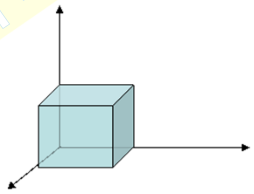
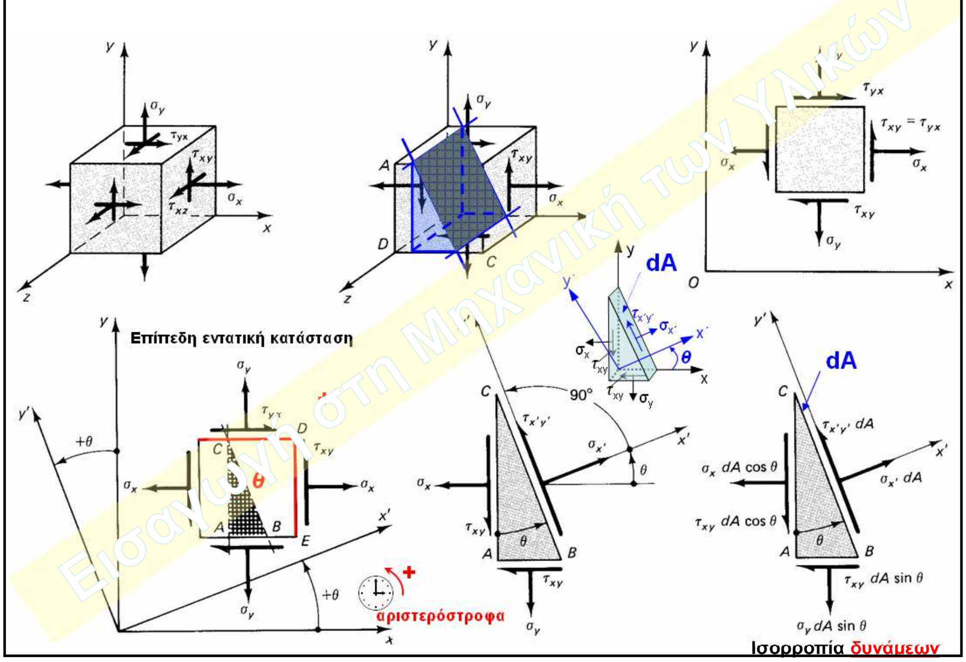
Κεφάλαιο 4

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

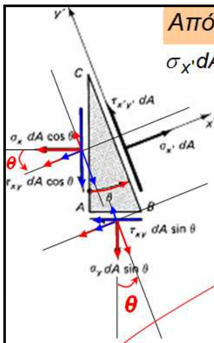


1

Μετασχηματισμοί τάσεων στην επίπεδη εντατική κατάσταση



2



Από $\sum F_{x'} = 0$:

$$\sigma_{x'}dA = \sigma_x dA\cos\theta\cos\theta + \sigma_y dA\sin\theta\sin\theta + \tau_{xy}dA\cos\theta\sin\theta + \tau_{xy}dA\sin\theta\cos\theta \Rightarrow$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta =$$

$$= \sigma_x\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sigma_y\frac{1-\cos 2\theta}{2} + \tau_{xy}\sin 2\theta \Rightarrow$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

όπου $\theta \rightarrow 90^o + \theta$:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

Από $\sum F_{y'} = 0$: $\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$

+

! $\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$ **!**

αναλλοίωτη ποσότητα, ανεξάρτητη του προσανατολισμού των επιπέδων

3

Επίπεδη παραμόρφωση: $\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \cancel{\varepsilon_z} \\ \gamma_{xy} \\ \cancel{\gamma_{yz}} \\ \cancel{\gamma_{zx}} \end{pmatrix}$$

Μη μηδενικές τάσεις

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

αναλλοίωτη ποσότητα, ανεξάρτητη του προσανατολισμού των επιπέδων

4

Επίπεδη εντατική κατάσταση: $\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

Μη μηδενικές τάσεις

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

αναλλοίωτη ποσότητα, ανεξάρτητη του προσανατολισμού των επιπέδων

5

Κύριες τάσεις στην επίπεδη εντατική κατάσταση

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = max/min: \frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

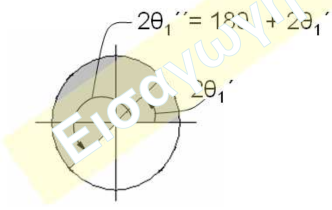
ρίζες: $2\theta_1'$, $2\theta_1''$

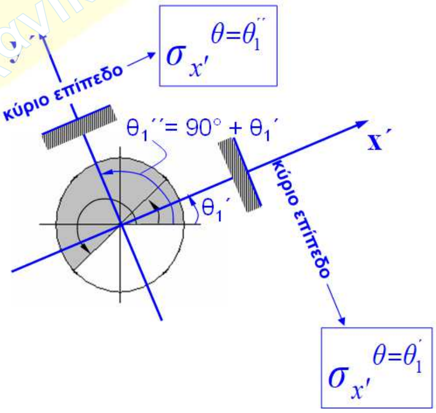
$2\theta_1'$ και $2\theta_1''$ διαφέρουν κατά 180° $\Rightarrow$ θ_1' και θ_1'' διαφέρουν κατά 90°

$\theta_1' \Rightarrow \sigma_{max}$ ή σ_{min}

$\theta_1'' \Rightarrow \sigma_{max}$ ή σ_{min}

$$2\theta_1'' - 2\theta_1' = 180^\circ \qquad \theta_1'' - \theta_1' = 90^\circ$$





6

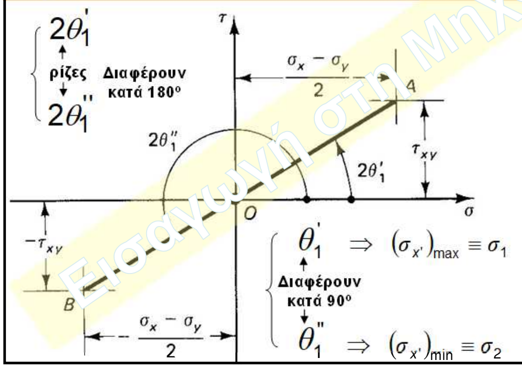
Κύριες τάσεις στην επίπεδη εντατική κατάσταση

$\sigma_{x'} = max/min: \dfrac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_1 = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ — ρίζες: $2\theta_1'$, $2\theta_1''$

$2\theta_1'' - 2\theta_1' = 180^o \Rightarrow \theta_1'' - \theta_1' = 90^o$

Πού ισχύει; : $\tau_{x'y'} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_1 = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

! στα επίπεδα που η ορθή τάση είναι μέγιστη ή ελάχιστη (κύρια επίπεδα) οι διατμητικές τάσεις είναι μηδέν !



$$\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta_1' = -\sin 2\theta_1'' = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_1' = -\cos 2\theta_1'' = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

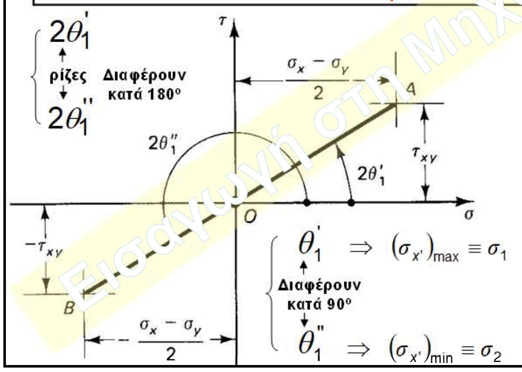
7

Κύριες τάσεις στην επίπεδη εντατική κατάσταση

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$\sigma_{x'}^{\,\theta=\theta_1'}$ $\quad \theta \equiv \theta_1' \Rightarrow \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta_1' + \tau_{xy}\sin 2\theta_1'$

$$(\sigma_{x'})_{max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$ → **μέγιστη ορθή τάση**



$$\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta_1' = -\sin 2\theta_1'' = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_1' = -\cos 2\theta_1'' = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

8

Κύριες τάσεις στην επίπεδη εντατική κατάσταση

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

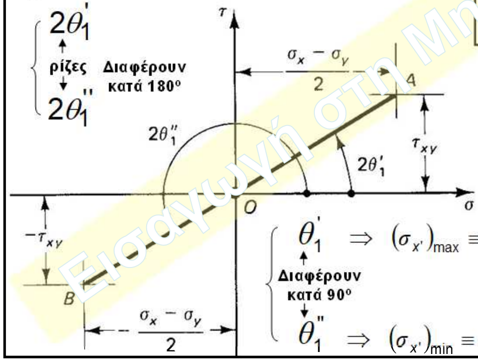
$\theta_1'' - \theta_1' = 90^o$

$\sigma_{x'}^{\theta=\theta_1''}$ $\quad \theta \equiv \theta_1'' \Rightarrow \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta_1'' + \tau_{xy}\sin 2\theta_1''$

$$(\sigma_{x'})_{min} = (\sigma_{y'})_{max} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \rightarrow$$ **ελάχιστη ορθή τάση**

$$\sigma_x+\sigma_y = \sigma_1+\sigma_2 \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_x+\sigma_y-\sigma_1$$

$2\theta_1'$, $2\theta_1''$: **ρίζες** — **Διαφέρουν κατά 180°**



$$\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta_1' = -\sin 2\theta_1'' = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_1' = -\cos 2\theta_1'' = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$\theta_1' \Rightarrow (\sigma_{x'})_{max} \equiv \sigma_1$

Διαφέρουν κατά 90°

$\theta_1'' \Rightarrow (\sigma_{x'})_{min} \equiv \sigma_2$

9

Μέγιστες διατμητικές τάσεις στην επίπεδη εντατική κατάσταση

$$\tau_{xy} = max/min: \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}2\cos 2\theta - 2\tau_{xy}\sin 2\theta = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_2 = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$2\theta_2'$, $2\theta_2''$: **ρίζες**

$2\theta_2'$, $2\theta_2''$ **Διαφέρουν κατά 180°** $\Rightarrow$ $\theta_2' \Rightarrow \tau_{max}$ ή τ_{min}; **Διαφέρουν κατά 90°**; $\theta_2'' \Rightarrow \tau_{max}$ ή τ_{min}

τα επίπεδα της μέγιστης & ελάχιστης διατμητικής τάσης σχηματίζουν 45° προς τα κύρια επίπεδα

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\tan 2\theta_2 = -1/\tan 2\theta_1 \Rightarrow$$

$$2\theta_2 - 2\theta_1 = 90^o \Leftrightarrow \theta_2 - \theta_1 = 45^o$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\tau_{max} = +\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{min} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

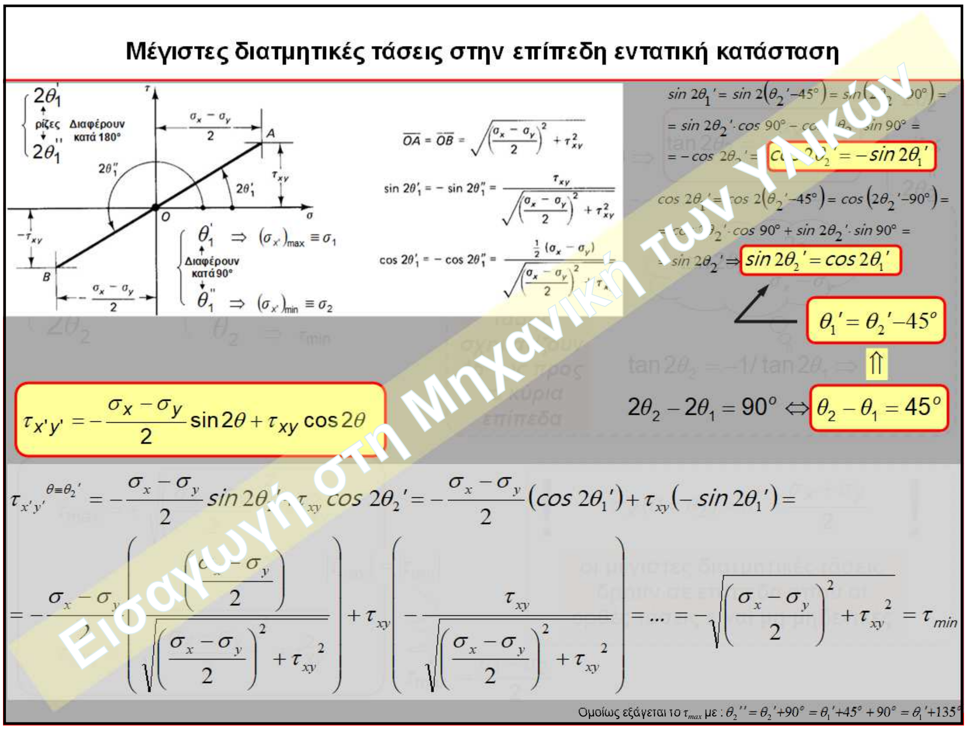
$$|\tau_{max}| = |\tau_{min}|$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

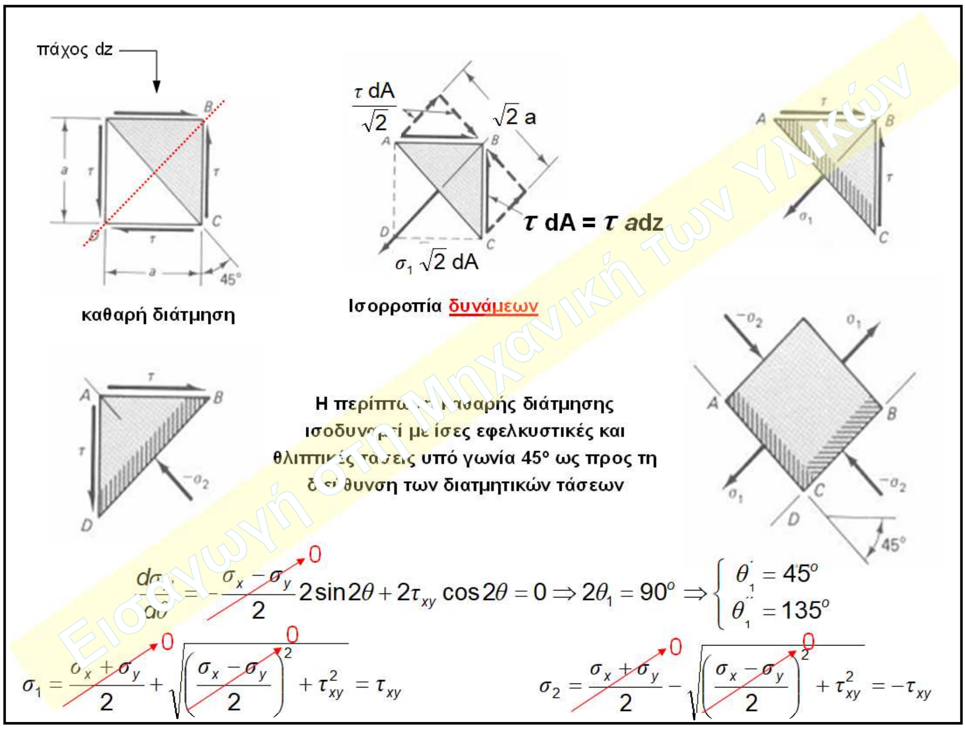
! $\sigma_{x'}(\theta=\theta_2) = \sigma' = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ **!**

οι μέγιστες διατμητικές τάσεις δρουν σε επίπεδα όπου οι ορθές τάσεις είναι μη μηδενικές

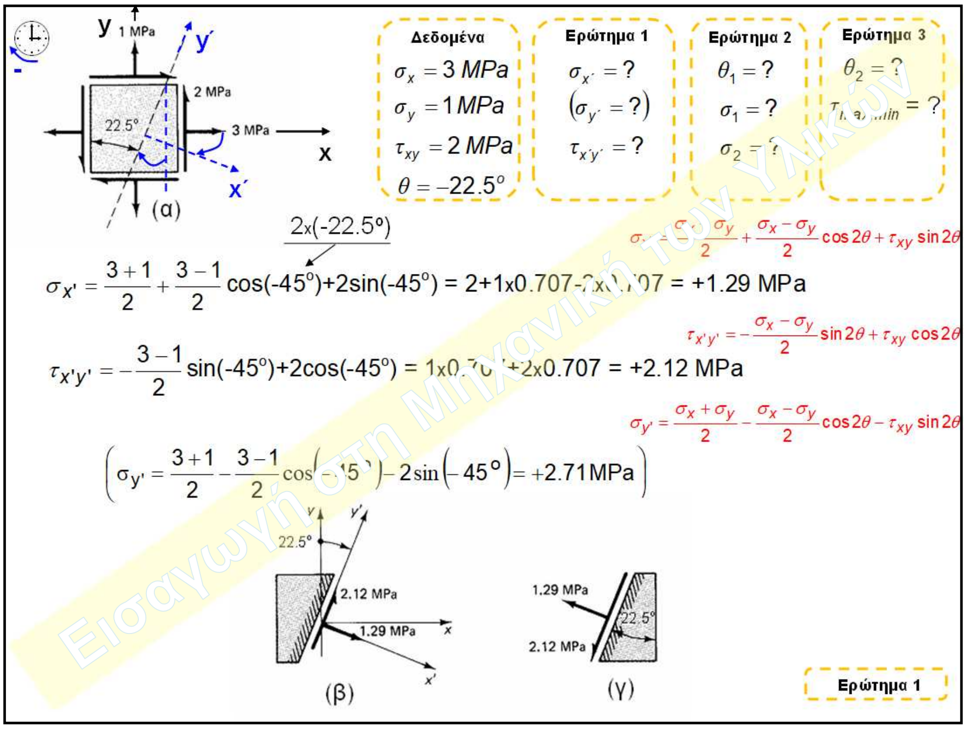
10


Μέγιστες διατμητικές τάσεις στην επίπεδη εντατική κατάσταση
ρίζες διαφέρουν κατά 180°
Διαφέρουν κατά 90°
$\theta_1' \Rightarrow (\sigma_{x'})_{max} \equiv \sigma_1$
$\theta_1'' \Rightarrow (\sigma_{x'})_{min} \equiv \sigma_2$
$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$
$\sin 2\theta_2' = \cos 2\theta_1'$
$\cos 2\theta_2' = -\sin 2\theta_1'$
$\theta_1' = \theta_2' - 45^o$
$2\theta_2 - 2\theta_1 = 90^o \Leftrightarrow \theta_2 - \theta_1 = 45^o$
$= \dots = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \tau_{min}$
Ομοίως εξάγεται το τ_{max} με : $\theta_2'' = \theta_2' + 90^o = \theta_1' + 45^o + 90^o = \theta_1' + 135^o$
Εισαγωγή στη Μηχανική των Υλικών

11

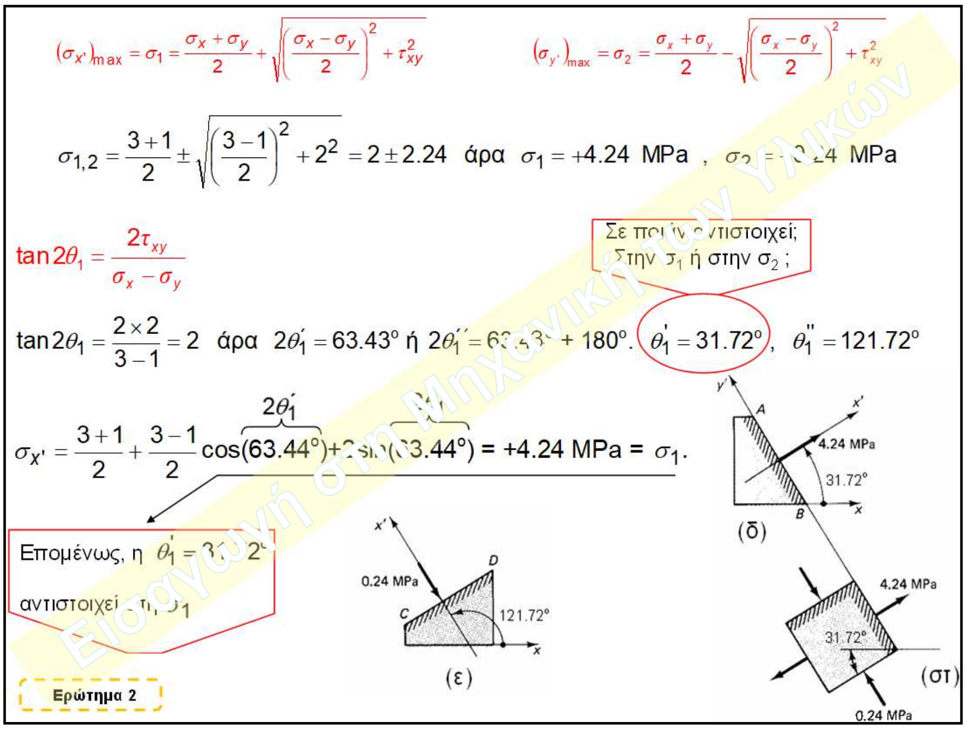

πάχος dz
καθαρή διάτμηση
$\tau\, dA = \tau\, adz$
Ισορροπία δυνάμεων
Η περίπτωση καθαρής διάτμησης ισοδυναμεί με ίσες εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις υπό γωνία 45° ως προς τη διεύθυνση των διατμητικών τάσεων
$\theta_1' = 45^o$
$\theta_1'' = 135^o$
$\sigma_1 = \tau_{xy}$
$\sigma_2 = -\tau_{xy}$
Εισαγωγή στη Μηχανική των Υλικών

12



Δεδομένα
$\sigma_x = 3\ MPa$
$\sigma_y = 1\ MPa$
$\tau_{xy} = 2\ MPa$
$\theta = -22.5^o$
Ερώτημα 1
$\sigma_{x'} = ?$
$(\sigma_{y'} = ?)$
$\tau_{x'y'} = ?$
Ερώτημα 2
$\theta_1 = ?$
$\sigma_1 = ?$
$\sigma_2 = ?$
Ερώτημα 3
$\theta_2 = ?$
$\tau_{max,min} = ?$
1 MPa
2 MPa
3 MPa
22.5°
(α)
2x(-22.5°)
$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$
$\sigma_{x'} = \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2}\cos(-45^o) + 2\sin(-45^o) = 2+1x0.707-2x0.707 = +1.29\ MPa$
$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$
$\tau_{x'y'} = -\frac{3-1}{2}\sin(-45^o) + 2\cos(-45^o) = 1x0.707+2x0.707 = +2.12\ MPa$
$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$
$\left(\sigma_{y'} = \frac{3+1}{2} - \frac{3-1}{2}\cos(-45^o) - 2\sin(-45^o) = +2.71\ MPa\right)$
22.5°
2.12 MPa
1.29 MPa
(β)
1.29 MPa
2.12 MPa
22.5°
(γ)
Ερώτημα 1

13



$(\sigma_{x'})_{max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
$(\sigma_{y'})_{max} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
$\sigma_{1,2} = \frac{3+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3-1}{2}\right)^2 + 2^2} = 2 \pm 2.24$ άρα $\sigma_1 = +4.24\ MPa$, $\sigma_2 = -0.24\ MPa$
$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$
Σε ποιάν αντιστοιχεί; Στην σ_1 ή στην σ_2 ;
$\tan 2\theta_1 = \frac{2\times 2}{3-1} = 2$ άρα $2\theta_1' = 63.43^o$ ή $2\theta_1'' = 63.43^o + 180^o$. $\theta_1' = 31.72^o$, $\theta_1'' = 121.72^o$
$\sigma_{x'} = \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2}\cos(63.44^o) + 2\sin(63.44^o) = +4.24\ MPa = \sigma_1$.
Επομένως, η $\theta_1' = 31.72^o$ αντιστοιχεί στη σ_1
4.24 MPa
31.72°
(δ)
0.24 MPa
121.72°
(ε)
4.24 MPa
31.72°
0.24 MPa
(στ)
Ερώτημα 2

14

Ερώτημα 3

$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{3-1}{2}\right)^2 + 2^2} = 2.24$ MPa $\qquad \tau_{\max} = +\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$\tan 2\theta_2 = -\frac{3-1}{2 \times 2} = -0.5$ άρα $2\theta_2' = 153.44^\circ$ ή $2\theta_2'' = 153.44^\circ + 180^\circ$. $\qquad \tan 2\theta_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

Έτσι $\theta_2' = 76.72^\circ$, $\theta_2'' = 166.72^\circ$. $\qquad \left(\theta_1' = 31.72^\circ \Rightarrow \theta_1' + 45^\circ = 76.72^\circ = \theta_2'\right)$

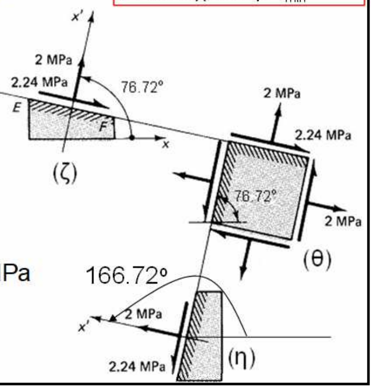
Σε ποιάν αντιστοιχεί; Στην τ_{max} ή στην τ_{min};

$\tau_{x'y'} = -\frac{3-1}{2}\sin\underbrace{153.44^\circ}_{2\theta_2'} + 2\cos\underbrace{153.44^\circ}_{2\theta_2'} = -2.24$ MPa

Επομένως, η $\theta_2' = 76.72^\circ$ αντιστοιχεί στην τ_{min}

$\sigma' = \frac{3+1}{2} = 2$ MPa

$\sigma' + \sigma' = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$ (2 + 2 = 3 + 1 = 4.24 – 0.24).



Μητρωική έκφραση των τάσεων

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 4.24 & 0 \\ 0 & -0.24 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 2 & -2.24 \\ -2.24 & 2 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

15