατμητική
παραμόρφωση
$AA' = \varepsilon_x dx$
$A'A'' = \varepsilon_y dy$
Παραμορφωμένο στοιχείο
Αρχικό στοιχείο

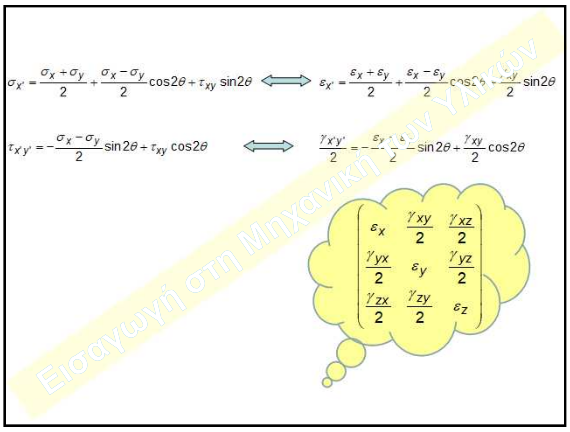
9


Παραμορφωμένο στοιχείο
Αρχικό στοιχείο
θ
(β)
$\varepsilon_{x'} dx' = AA'\cos\theta + A'A''\sin\theta + A''A'''\cos\theta$
$dx / dx' = \cos\theta$
$dy / dx' = \sin\theta$
$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta$
$\equiv$
$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$

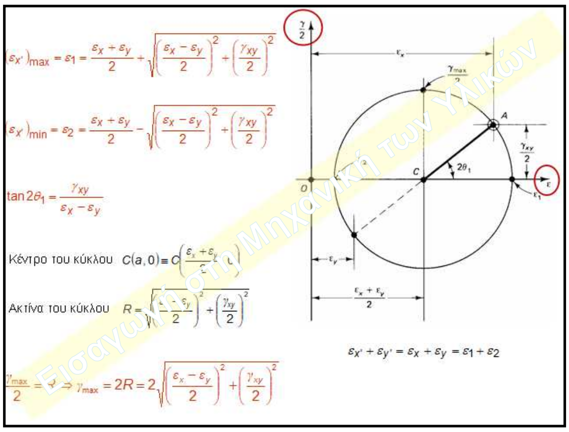
10


Παραμορφωμένο στοιχείο
Αρχικό στοιχείο
θ
(β)
$= -\varepsilon_x \frac{dx}{dx'}\sin\theta + \varepsilon_y \frac{dy}{dx'}\cos\theta - \gamma_{xy}\frac{dy}{dx'}\sin\theta$
$\beta \approx$
$\gamma_{x'y'} = \alpha + \beta = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$
$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta$
$\equiv$
$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$

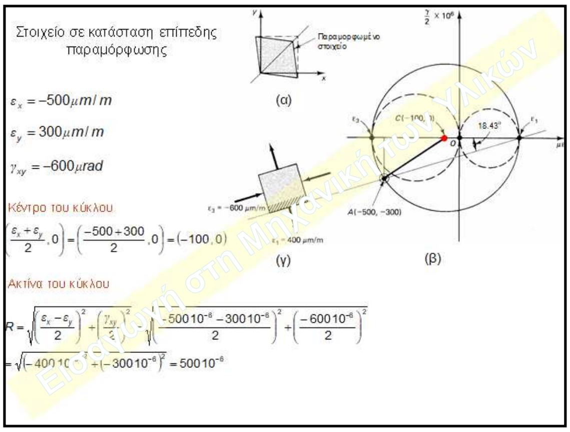
11


$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$
$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}$
$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$
$\frac{\gamma_{x'y'}}{2}$
$\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$
$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$

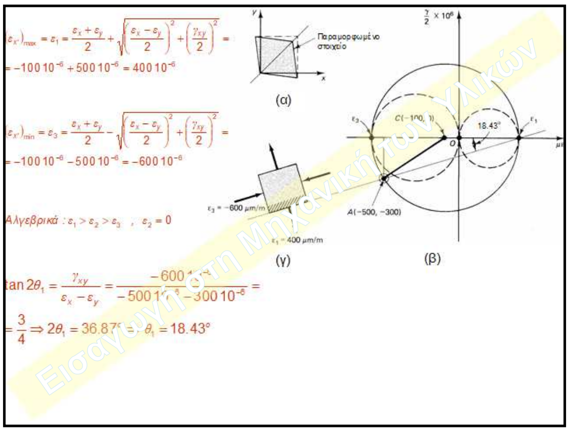
12


$(\varepsilon_{x'})_{max} = \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$
$(\varepsilon_{x'})_{min} = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$
$\tan 2\theta_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$
Κέντρο του κύκλου $C(a,0) \equiv C\left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, 0\right)$
Ακτίνα του κύκλου $R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$
$\frac{\gamma_{max}}{2} = R \Rightarrow \gamma_{max} = 2R = 2\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$
$\frac{\gamma}{2}$
ε_x
$\frac{\gamma_{max}}{2}$
A
$\frac{\gamma_{xy}}{2}$
C
$2\theta_1$
O
ε
ε_1
ε_y
$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$
$\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

13


Στοιχείο σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης
$\varepsilon_x = -500\mu m/m$
$\varepsilon_y = 300\mu m/m$
$\gamma_{xy} = -600\mu rad$
Κέντρο του κύκλου
$\left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, 0\right) = \left(\frac{-500+300}{2}, 0\right) = (-100, 0)$
Ακτίνα του κύκλου
$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-500 10^{-6} - 300 10^{-6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-600 10^{-6}}{2}\right)^2}$
$= \sqrt{(-400 10^{-6})^2 + (-300 10^{-6})^2} = 500 10^{-6}$
Παραμορφωμένο στοιχείο
(α)
$\varepsilon_3 = -600\ \mu m/m$
$\varepsilon_1 = 400\ \mu m/m$
(γ)
$\frac{\gamma}{2} \times 10^6$
C(−100, 0)
18.43°
A(−500, −300)
(β)

14


$(\varepsilon_{x'})_{max} = \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} =$
$= -100 10^{-6} + 500 10^{-6} = 400 10^{-6}$
$(\varepsilon_{x'})_{min} = \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} =$
$= -100 10^{-6} - 500 10^{-6} = -600 10^{-6}$
Αλγεβρικά : $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = 0$
$\tan 2\theta_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{-600 10^{-6}}{-500 10^{-6} - 300 10^{-6}} =$
$= \frac{3}{4} \Rightarrow 2\theta_1 = 36.87° \Rightarrow \theta_1 = 18.43°$
Παραμορφωμένο στοιχείο
(α)
$\varepsilon_3 = -600\ \mu m/m$
$\varepsilon_1 = 400\ \mu m/m$
(γ)
$\frac{\gamma}{2} \times 10^6$
C(−100, 0)
18.43°
A(−500, −300)
(β)

15