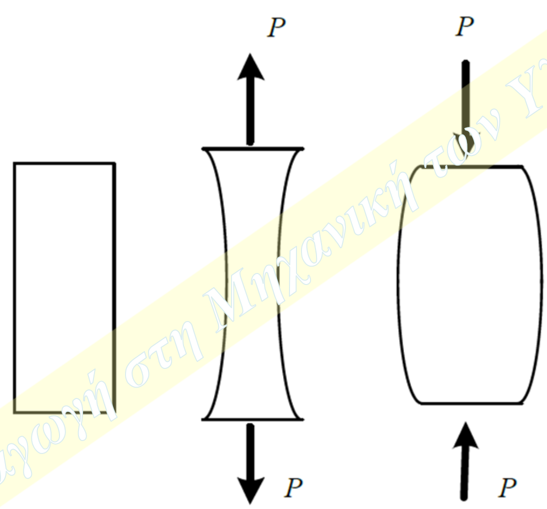
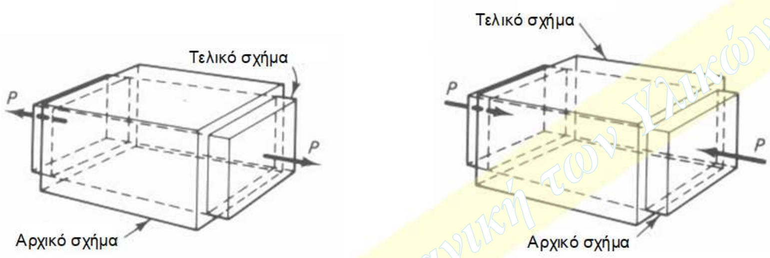
Περιεχόμενα

1. Ορθές και διατμητικές τάσεις, σχεδιασμός δομικών στοιχείων
2. Αξονική καταπόνηση
3. Γενικευμένες σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων, λεπτότοιχα κελύφη
4. Μετασχηματισμοί τάσεων και παραμορφώσεων
5. Θεωρίες αστοχίας υλικών
6. Εισαγωγή στη στρέψη

Φαινόμενο Poisson



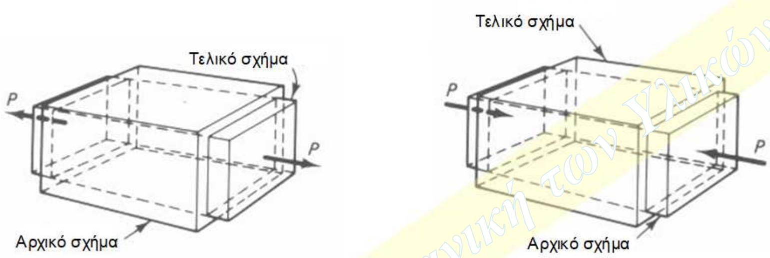
Λόγος Poisson



Λόγος Poisson $\nu = -\dfrac{\varepsilon_t}{\varepsilon_x}$

Η τιμή του ν λαμβάνεται συνήθως ίδια τόσο στον εφελκυσμό (εγκάρσια συστολή), όσο και στη θλίψη (εγκάρσια διόγκωση)

Λόγος Poisson



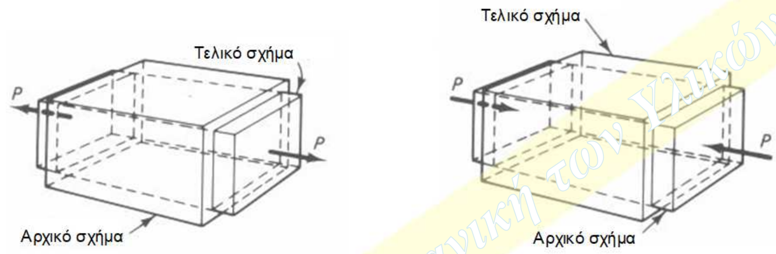
Λόγος Poisson

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_x}$$

Η τιμή του ν λαμβάνεται συνήθως ίδια τόσο στον εφελκυσμό (εγκάρσια συστολή), όσο και στη θλίψη (εγκάρσια διόγκωση)

Η ανάπτυξη εγκάρσιας παραμόρφωσης δεν συνεπάγεται και αντίστοιχη τάση !!! Προϋπόθεση, βεβαίως, για να ισχύει αυτό είναι να γίνεται η εγκάρσια παραμόρφωση **ανεμπόδιστα**. Σε κάθε άλλη περίπτωση θα προκύψουν και εγκάρσιες τάσεις.

Λόγος Poisson

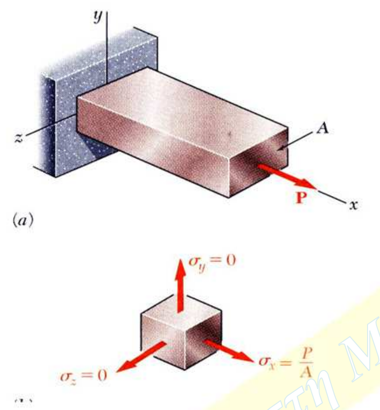


Λόγος Poisson

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_x}$$

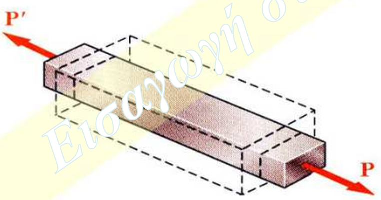
Η τιμή του ν λαμβάνεται συνήθως ίδια τόσο στον εφελκυσμό (εγκάρσια συστολή), όσο και στη θλίψη (εγκάρσια διόγκωση)

Για τα συνήθη υλικά : $0 \le \nu \le 0.5$



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$$



Simeon Denis Poisson
(1781-1840)

$$\nu = \left|\frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}}\right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$\Delta = 0.219$ mm

$P = 100$ kN

$|\Delta D| = 0.01215$ mm

$\nu = ?$

$E = ?$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta D}{D} = \frac{-0.01215}{50} = -0.000243$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{L} = \frac{0.219}{300} = 0.00073$$

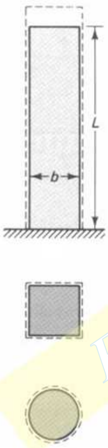
$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_x} = -\frac{-0.000243}{0.00073} = 0.333$$

$$E = \frac{PL}{A\Delta} = \frac{100 \times 10^3 \times 300}{1960 \times 0.219} = 70 \times 10^3\ MPa$$

Θερμικές παραμορφώσεις

$$\varepsilon_T = \alpha\left(T - T_o\right) = \alpha \Delta T$$

συντελεστής θερμικής διαστολής



(α)

(β)

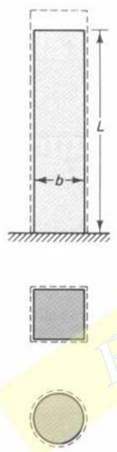
(γ)

- Γενικά η αύξηση της θερμοκρασίας στα υλικά προκαλεί διαστολή και η μείωση προκαλεί συστολή.
- Οι θερμικές παραμορφώσεις στα ισότροπα υλικά είναι ίσες προς κάθε διεύθυνση.
- Επίσης, οι θερμικές παραμορφώσεις γενικώς δεν συνοδεύονται από τάσεις, αρκεί φυσικά να γίνονται ανεμπόδιστα.

Υλικό	α (°C)$^{-1}$ x 10^{-6}
Αλουμίνιο	24
Γυαλί κοινό	9
Γυαλί pyrex	3,2
Κράμα invar	0
Μόλυβδος	29
Σίδηρος	12
Σκυρόδεμα	12
Χαλαζίας	0
Χαλκός	17

Θερμικές παραμορφώσεις

$$\varepsilon_T = \alpha\left(T - T_o\right) = \alpha\Delta T$$

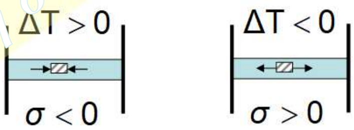


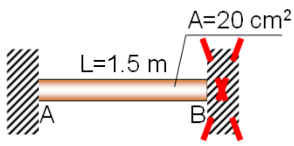
(α)

(β)

(γ)

$$\Delta_T = \varepsilon_T L = \alpha\Delta T L$$





$T_{αρχ.}$=20°C

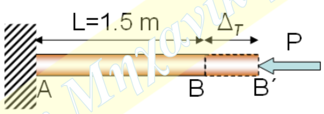
E =120 GPa

α = 20x10⁻⁶ grad⁻¹

$\sigma_{T=20^oC} = 0\,\text{MPa}$

$\sigma_{T=45^oC} = ?\,\text{MPa}$

$|\Delta T| = |45 - 20| = 25^oC$

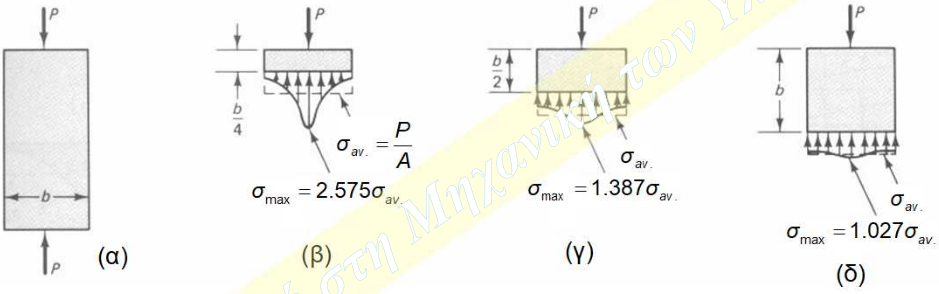


$$\Delta_T = \varepsilon_T L = \alpha\Delta T L = 20\times10^{-6}\times1.5\times25 = 0.75\,\text{mm}$$

$$P = \frac{\Delta_T}{L}EA = \frac{0.75}{1500}\times120\times10^3\times20\times10^2 = 120\,k\text{N}$$

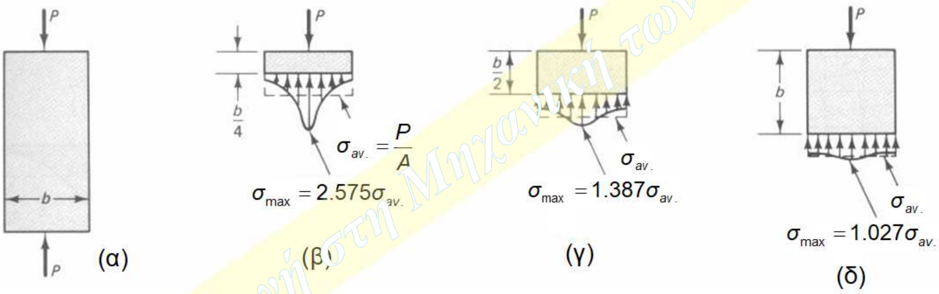
$$\boxed{\sigma_{T=45^oC} = \frac{P}{A} = \frac{120000}{20\times10^2} = 60\,\text{MPa}}$$

Αρχή Saint Venant και συγκεντρώσεις τάσεων



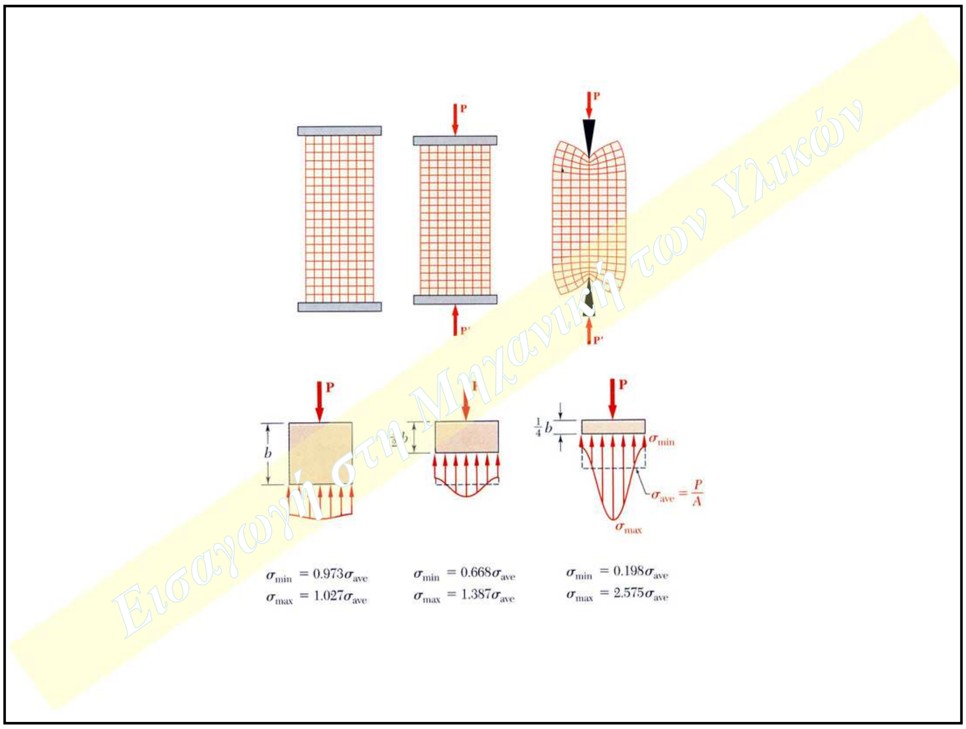
Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886)

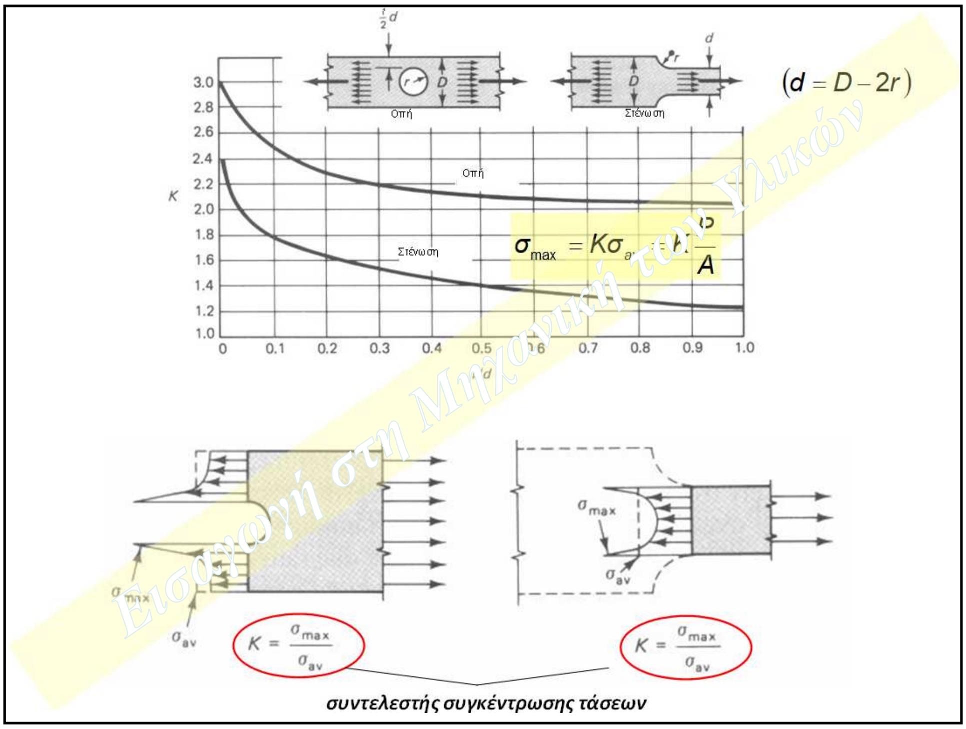
Αρχή Saint Venant και συγκεντρώσεις τάσεων

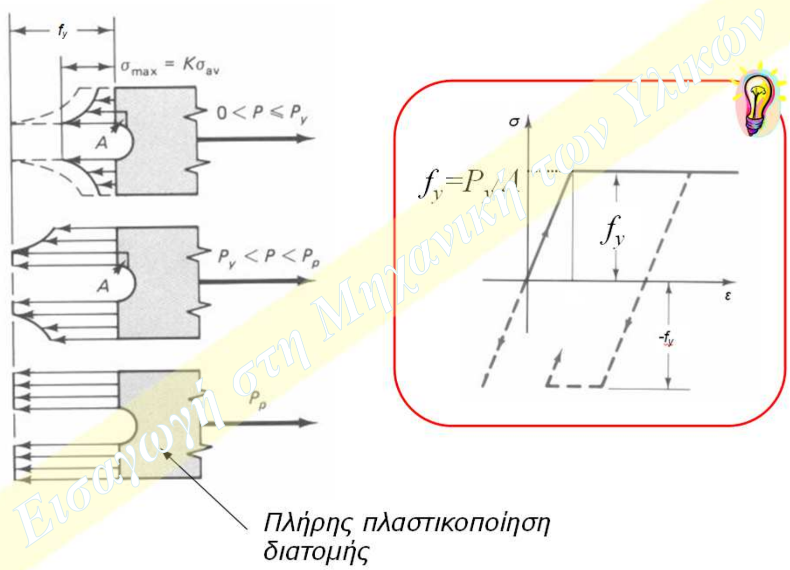


Αν οι δυνάμεις ασκούνται "σημειακά", δηλαδή σε μία πολύ μικρή επιφάνεια στο εξωτερικό ενός στοιχείου, οι ορθές τάσεις σε διατομές κοντά στη θέση εφαρμογής της δύναμης έχουν ανομοιόμορφη κατανομή και η μέγιστη τάση σ_{max} μπορεί να είναι αρκετές φορές μεγαλύτερη της μέσης $\sigma_{av.}$ = P/A.

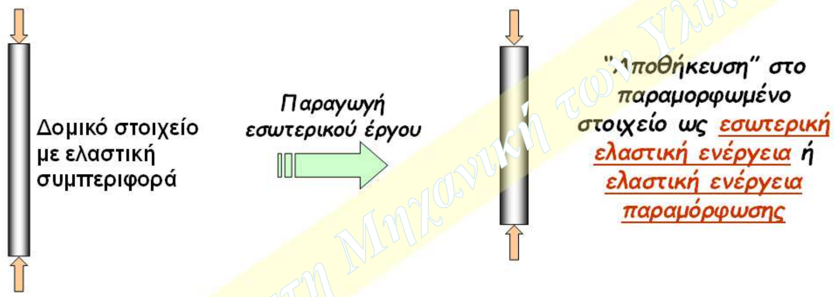
Σε διατομές που απέχουν απόσταση μεγαλύτερη από το πλάτος (κατά προσέγγιση) της φορτιζόμενης διατομής η κατανομή των τάσεων ομαλοποιείται, έτσι ώστε $\sigma \approx \sigma_{av.}$


P
P'
b
$\frac{1}{2}b$
$\frac{1}{4}b$
σ_{min}
$\sigma_{ave} = \frac{P}{A}$
σ_{max}
$\sigma_{min} = 0.973\sigma_{ave}$
$\sigma_{max} = 1.027\sigma_{ave}$
$\sigma_{min} = 0.668\sigma_{ave}$
$\sigma_{max} = 1.387\sigma_{ave}$
$\sigma_{min} = 0.198\sigma_{ave}$
$\sigma_{max} = 2.575\sigma_{ave}$
Εισαγωγή στη Μηχανική των Υλικών

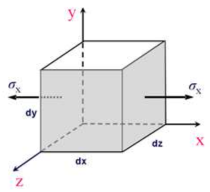

$\frac{1}{2}d$
Οπή
Στένωση
$(d = D - 2r)$
K
Οπή
Στένωση
$\sigma_{max} = K\sigma_{av} = K\frac{P}{A}$
$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{av}}$
$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{av}}$
συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων
Εισαγωγή στη Μηχανική των Υλικών

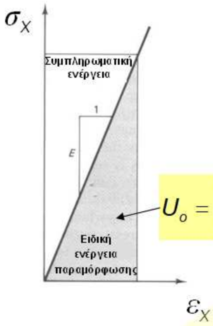


Ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης και δυσθραυστότητα για αξονική φόρτιση



ΕΡΓΟ = $\underbrace{\text{ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ}}_{\text{τάση x επιφάνεια}}$ x ΠΡΟΚΑΛΟΥΜΕΝΗ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗ





$$U_o = \frac{1}{2}\varepsilon_x\sigma_x = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x}{E}\sigma_x = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$

$$U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dV$$

Απώλειες ενέργειας = 0

Μέση δύναμη $= (1/2)\sigma_x dydz$

Μετακίνηση $= \varepsilon_x dx$

Παραγόμενο έργο $= (1/2)\sigma_x dydz \times \varepsilon_x d_x \equiv dU$ (ενέργεια παραμόρφωσης)

$$dU = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\sigma_x dydz}_{\text{δύναμη}} \cdot \underbrace{\varepsilon_x dx}_{\text{απόσταση}}}_{\text{έργο}} = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x dxdydz = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x dV$$

Όγκος στοιχείου

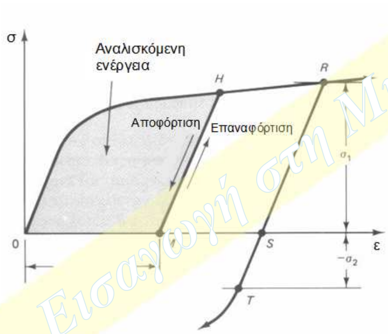
ειδική ενέργεια παραμόρφωσης ή πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης

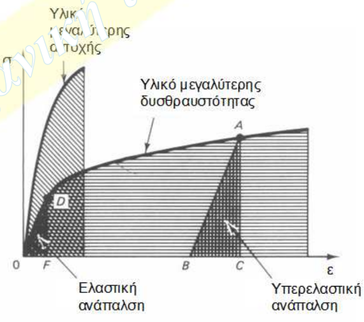
$$U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x\varepsilon_x}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$

$$U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x\varepsilon_x}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$

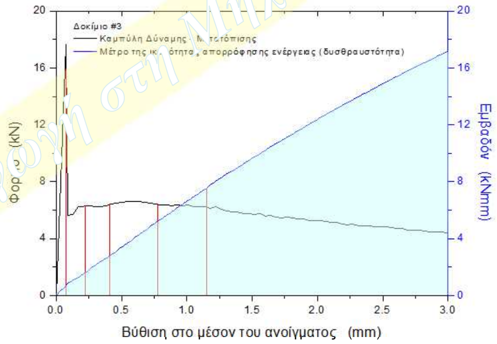
για $\sigma_x = \sigma_y \Rightarrow$ Μέτρο ανάπαλσης: $\boxed{U_o = \dfrac{\sigma_y^2}{2E}}$ μέτρο της ενέργειας που αποθηκεύει το υλικό χωρίς να υφίσταται παραμένουσα παραμόρφωση

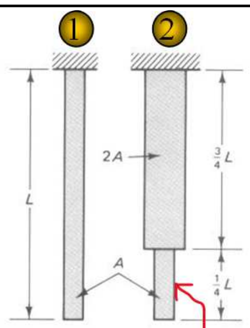
Όριο διαρροής





Πειραματικός Προσδιορισμός Ενεργειακών Δεικτών Δυσθραυστότητας Ινοπλισμένου Σκυροδέματος





Οι ελαστικές ράβδοι του Σχήματος φορτίζονται αξονικά αποθηκεύοντας την ίδια ποσότητα ενέργειας

$$U_1 = \int_V \frac{\sigma_1^2}{2E}\,dV = \frac{\sigma_1^2 AL}{2E} \qquad V_1$$

$$U_1 = U_2$$

$$\sigma_1 = ? \times \sigma_2$$

$$U_2 = U_{\text{κάτω τμήμα}} + U_{\text{πάνω τμήμα}} \qquad V_{\text{κάτω τμήμα}} = \frac{1}{4}AL$$

$$U_{\text{κάτω τμήμα}} = \int_{V_{\text{κάτω τμήμα}}} \frac{\sigma_2^2}{2E}\,dV_{\text{κάτω τμήμα}}$$

$$V_{\text{πάνω τμήμα}} = \frac{3}{4}2AL = \frac{3}{2}AL$$

$$U_{\text{πάνω τμήμα}} = \int_{V_{\text{πάνω τμήμα}}} \frac{(\sigma_2/2)^2}{2E}\,dV_{\text{πάνω τμήμα}}$$

$$U_2 = \frac{\sigma_2^2}{2E}\left(\frac{5}{8}AL\right)$$

$$U_1 = U_2 \Leftrightarrow \frac{\sigma_1^2 AL}{2E} = \frac{\sigma_2^2}{2E}\left(\frac{5}{8}AL\right) \Rightarrow \sigma_2 = 1.265\sigma_1$$

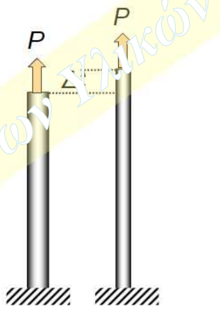
Εισαγωγή στις ενεργειακές μεθόδους για τον υπολογισμό μετακινήσεων

$$U = W_e$$

$$W_e = \frac{1}{2} P\Delta$$

$$U = \sum_i \frac{(N_i / A_i)^2 A_i L_i}{2E} = \frac{1}{2} P\Delta \Rightarrow \frac{\sum_i N_i^2 L_i}{2A_i E} = \frac{1}{2} P\Delta$$

για κατασκευές αποτελούμενες από αξονικά φορτιζόμενα στοιχεία



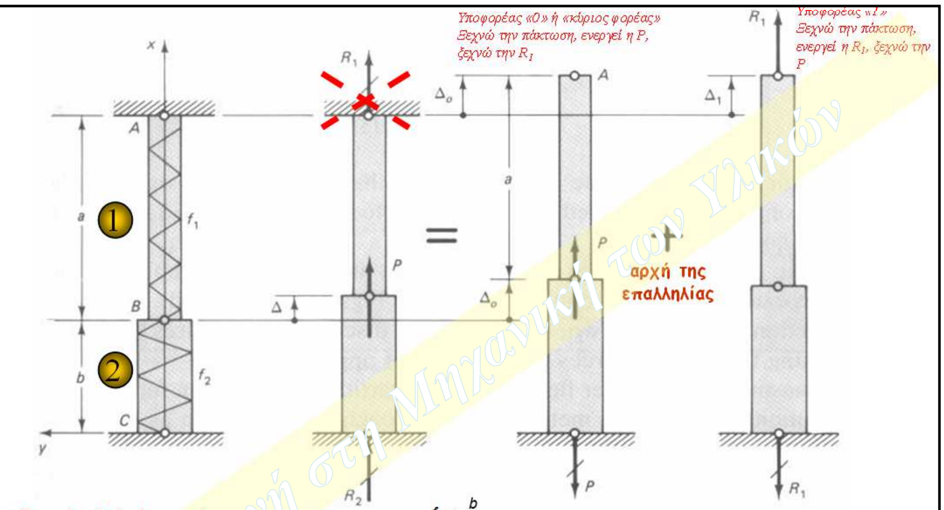
$$U = W_e \Rightarrow \frac{\sigma_1^2 AL}{2E} = \frac{1}{2} P\Delta \Rightarrow \frac{(P/A)^2 AL}{2E} = \frac{1}{2} P\Delta \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{PL}{AE}}$$

Εισαγωγή στους στατικά αόριστους φορείς

Οι εξισώσεις ισορροπίας δεν «φτάνουν»….

Η μέθοδος των δυνάμεων

1. *Αγνοείται η ύπαρξη ενός συγκεκριμένου αριθμού αντιδράσεων στις στηρίξεις του φορέα, ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός των υπολοίπων βάσει των εξισώσεων ισορροπίας.*
2. *Υπολογίζονται οι αντιδράσεις που αρχικά αγνοήθηκαν, μέσω της επιβολής του <u>συμβιβαστού των παραμορφώσεων</u> στις προαναφερθείσες στηρίξεις.*



Υποφορέας «0» ή «κύριος φορέας»

Λόγω της δύναμης P : $\Delta_0 = \dfrac{Pb}{A_2E_2} \overset{f_2=\frac{b}{A_2E_2}}{\Rightarrow} \Delta_0 = f_2 \times P$

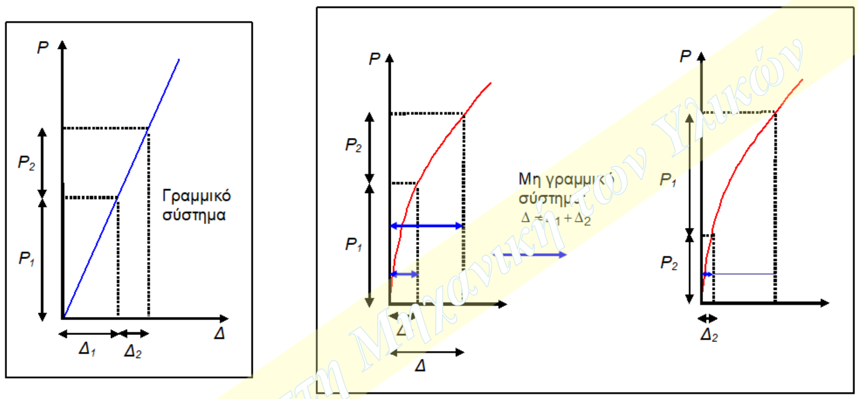
Υποφορέας «1»

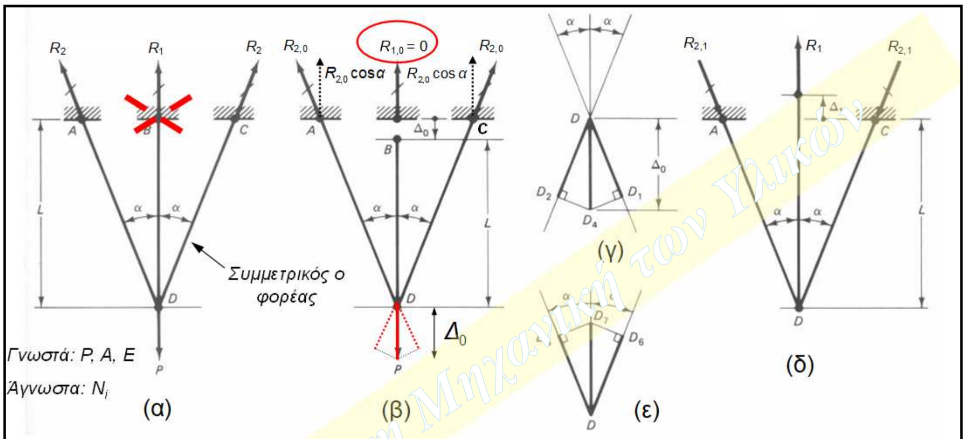
Λόγω της αντίδρασης R_1 : $\Delta_1 = f_1R_1 + f_2R_1 \Rightarrow \Delta_1 = (f_1 + f_2)R_1$

$\Delta_0 + \Delta_1 = 0$
συμβιβαστό των
παραμορφώσεων

$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow R_1 + R_2 + P = 0$

$R_1 = -\dfrac{f_2}{f_1 + f_2}P$





"κύριος φορέας"

$$\sum F_Y = 0 \Leftrightarrow 2R_{2,0}\cos\alpha = P \Rightarrow R_{2,0} = \frac{P}{2\cos\alpha}$$

$$L_{AD} = L_{CD} = \frac{L}{\cos\alpha}$$

$$(\Delta_{AD})_0 = \frac{R_{2,0}L_{AD}}{AE} = \frac{PL}{2AE\cos^2\alpha} = (\Delta_{CD})_0$$

$$\Delta_0\cos\alpha = (\Delta_{AD})_0 \Rightarrow \Delta_0 = -PL/2AE\cos^3\alpha$$

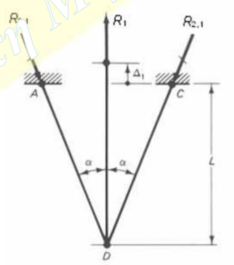
$$\Delta_1 = \frac{R_1L}{AE} + \frac{R_1L}{2AE\cos^3\alpha}$$

συμβιβαστό των παραμορφώσεων → $\Delta_0 + \Delta_1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_0 = -PL/2AE\cos^3\alpha \\ \Delta_1 = \dfrac{R_1L}{AE} + \dfrac{R_1L}{2AE\cos^3\alpha} \\ \Delta_0 + \Delta_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R_1L}{AE}\left(1 + \frac{1}{2\cos^3\alpha}\right) = \frac{PL}{2AE\cos^3\alpha} \Leftrightarrow R_1 = \frac{P}{2\cos^3\alpha}$$

$$R_1 + 2R_2\cos\alpha = P$$

$$\boxed{R_1 = \frac{P}{2\cos^3\alpha + 1} \qquad R_2 = \frac{P}{2\cos^3\alpha + 1}\cos^2\alpha}$$



Η μέθοδος των μετακινήσεων

1. Προσδιορίζονται οι μετακινήσεις του φορέα σε επιλεγμένες θέσεις.
2. Υπολογίζονται οι αντιδράσεις και οι εσωτερικές δυνάμεις.

Ισορροπία κόμβου B

$$-k_1\Delta - k_2\Delta + P = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{P}{k_1+k_2}$$

Ισορροπία κόμβου A

$$R_1 = -k_1\Delta$$

Ισορροπία κόμβου C

$$R_2 = -k_2\Delta$$

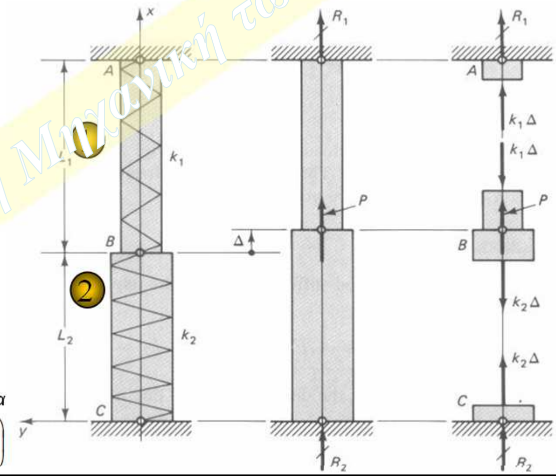
$$R_1 = -\frac{k_1}{k_1+k_2}P$$

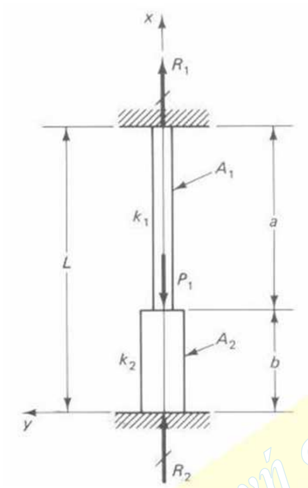
$$R_2 = -\frac{k_2}{k_1+k_2}P$$

$$\boxed{\Delta = \frac{PL}{AE} \Leftrightarrow P = \left(\frac{AE}{L}\right)\Delta \overset{k=\left(\frac{AE}{L}\right)}{\Leftrightarrow} P = k\Delta}$$

Δυστένεια

$$k = \left(\frac{AE}{L}\right)$$





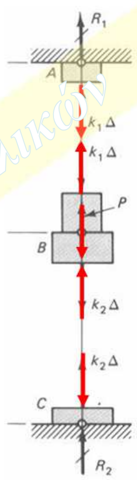
$$k_1 = A_1E_1 / a$$

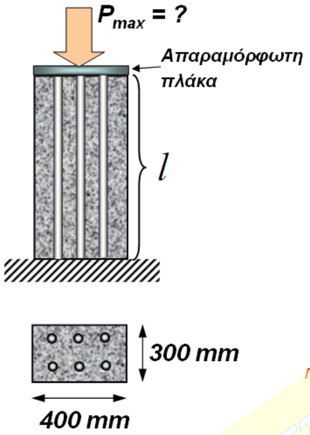
$$k_2 = A_2E_2 / b$$

$$k_1\Delta + k_2\Delta - P = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{P}{k_1+k_2}$$

$$R_1 = k_1\Delta = k_1\frac{P}{k_1+k_2} = \frac{P}{1+\frac{k_2}{k_1}}$$

$$R_2 = \frac{k_2}{k_1+k_2}P = \frac{P}{\frac{k_1}{k_2}+1}$$





$$A = 12 \times 10^4\ mm^2$$

$$A_\chi = 2\% \times A = 2400\, mm^2$$

$$A_c = A - A_\chi = 117600\, mm^2$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi.,\chi} = \frac{\sigma_{\theta\rho.,\chi}}{\Sigma.A.} = \frac{330}{3} = 110\ MPa$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi.,c} = \frac{\sigma_{\theta\rho.,c}}{\Sigma.A.} = \frac{24}{3} = 8\ MPa$$

Σ.Α. = 3
A_χ = 2% A
E_χ = 200 GPa
$\sigma_{\theta\rho.,\chi}$ = 330 MPa
E_c = 20 GPa
$\sigma_{\theta\rho.,c}$ = 24 MPa

συμβιβαστό των παραμορφώσεων $\longrightarrow$ $\Delta l_\chi = \Delta l_c$

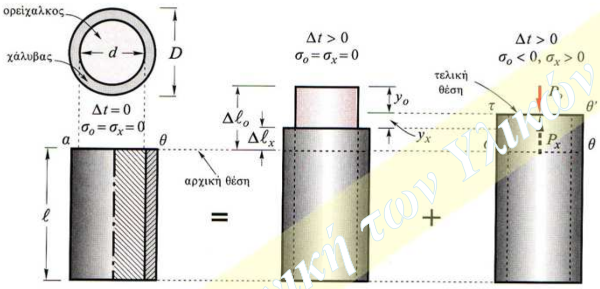
$$\frac{P_\chi l}{E_\chi A_\chi} = \frac{P_c l}{E_c A_c} \Leftrightarrow \frac{\sigma_\chi}{E_\chi} = \frac{\sigma_c}{E_c} \Leftrightarrow \sigma_\chi = \frac{E_\chi}{E_c}\sigma_c = 10\sigma_c$$

$$Αν\ \sigma_c = \sigma_{\varepsilon\pi.,c} \Rightarrow \sigma_\chi = 80\ MPa$$

$$(Αν\ \sigma_\chi = \sigma_{\varepsilon\pi.,\chi} \Rightarrow \sigma_c = 11\, MPa > 8\ MPa \rightarrow αδύνατο)$$

$$P_{max} = P_\chi + P_c = \sigma_\chi A_\chi + \sigma_{\varepsilon\pi.,c} A_c =$$
$$= 80 \times 2400 \times 10^{-6} + 8 \times 117600 \times 10^{-6} = 1.13\ MN$$

d = 40 mm
D = 80 mm
ΔΤ = 100°C
E_χ = 200 GPa
$\alpha_\chi = 12\ 10^{-6}\ grad^{-1}$
E_o = 100 GPa
$\alpha_o = 18\ 10^{-6}\ grad^{-1}$



$$\left.\begin{aligned} \Delta l_\chi &= \alpha_\chi l \Delta T \\ \Delta l_o &= \alpha_o l \Delta T \end{aligned}\right\}$$ (αν οι κύλινδροι ήταν ελεύθεροι να διασταλούν)

$$\alpha_o > \alpha_\chi \Rightarrow \Delta l_o > \Delta l_\chi$$

$$P_x + P_o = 0 \Rightarrow P_o = -P_x$$

$$y_o = \frac{P_o l}{E_o A_o} \quad \frac{P_x l}{E_x A_x} = y_x$$

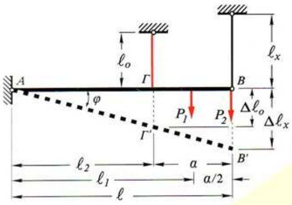
$$|y_o| + |y_x| = \Delta l_o - \Delta l_\chi = (\alpha_o - \alpha_\chi)l\Delta T$$

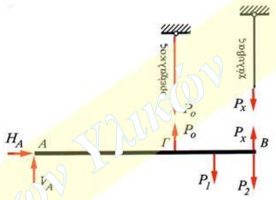
$$P_x\left(\frac{1}{E_o A_o} + \frac{1}{E_x A_x}\right) = (\alpha_o - \alpha_\chi)\Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_x = -P_o = \frac{E_o A_o E_x A_x}{E_o A_o + E_x A_x}(\alpha_o - \alpha_\chi)\Delta T$$

$$\sigma_o = \frac{P_o}{A_o} = -5.73\,\mathrm{kPa} \quad , \quad \sigma_x = \frac{P_x}{A_x} = 0.48\,\mathrm{kPa}$$

$\ell_x = 1\,m$, $\ell_o = 0.8\,m$
$\ell_1 = 5\,m$, $\ell_2 = 4\,m$
$\ell = 6\,m$
$A_x = A_o = A = 12\,cm^2$
$E_x = 210\,GPa$, $E_o = 90\,GPa$
$P_1 = 20\,kN$, $P_2 = 10\,kN$
$\sigma_x = ?$, $\sigma_o = ?$





$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_o + P_x + V_A - P_1 - P_2 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -\ell_2 P_o - \ell P_x + \ell_1 P_1 + \ell P_2 = 0$$

$$\frac{\Delta\ell_x}{\ell} = \frac{\Delta\ell_o}{\ell_2} \Rightarrow \Delta\ell_o = \frac{\ell_2}{\ell}\Delta\ell_x \Leftrightarrow \frac{P_o\ell_o}{E_oA} = \frac{\ell_2}{\ell}\frac{P_x\ell_x}{E_xA}$$

$P_o = 6.57\,kN$
$P_x = 18.43\,kN$
$V_A = 5\,kN$

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A} = 15.36\,MPa$$

$$\sigma_o = \frac{P_o}{A} = 5.48\,MPa$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\Delta\ell_x}{\ell}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{P_x\ell_x}{E_xA}}{\ell}\right) = 0.0007^o$$