



ΑΕΘΝΙΚΟΣ

ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ - ΘΛΙΨΗ

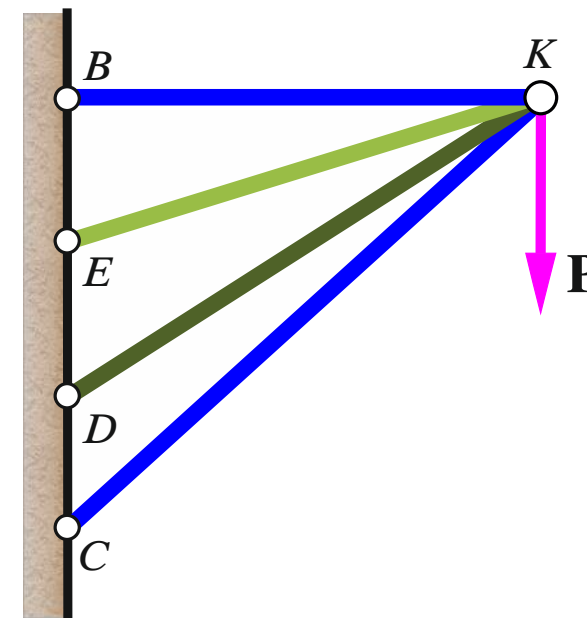
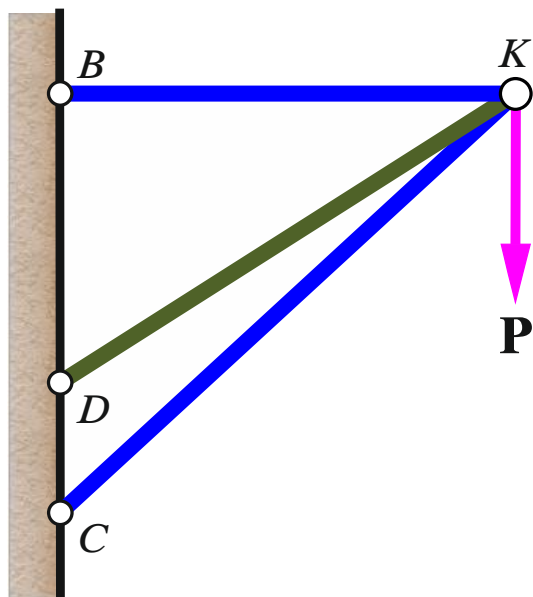
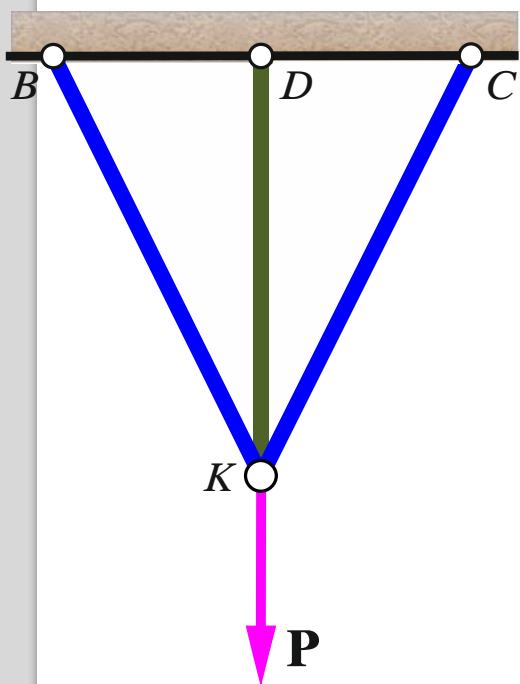
ΜΕΡΟΣ 2^ο

*Υπερστατικά
Προβλήματα εφελκν*

2.13– ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Όταν ο αριθμός των άγνωστων μεγεθών είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των Ε.Σ.Ι., λέμε ότι έχουμε ένα "υπερστατικό" ή "στατικά αόριστο πρόβλημα".

Η διαφορά του αριθμού των Ε.Σ.Ι. από τον αριθμό των αγνώστων μεγεθών ονομάζεται "βαθμός υπερστατικότητας" ή "βαθμός στατικής αοριστίας".



Μια φορά υπερστατικές κατασκευές

Δύο φορές υπερστατική κατασκευή

2.13– ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Μέθοδος των δυνάμεων

Για την επίλυση *υπερστατικών προβλημάτων*, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- α') Διατυπώνουμε τις (Ε.Σ.Ι.) στο Δ.Ε.Σ. του μέλους εκείνου στο οποίο ασκείται το επιβεβλημένο φορτίο, *αμελώντας τις παραμορφώσεις*.
- β') Προσδιορίζουμε το **βαθμό υπερστατικότητας** του προβλήματος.
- γ') Σχεδιάζουμε το σύστημα στην *παραμορφωμένη κατάσταση* και ανάλογα με τη γεωμετρία του προβλήματος, καταστρώνουμε τον υπολειπόμενο αριθμό *εξισώσεων συμβιβαστού των μετατοπίσεων* Ε.Σ.Μ.
- δ') Εκφράζουμε το νόμο του *Hooke* στις παραπάνω Ε.Σ.Μ.
- ε') Επιλύουμε το σύστημα, που προκύπτει από το άθροισμα των παραπάνω εξισώσεων **συν** των Ε.Σ.Ι, στο οποίο εμπεριέχονται ως άγνωστοι οι N_i καθώς και οι αντιδράσεις στήριξης.

2.13– ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

i. Περιπτώσεις υπερστατικών προβλημάτων εφελκυσμού

- Υπερστατικές ράβδοι λόγω κατασκευής του μηχανικού συστήματος.
- *Αυτεντατικές καταστάσεις*: Τέτοιες προκύπτουν αν σε σύστημα ράβδων:
 - Εμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή τους (ή συστολή τους) λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής.
 - Λόγω *κατασκευαστικού σφάλματος* (ατέλειας), όταν π.χ. μια ράβδος ενός δικτύματος κατασκευάστηκε λίγο μικρότερη από το γεωμετρικώς σωστό της μήκος.
 - Λόγω *προέντασης* (όπως το οπλισμένο σκυρόδεμα).
 - Λόγω σύσφιξης ενός π.χ. χάλκινου σωλήνα από χαλύβδινο κοχλία, δια περιστροφής του περικοχλίου του, ή θερμαίνοντάς τα.

ii. Μέθοδοι διατύπωσης της εξίσωσης συμβιβαστού

1. Γεωμετρική μέθοδος: Κατ' αυτήν σχεδιάζουμε το σύστημα στην **απαραμόρφωτη** θέση (προ δηλαδή της επιβολής του φορτίου) και ακολούθως στην **παραμορφωμένη**, οπότε με προσεκτική σύγκριση αυτών, κυρίως μεταξύ των επιμηκύνσεων (ή βραχύνσεων) των ράβδων του, είναι δυνατόν να προκύψει η επιζητούμενη *γεωμετρική σχέση*, όπως είναι για παράδειγμα η *ομοιότητα τριγώνων*.

2. Μέθοδος των συνιστωσών της μετατόπισης: Κατ' αυτήν εκφράζουμε τις επιμηκύνσεις όλων των ράβδων ενός υπερστατικού κόμβου συναρτήσει των *συνιστωσών της μετατόπισης* (u, v).

3. Μέθοδος θεωρήματος *Castigliano*.

Σε υπερστατικό πρόβλημα κανένα απολύτως ερώτημα **δεν** μπορεί να απαντηθεί, *αν προηγουμένως δεν επιλυθεί αυτό*.

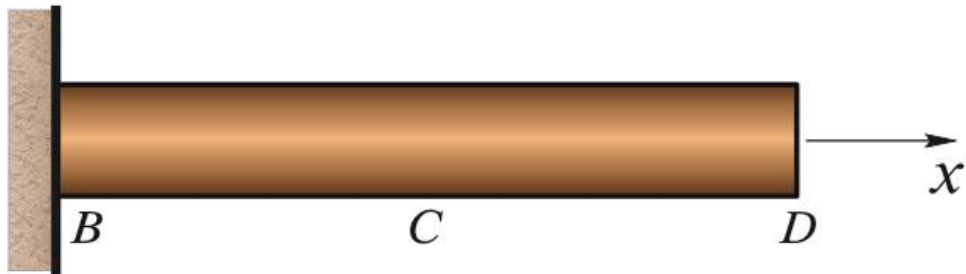
Συνήθως με τη διαπίστωση της υπερστατικότητας, πρέπει να ξεκινάμε τη διαδικασία επίλυσής του και αφού το επιλύσουμε, **τότε και μόνον τότε είναι εφικτό** να απαντήσουμε σε ειδικότερα ερωτήματα.



Θεσμικές τάσεις

2.14–ΕΠΙΜΗΚΥΝΣΗ ΛΟΓΩ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

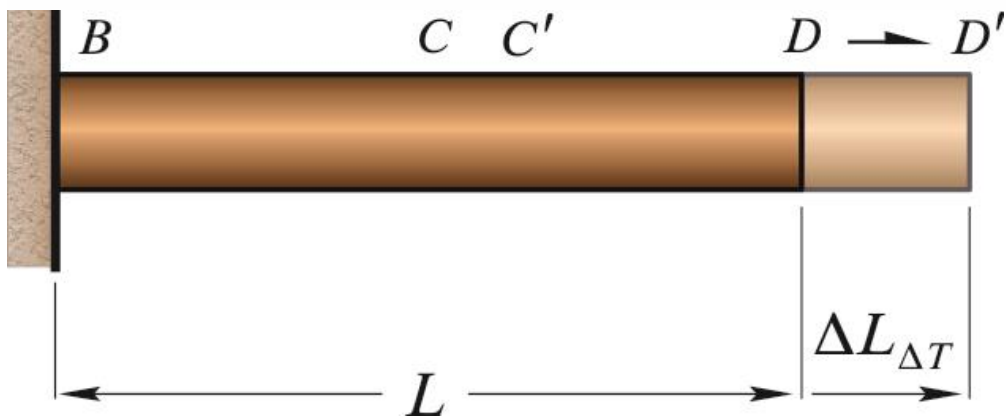
$$\Delta T = 0$$



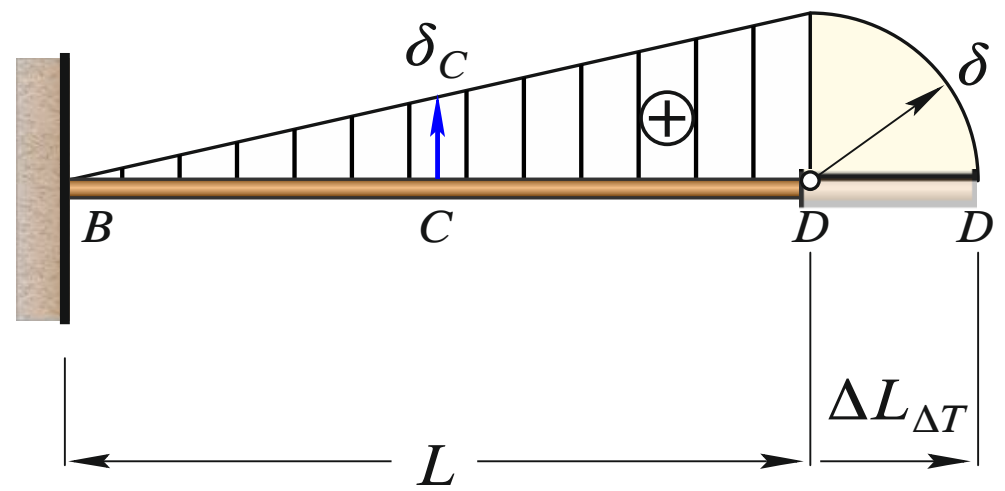
Μεταβολή μήκους
λόγω ελεύθερης διαστολής:

$$\Delta L_{\Delta T} = aL \cdot \Delta T$$

$$\Delta T > 0$$



Δ.Α.Μ.



2.14–ΕΠΙΜΗΚΥΝΣΗ ΛΟΓΩ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Ο " a " ονομάζεται *συντελεστής θερμικής (ή γραμμικής) διαστολής* και εκφράζει τη μεταβολή* μήκους για θερμοκρασιακή αύξηση κατά 1 βαθμό °C.

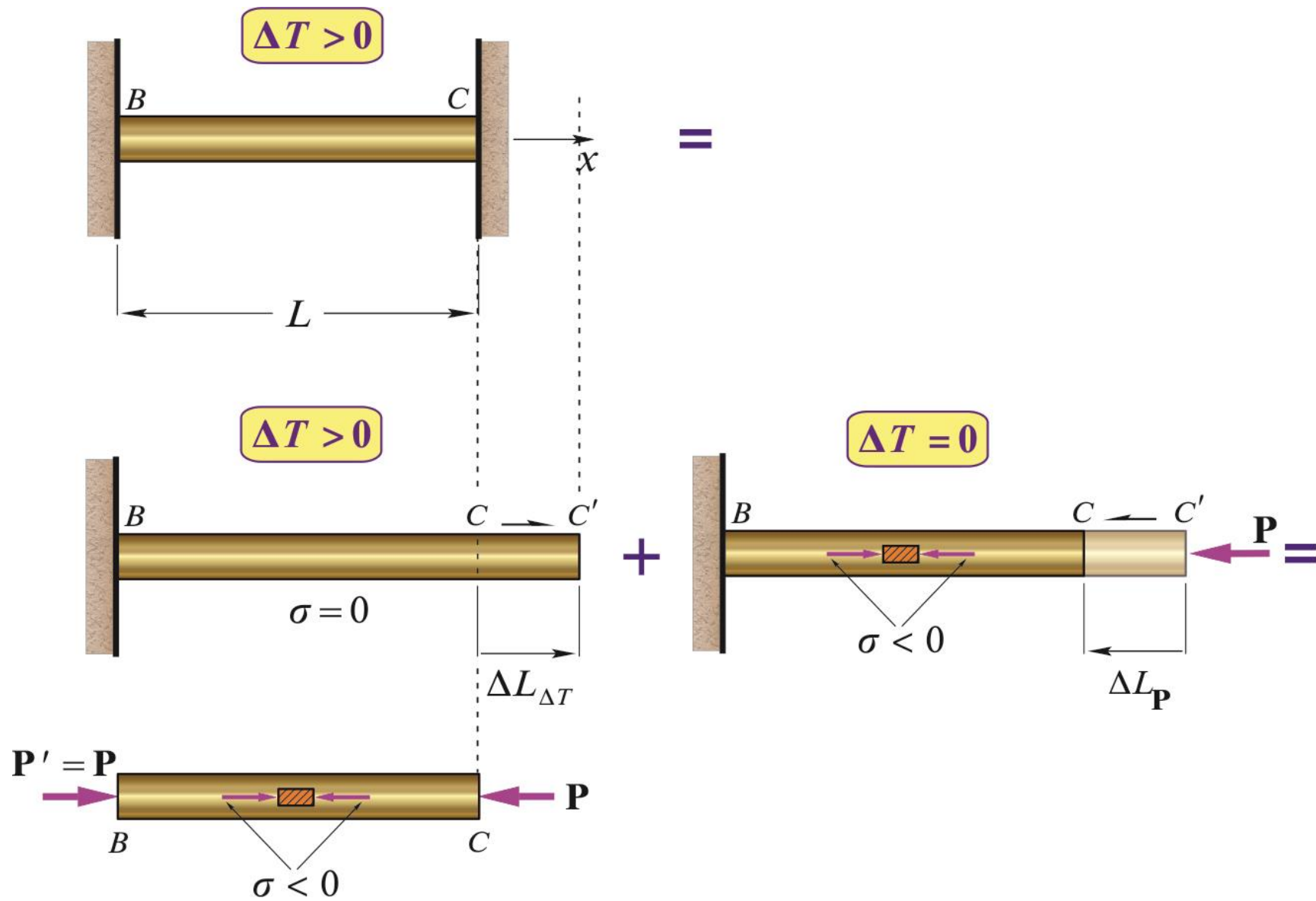
Για το χαλκό $a = 18 \times 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, για το σκυρόδεμα $a_c = 10 \times 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, για το χάλυβα $a_s = 11.7 \times 10^{-6} \text{ grad}^{-1} \approx 12 \times 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, που πρακτικά σημαίνει ότι:

Αν χαλύβδινη ράβδος μήκους $1 \text{ km} = (10^6 \text{ mm})$ θερμανθεί ομοιόμορφα κατά $\Delta T = 1^\circ\text{C}$, τότε το μήκος της θα αυξηθεί κατά 12 mm.

Η *ελεύθερη (δηλαδή ανεμπόδιστη) επιμήκυνση ράβδου* (λόγω ΔT) *είναι ανεξάρτητη του εμβαδού της διατομής.*

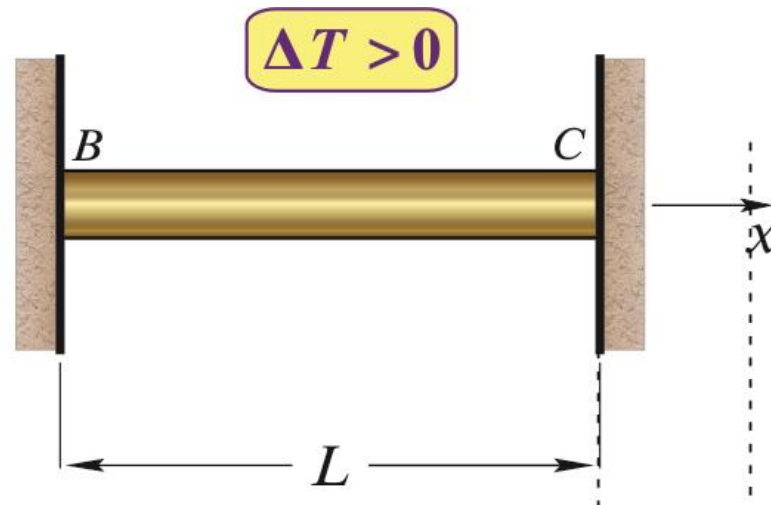
Το ΔT αντικαθίσταται προσημασμένο ($\Delta T > 0$ για αύξηση της θερμοκρασίας, ενώ $\Delta T < 0$ για θερμοκρασιακή πτώση).

2.15-ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΣΕ ΠΡΙΣΜΑΤΙΚΗ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ



2.15–ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΣΕ ΠΡΙΣΜΑΤΙΚΗ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ

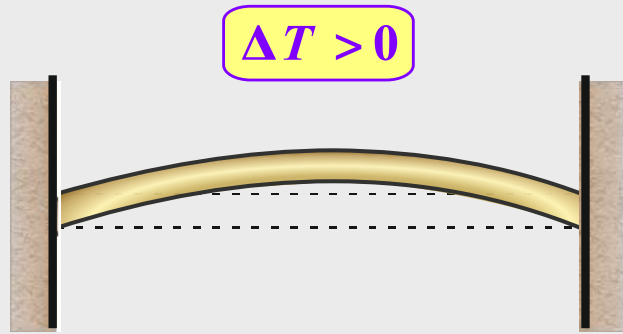
Τάση λόγω εμποδιζόμενης θερμικής διαστολής: $\sigma_{\Delta T} = -aE \cdot \Delta T$



Τεχνολογικό συμπέρασμα:

Η θερμική τάση είναι ανεξάρτητη του εμβαδού της διατομής. Άρα μια λεπτή ράβδος και μια πολύ μεγαλύτερης διατομής (αλλά ίδιου υλικού) κινδυνεύουν εξίσου σε εμποδιζόμενη διαστολή, ή και συστολή.

Συμπεράσματα



Λυγισμός από αύξηση θερμοκρασίας



Λαμὸς ἀπὸ πτώση θερμοκρασίας

- Προφανώς από το κάθε τοίχωμα αναπτύσσεται η ίδια δύναμη \mathbf{P} .
- Για θερμοκρασιακή πτώση ($\Delta T < 0$), η τάση γίνεται **εφελκυστική**.
- Τα ΔT και $\sigma_{\Delta T}$ είναι πάντοτε **ετερόσημα**, ανεξάρτητα **εφελκυσμού ή θλίψης**.
- Λόγω ΔT όλα τα σημεία της αμφίπακτης ράβδου παραμένουν **αμετακίνητα**.
- Όταν εμποδίζεται η ελεύθερη διαστολή ράβδου, τότε αυτή είναι δυνατόν ακόμη και να λυγίσει, ενώ όταν εμποδίζεται η ελεύθερη συστολή της, αυτή εφελκυσόμενη είναι δυνατόν να οδηγηθεί ακόμη και σε θραύση, όταν η τάση της πάρει την τιμή της τάσης θραύσης σ_u .

19° Παράδειγμα

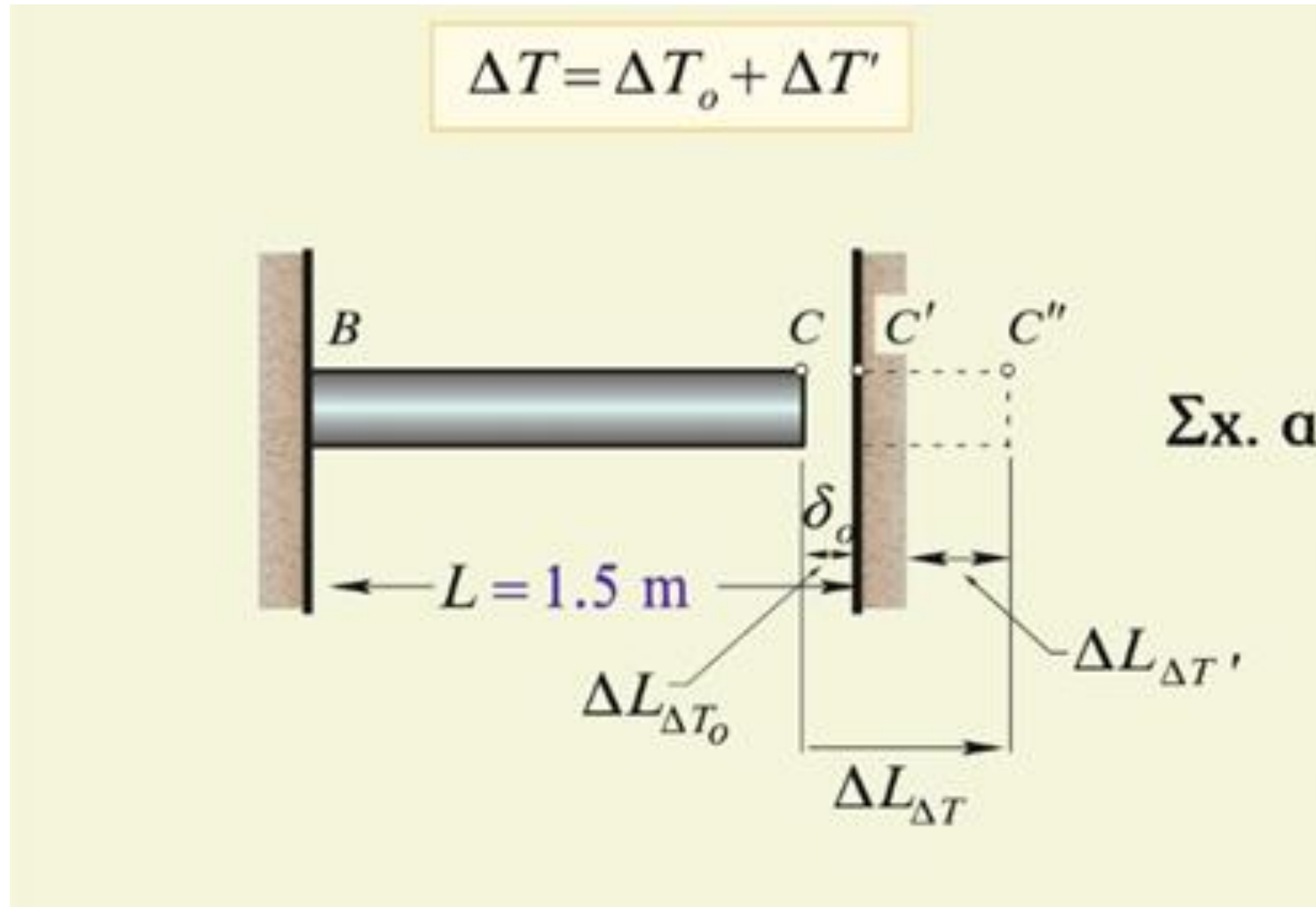
Χάλκινη αβαρής ράβδος, με $\alpha = 20 \times 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $E = 120 \text{ GPa}$, $L = 1.5 \text{ m}$, είναι πακτωμένη σε δύο ανένδοτα τοιχώματα. Σε θερμοκρασία 20°C είναι ελεύθερη τάσεων. Σε ποιά ΔT_u επέρχεται αστοχία, αν $\sigma_u = 120 \text{ MPa}$;

ΛΥΣΗ Όσο η ΔT (κατά μέτρο) αυξάνει, τόσο και η εφελκυστική τάση αυξάνει, μέχρι που κάποτε, σε **θερμοκρασιακή μεταβολή** έστω ΔT_u , η σ θα φτάσει την τιμή της **τάσης** σ_u του υλικού της. Με $\sigma = \sigma_u$:

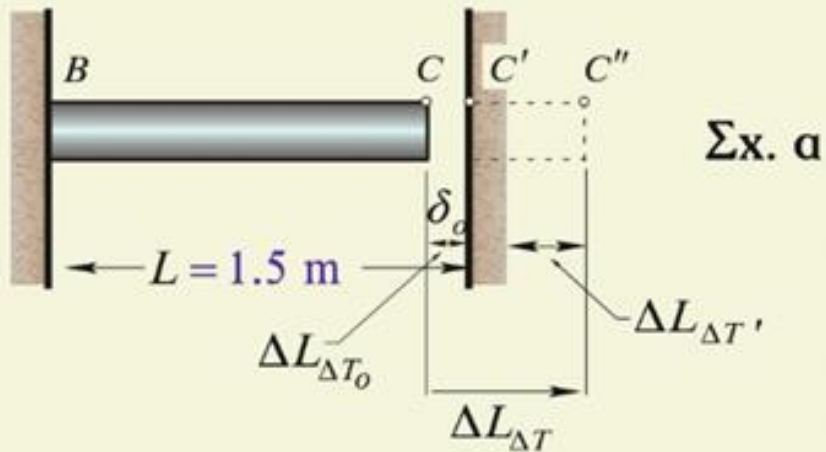
$$\sigma_u = -\alpha E \cdot \Delta T_u \quad \Rightarrow \quad 120 = -20 \times 10^{-6} \cdot 120 \times 10^3 \cdot \Delta T_u \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta T_u = -50^\circ\text{C}}$$

20° Παράδειγμα

Αν η προηγούμενη ράβδος απέχει από το δεξιό τοίχο $\delta_o = 1.2 \text{ mm}$ (Σχ. α), ποιά είναι η τάση της για θερμοκρασιακή αύξηση $\Delta T = 70^\circ\text{C}$;

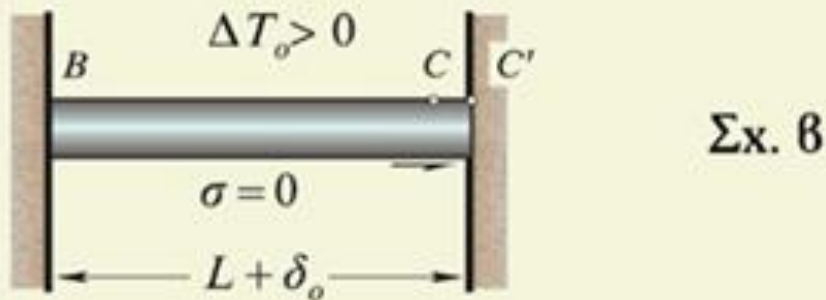


20° Παράδειγμα



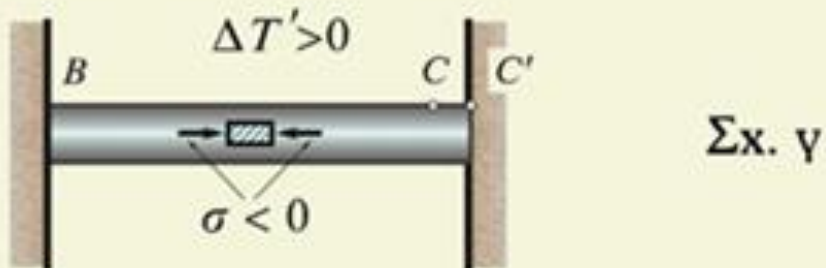
Ένα μέρος της ΔT , έστω ΔT_0 "δαπανάται" για να "καλυφθεί" η μικρή απόστα-ση δ_0 , ώστε το C να μετατοπιστεί ανεμπόδιστα μέχρι το C' (Σχ. β). Για $\Delta L_{\Delta T}$ ίσο με δ_0 και για ΔT ίσο με ΔT_0 , έχουμε:

$$\delta_0 = aL \cdot \Delta T_0 \Rightarrow \underline{\Delta T_0 = 40^\circ\text{C}}$$



Η *εμποδισόμενη διαστολή*, άρα και η τάση σ , προέρχεται από την υπόλοιπη θερμοκρασιακή αύξηση έστω $\Delta T'$ (Σχ. γ), όπου:

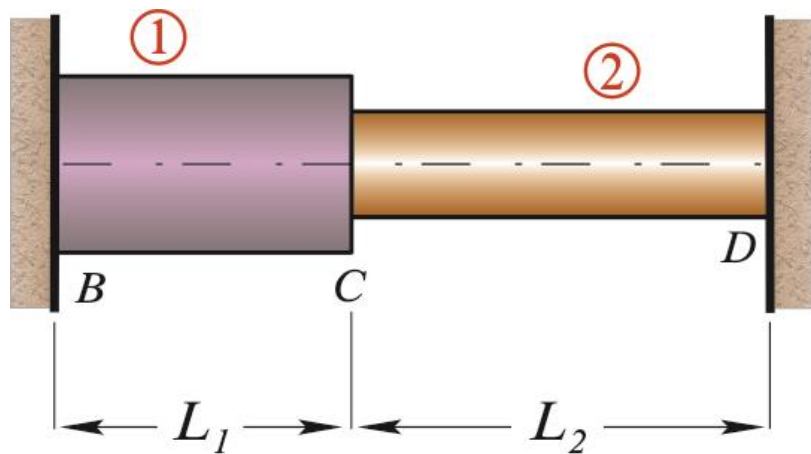
$$\Delta T' = \Delta T - \Delta T_0 = 70 - 40 \Rightarrow \underline{\Delta T' = 30^\circ\text{C}}$$



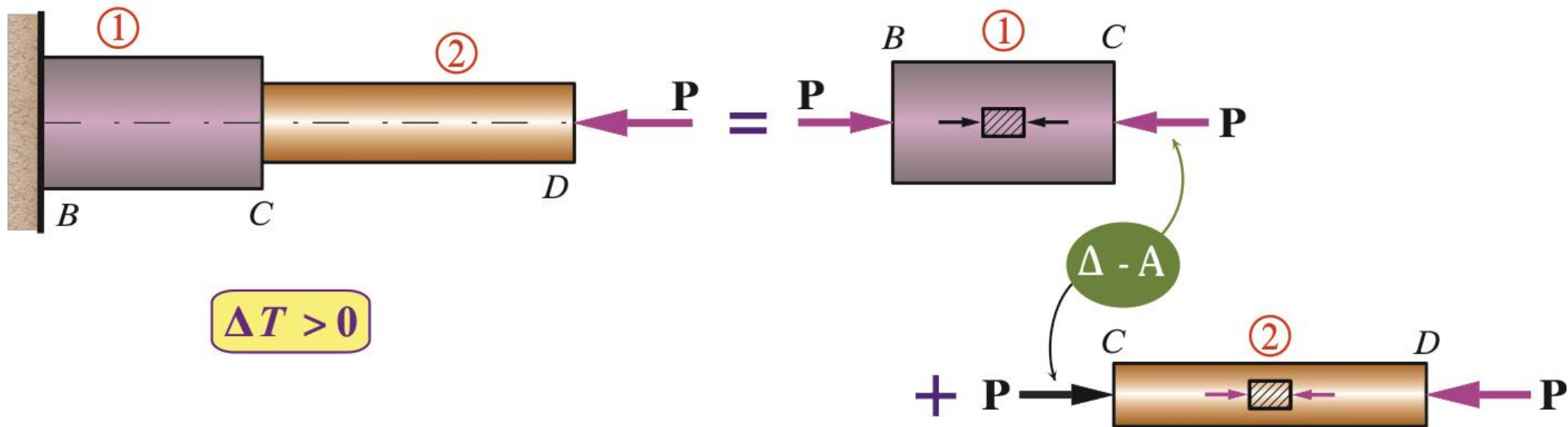
– Η *τάση* σ λόγω της $\Delta T'$ ($=30^\circ\text{C}$ και όχι 70°C), είναι:

$$\sigma = -aE \cdot \Delta T' \Rightarrow \underline{\sigma = -72 \text{ MPa (θλιπτ.)}}$$

2.16– ΘΕΡΜΑΝΣΗ ΑΜΦΙΠΑΚΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΣΕΙΡΑ



Σύνθετη ράβδος εντός αμετάθετων τοιχωμάτων ή αρθρώσεων

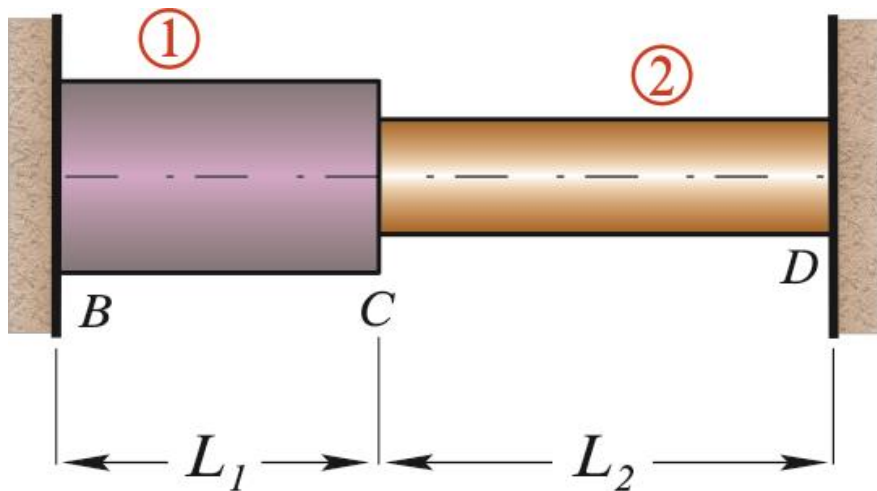


2.16– ΘΕΡΜΑΝΣΗ ΑΜΦΙΠΑΚΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΣΕΙΡΑ

Αυτοδημιουργούμενη από τα τοιχώματα θλιπτική δύναμη μέτρου P (λόγω $\Delta T > 0$):

$$P_{\Delta T} = \frac{E_1 A_1 \cdot E_2 A_2}{L_1 E_2 A_2 + L_2 E_1 A_1} (a_1 L_1 + a_2 L_2) \cdot \Delta T \stackrel{\acute{\eta}}{=} \frac{a_1 L_1 + a_2 L_2}{f_1 + f_2} \Delta T$$

όπου: $f_i = L_i / E_i A_i$



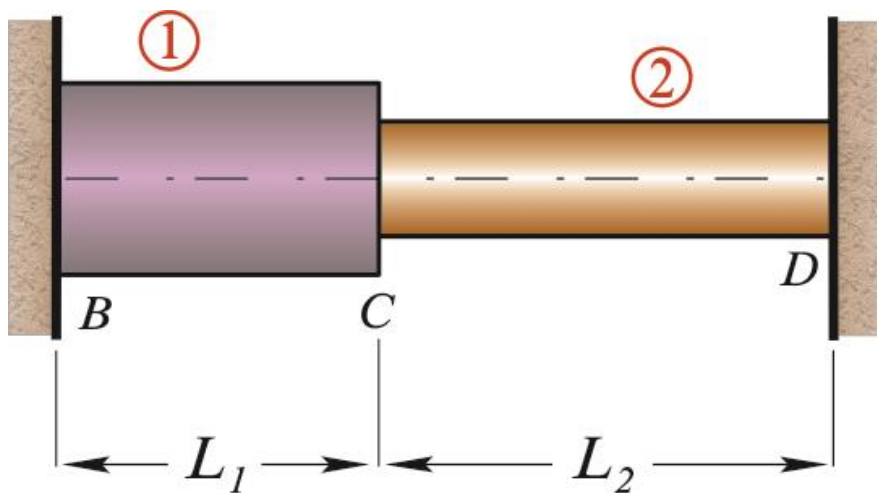
Σύνθετη ράβδος εντός αμετάθετων τοιχωμάτων ή αρθρώσεων

2.16– ΘΕΡΜΑΝΣΗ ΑΜΦΙΠΑΚΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΣΕΙΡΑ

Εξίσωση συμβιβαστού των μετατοπίσεων:

Θα πρέπει η (συνολική) επιμήκυνση λόγω ΔT συν η (συνολική) επιμήκυνση (με την ευρεία έννοια του όρου) λόγω της \mathbf{P} να ισούται με μηδέν, αφού τα τοιχώματα θεωρούνται ανένδοτα. Η \mathbf{P} βέβαια θλίβει και τις δύο ράβδους, οπότε:

Ε.Σ.Μ: $\Delta L_{\Delta T}^{ολ} + \Delta L_{-\mathbf{P}}^{ολ} = 0 \Rightarrow (a_1 L_1 + a_2 L_2) \cdot \Delta T + \left[\frac{-PL_1}{E_1 A_1} + \frac{-PL_2}{E_2 A_2} \right] = 0$

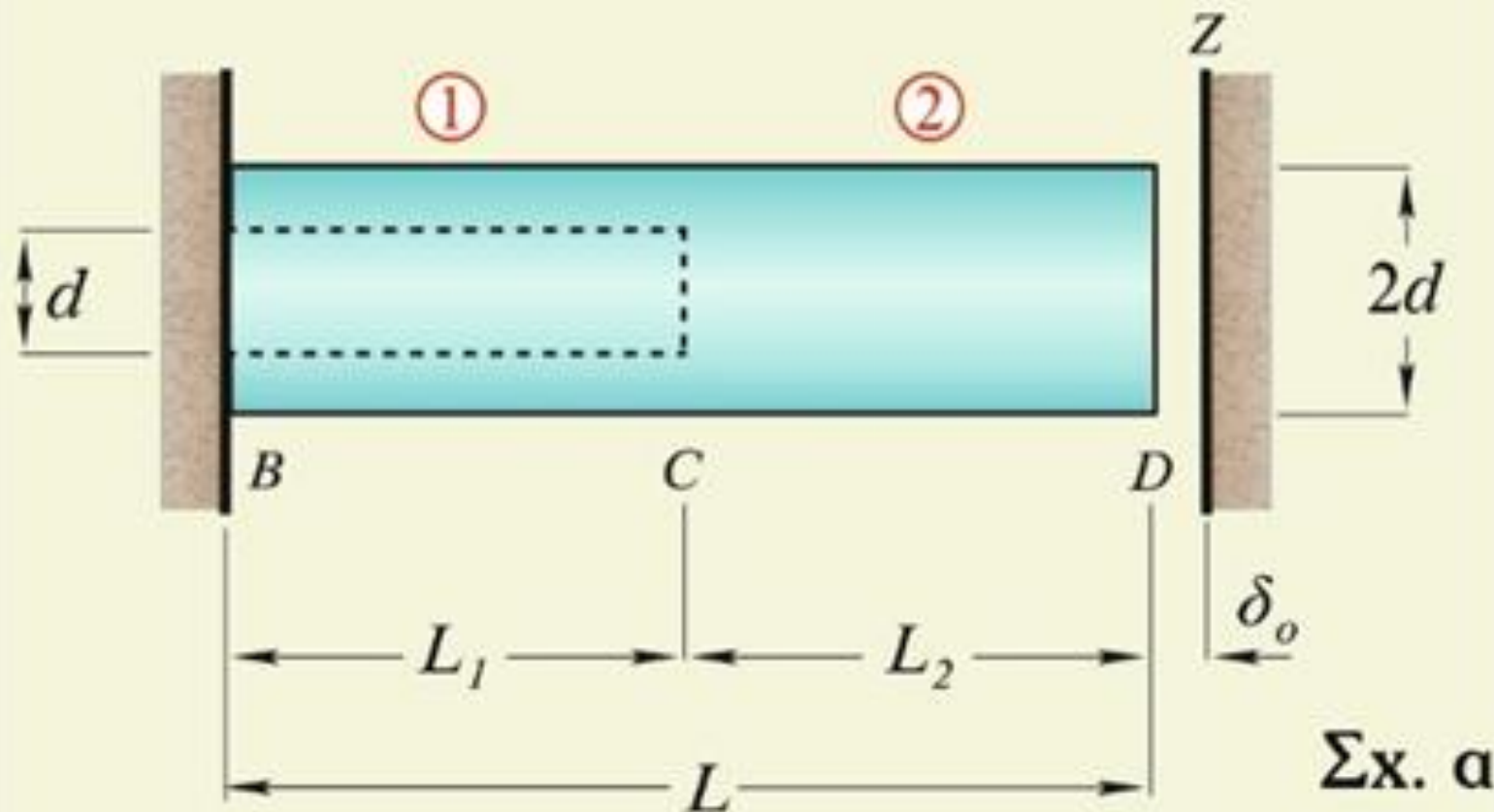


Σύνθετη ράβδος εντός αμετάθετων τοιχωμάτων ή αρθρώσεων

21° Παράδειγμα

"Αρχικό διάκενο συν υποχώρηση στήριξης"

Η ενιαίου υλικού ($\alpha = 12.5 \times 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$) κυκλικής διατομής ράβδος BCD (με κοίλο μόνον το BC) απέχει $\delta_o = 0.6 \text{ mm}$ από το τοίχωμα Z, και εν συνεχεία υποβάλλεται σε $\Delta T = 120^\circ\text{C}$, οπότε και παρατηρείται μερική υποχώρηση του δεξιά τοιχώματος κατά $\delta_z = 0.4 \text{ mm}$. Ζητείται η μέγιστη τάση και η μετατόπιση του C.

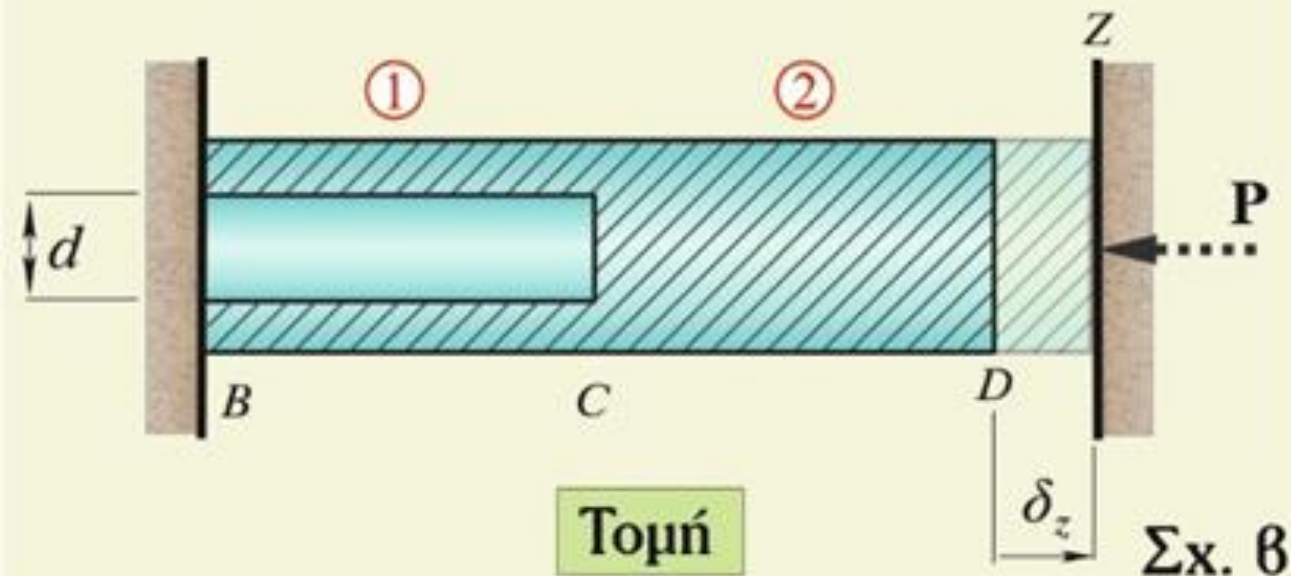
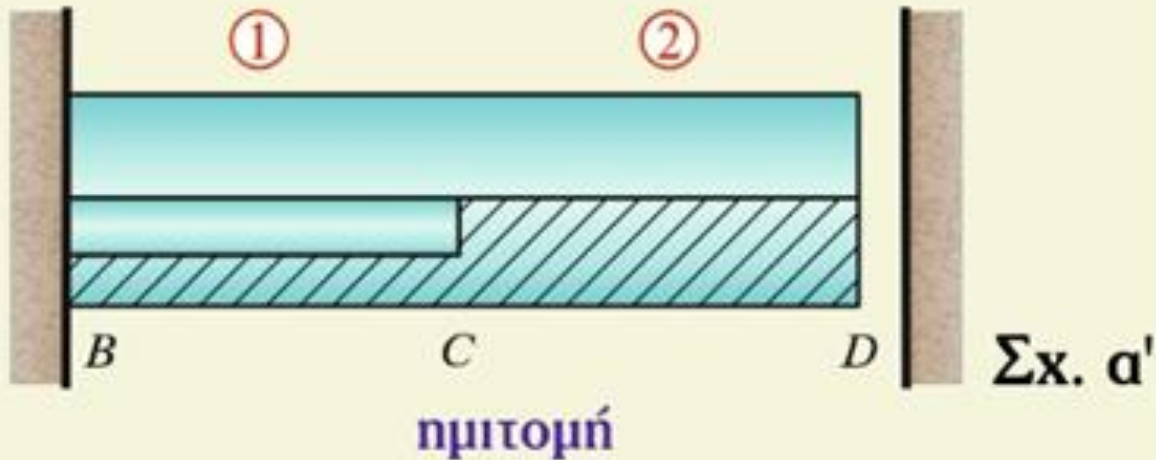


Δίνονται: $d = 20 \text{ mm}$,
 $L_1 = L_2 = L/2 = 50 \text{ cm}$

Σχ. α

21° Παράδειγμα

"Αρχικό διάκενο συν υποχώρηση στήριξης"



$$A_2 = \frac{\pi}{4} (2d)^2 \approx 12.57 \text{ cm}^2$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} \left[(2d)^2 - d^2 \right] = \frac{3}{4} A_2 = 0.75 A_2$$

Ε.Σ.Μ: $\Delta L_{\Delta T}^{o\lambda} + \Delta L_{-P}^{o\lambda} = 0 \Rightarrow$

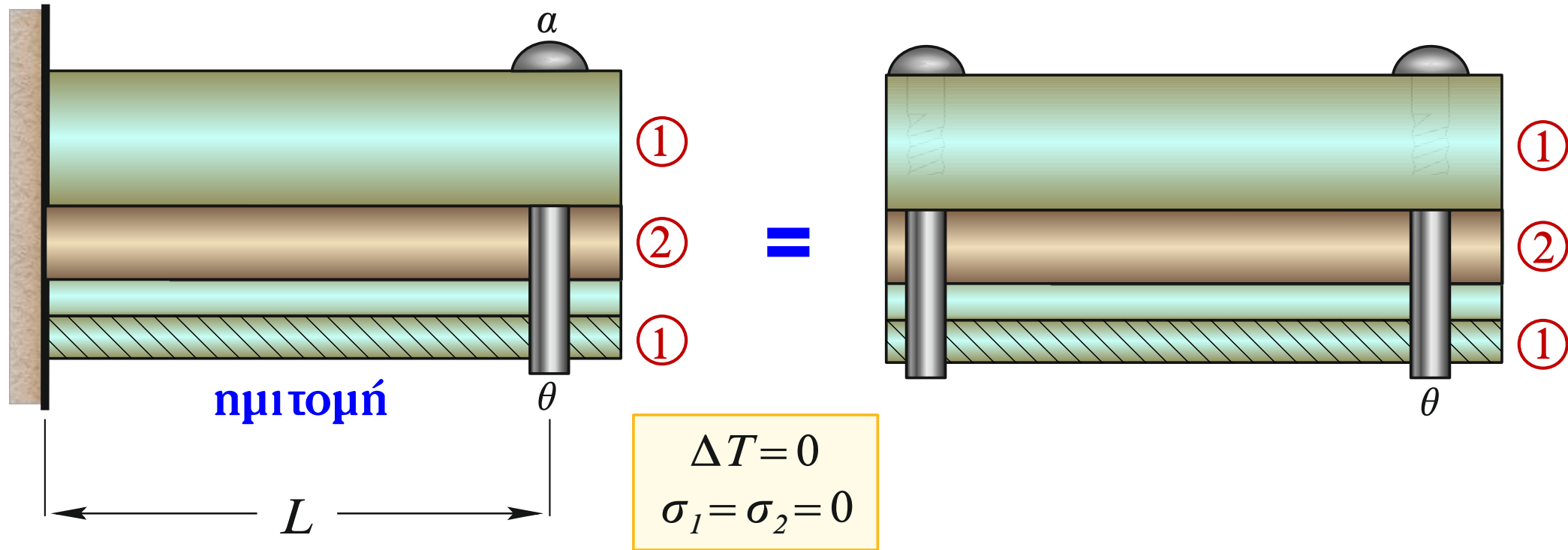
$$-\left(\frac{PL_1}{EA_1} + \frac{PL_2}{EA_2} \right) + a(L_1 + L_2) \cdot \Delta T = (\delta_o + \delta_z) \Rightarrow$$

$$\frac{P}{EA_1} \left(\frac{0.4}{0.75} + \frac{0.6}{1} \right) = a(L_1 + L_2) \cdot \Delta T - 1 \text{ mm} \Rightarrow$$

$$\underline{P \approx 111 \text{ kN}}$$

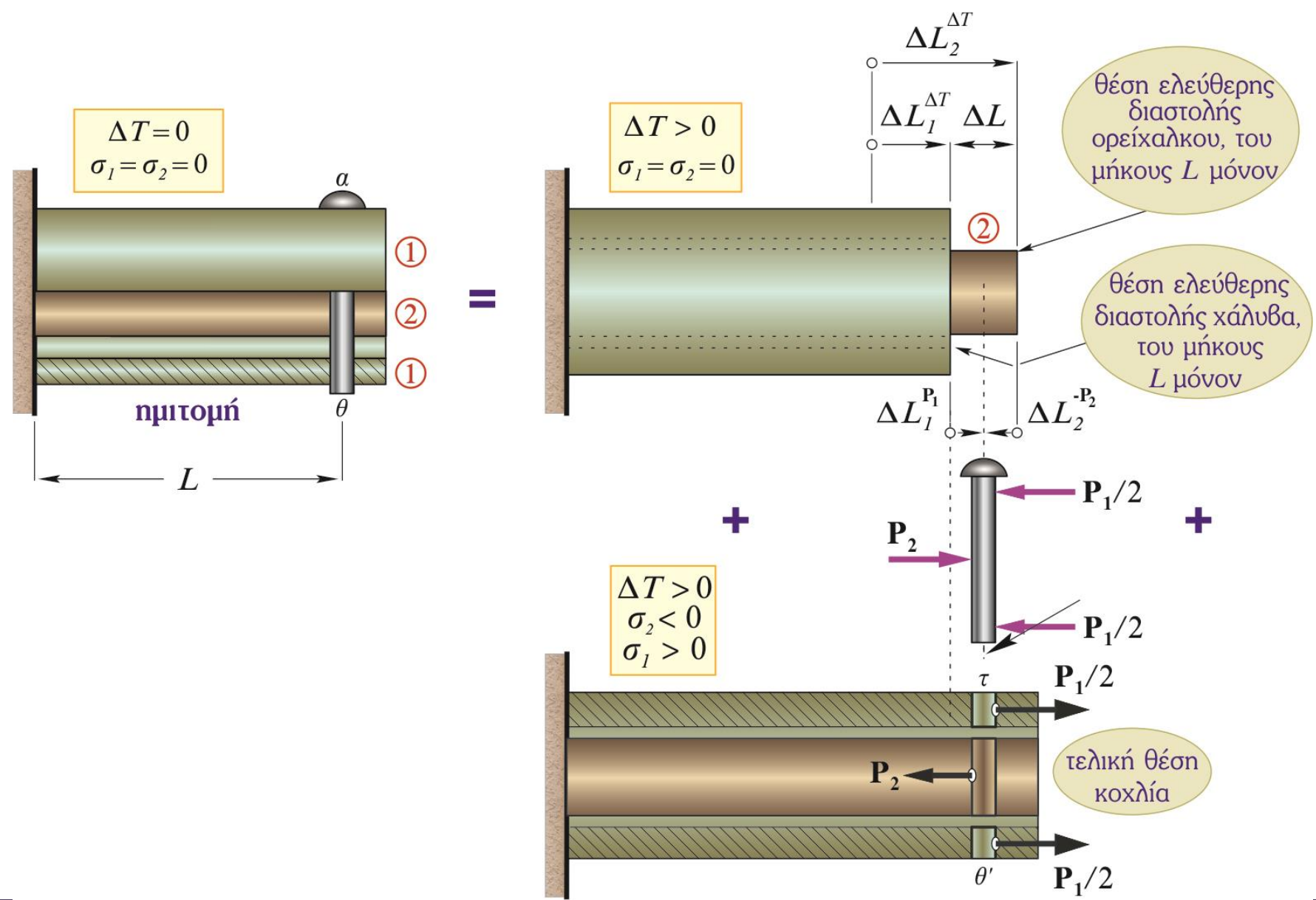
$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{-P}{A_{min}} \Rightarrow \underline{\sigma_{max} = -120 \text{ MPa}}$$

2.17– ΘΕΡΜΑΝΣΗ ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΩΝ ΡΑΒΔΩΝ



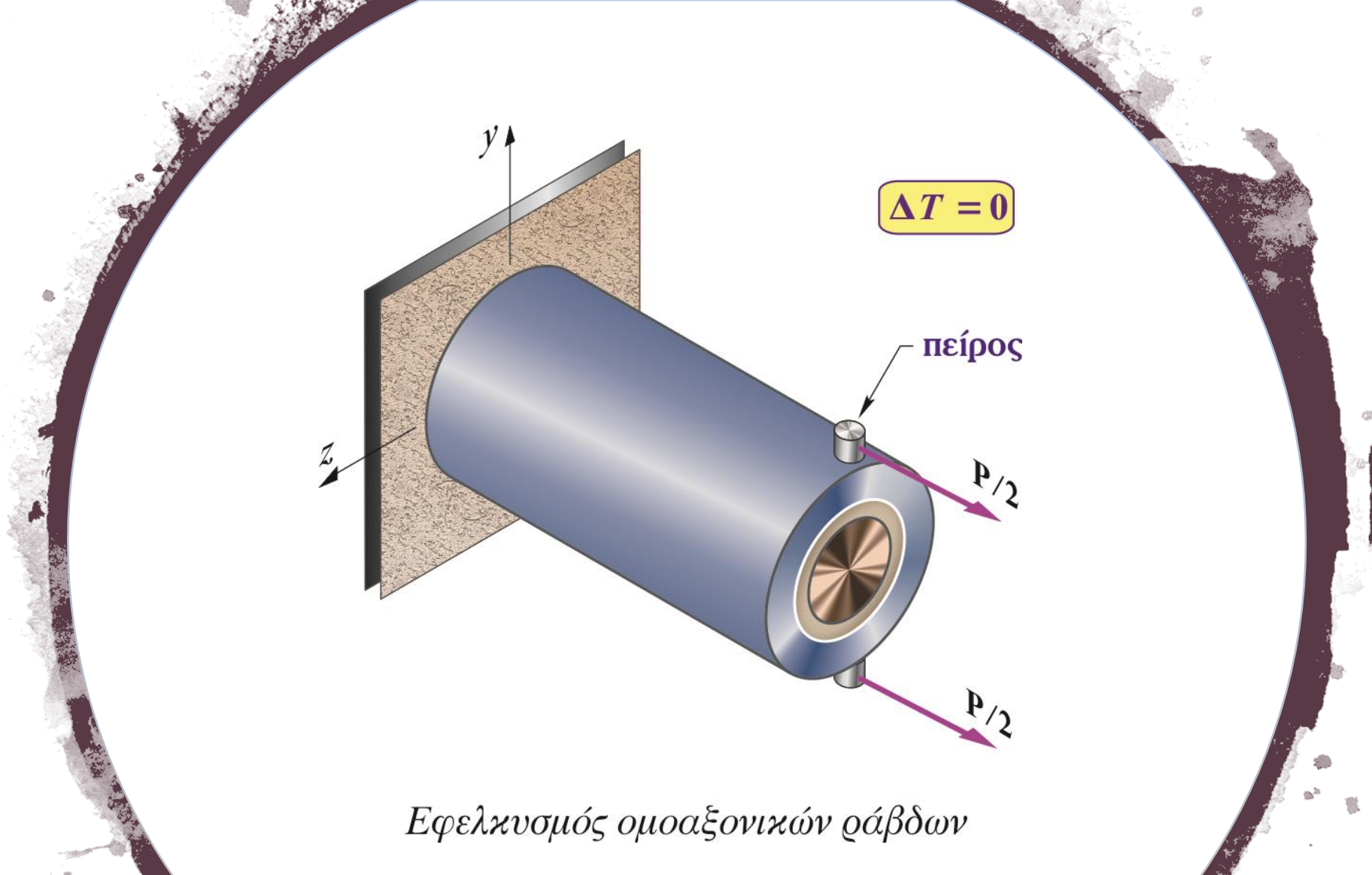
"Λόγω των διαφορετικών α_i αυτοδημιουργείται δύναμη, που για $\Delta T > 0$ θλίβει το υλικό με τον μεγαλύτερο α , ενώ η ίδια δύναμη εφελκύει αυτό με τον μικρότερο". Για $\Delta T < 0$ ισχύουν τα αντίστροφα.

2.17- ΘΕΡΜΑΝΣΗ ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΩΝ ΡΑΒΔΩΝ





*Ράβδοι σε
υπεροστατικές
κατασκευές*



Εφελκυσμός ομοαξονικών ράβδων

Εξισώσεις συμβιβαστού των μετατοπίσεων: Οι μετατοπίσεις που θα υποστούν τα στοιχεία ενός μηχανικού συστήματος, πρέπει να είναι συμβιβαστές μεταξύ τους, κατά τρόπον ώστε να μην καταλύεται η συνέχεια της κατασκευής.

Ισομήκεις ράβδοι ομοαξονικά (ή παράλληλα) διατεταγμένες: Αν το σύστημα των ① και ② εφελκύεται από δύναμη \mathbf{P} (ομοαξονική της εσωτερικής), τότε αυτές **είναι αναγκασμένες να υποστούν την ίδια επιμήκυνση**, δηλαδή:

$$\delta_1 = \delta_2$$

Διάταξη ράβδων σε σειρά εντός τοιχωμάτων: Επειδή τα τοιχώματα θεωρούνται **ανένδοτα**, θα πρέπει η συνολική επιμήκυνση που θα υποστούν οι επιμέρους ράβδοι του από τις επιβεβλημένες \mathbf{P}_j να είναι **μηδενική**, δηλαδή:

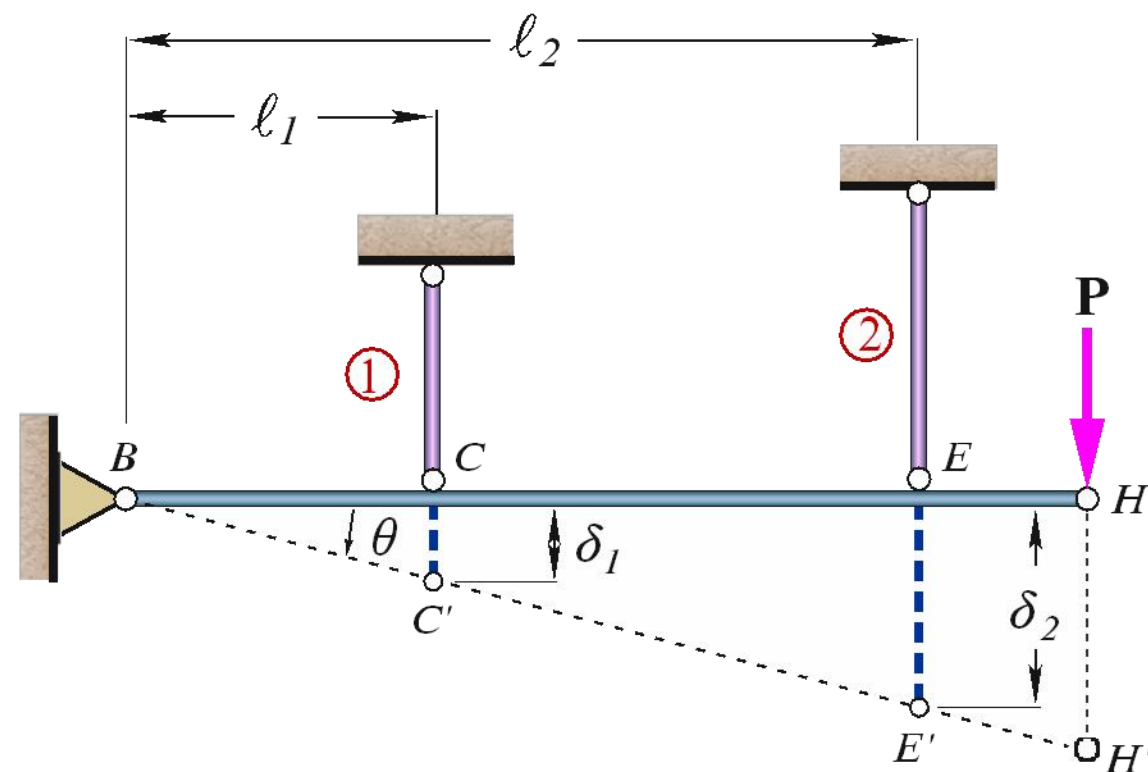
$$\delta_1 + \delta_2 + \dots = 0$$

—όπου: την δ_i την προκάλεσε στην " i " ράβδο η αξονική της δύναμη \mathbf{N}_i . Οι \mathbf{N}_i προσδιορίζονται με ισάριθμες τομές στο Δ.Ε.Σ. του μηχανικού συστήματος.

Συνήθεις περιπτώσεις υπερστατικών συστημάτων

Στροφή άκαμπτης δοκού: Αν δοκός με άρθρωση στο B φορτιστεί, στρέφεται κατά (μικρή) γωνία θ περίξ αυτού, συμπαρασύροντας και τις ράβδους ανάρτησης προς τα κάτω, άρα επιμηκύνοντάς τες κατά δ_1, δ_2 . Από τα σχηματιζόμενα όμοια τρίγωνα των παραμορφώσεων, οι επιμηκύνσεις τους είναι ανάλογες των αποστάσεών τους ℓ_i από το **κέντρο στροφής**, οπότε προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\tan \theta = \frac{|\delta_1|}{\ell_1} = \frac{|\delta_2|}{\ell_2} = \dots$$



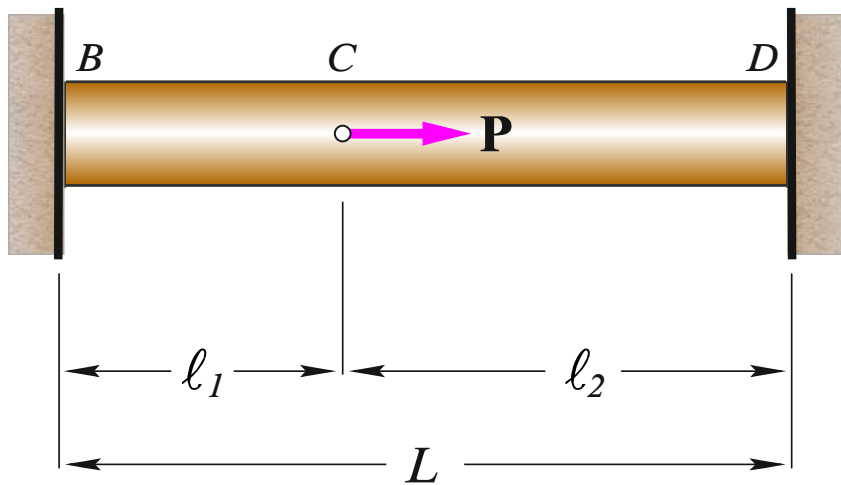
Στροφή ανηρτημένης άκαμπτης δοκού

Συνήθεισ περιπτώσεις υπερστατικών συστημάτων

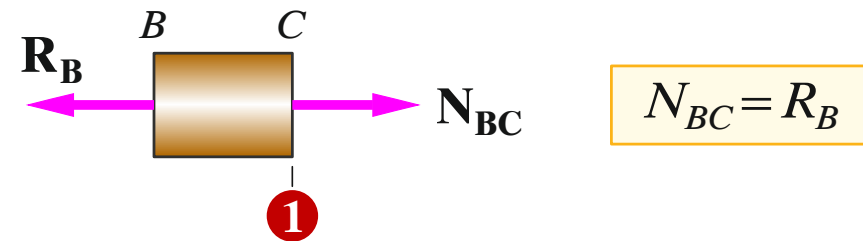
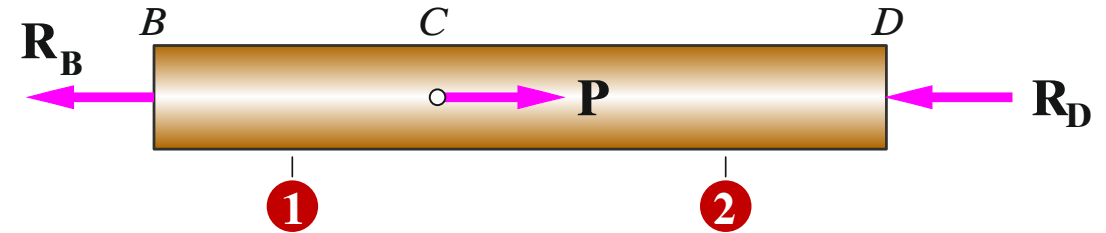
2.19– ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΙΧΩΜΑΤΩΝ

i. Αμφίπακτη πρισματική με μία ενδιάμεση δύναμη

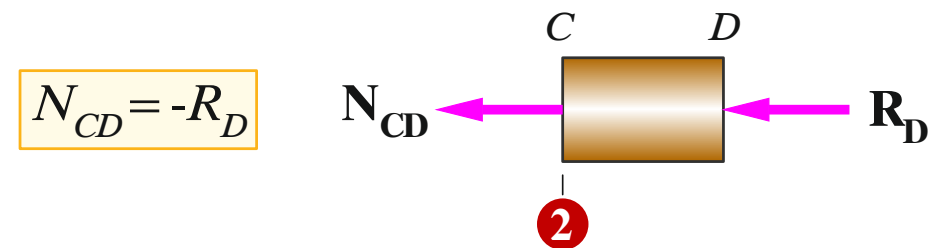
Δ.Ε.Σ.



=



$N_{BC} = R_B$

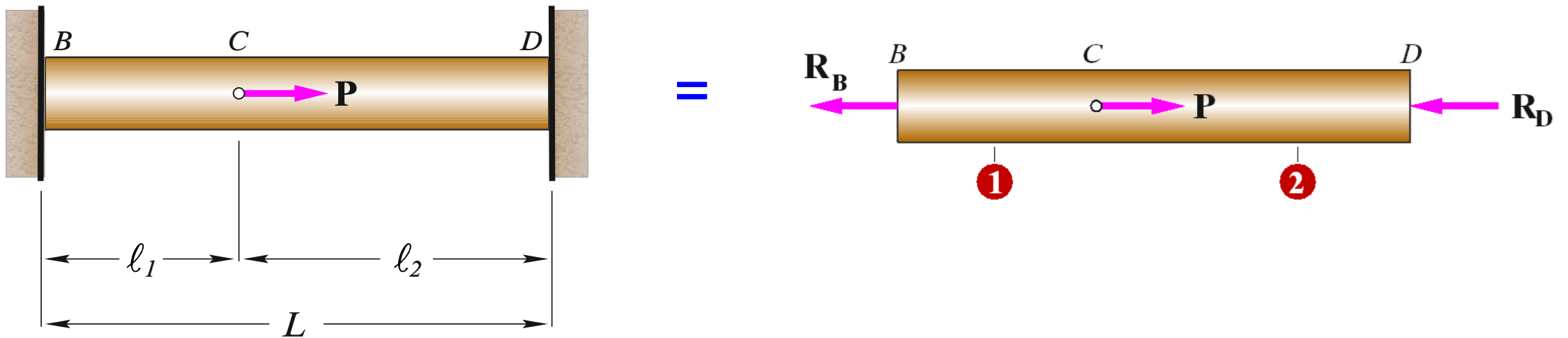


$N_{CD} = -R_D$

2.19– ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΙΧΩΜΑΤΩΝ

i. Αμφίπακτη πρισματική με μία ενδιάμεση δύναμη

Δ.Ε.Σ.



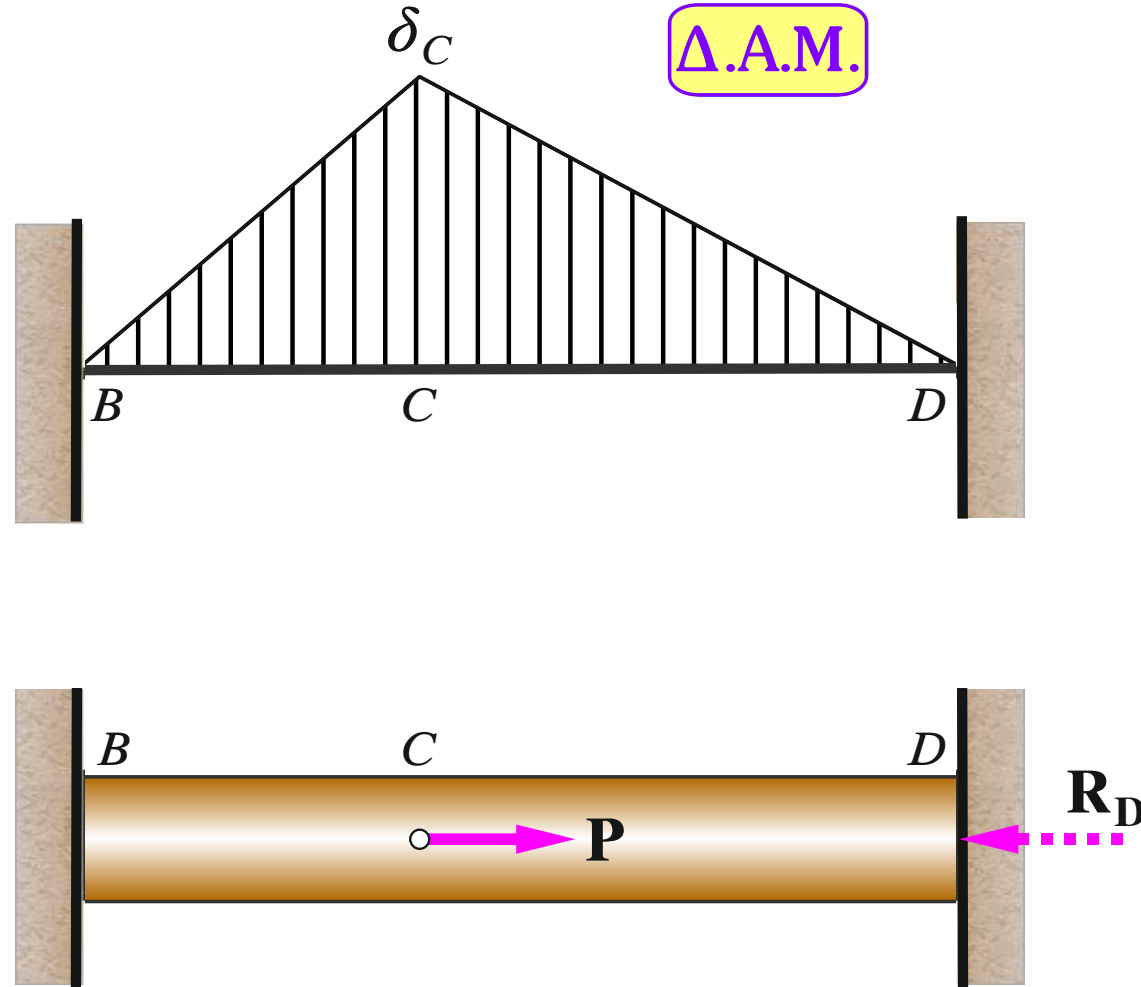
Ε.Σ.Μ:

$$\Delta L_{o\lambda} = 0 \quad : \quad \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} = 0$$

Νόμος του αντιβραχίονα: $R_B = \frac{l_2}{L} P$, $R_D = \frac{l_1}{L} P$, $L = l_1 + l_2$

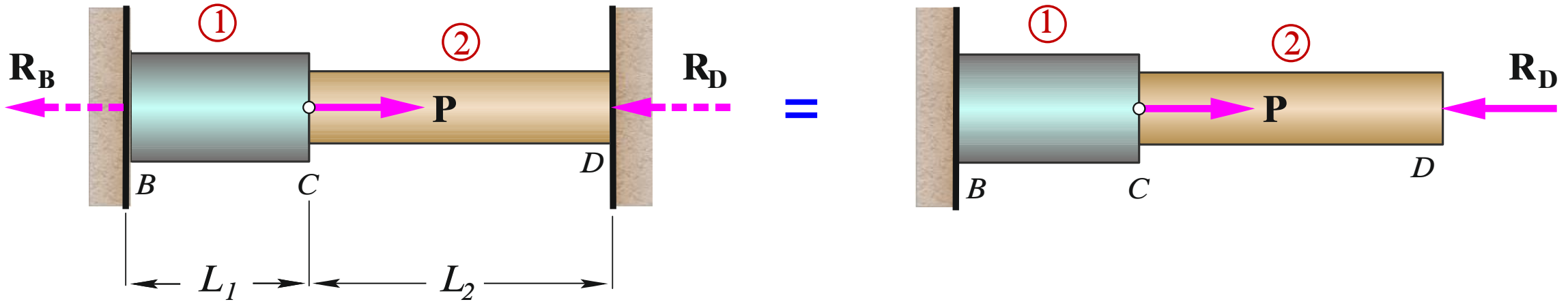
2.19– ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΙΧΩΜΑΤΩΝ

i. Αμφίπακτη πρισματική με μία ενδιάμεση δύναμη



2.19– ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΙΧΩΜΑΤΩΝ

ii. Σύνθετη ράβδος με μία δύναμη

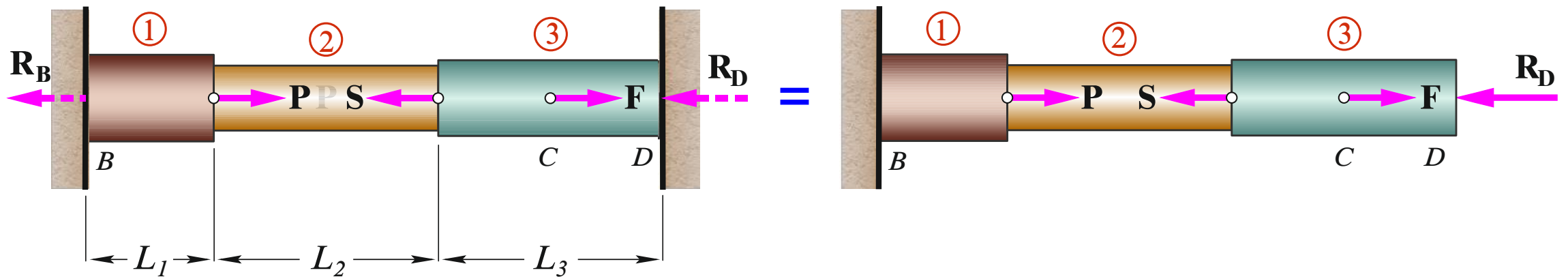


$$\Delta L_P + \Delta L_{-R_D} = 0 \Rightarrow \frac{PL_1}{E_1 A_1} + \left[\frac{-R_D L_1}{E_1 A_1} + \frac{-R_D L_2}{E_2 A_2} \right] = 0 \Rightarrow Pf_1 = R_D (f_1 + f_2)$$

$$R_B = \frac{f_2}{f_1 + f_2} P, \quad R_D = \frac{f_1}{f_1 + f_2} P, \quad f_i = \frac{L_i}{E_i A_i}$$

2.19– ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΙΧΩΜΑΤΩΝ

iii. Σύνθετη ράβδος με πολλές δυνάμεις

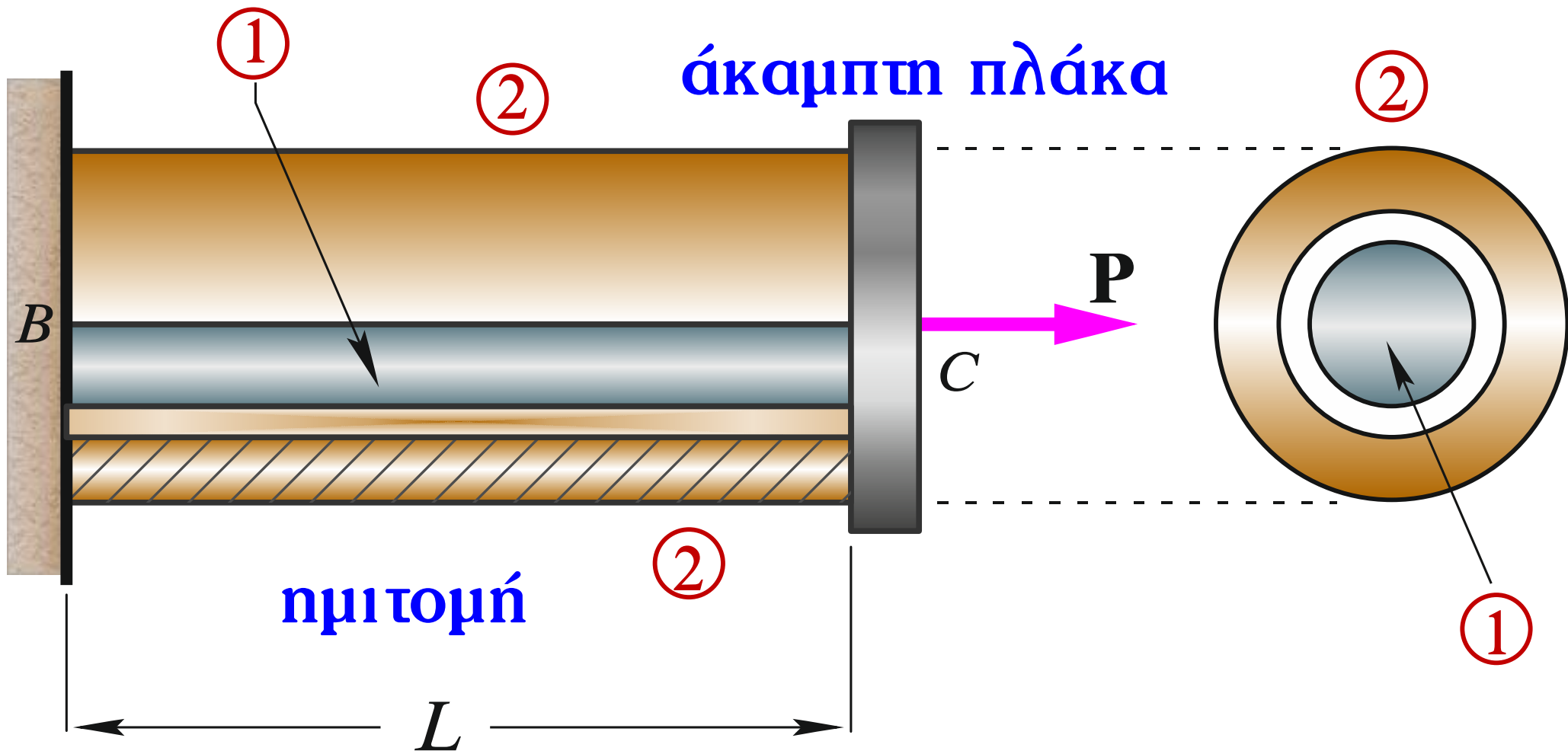


Ε.Σ.Ι.:

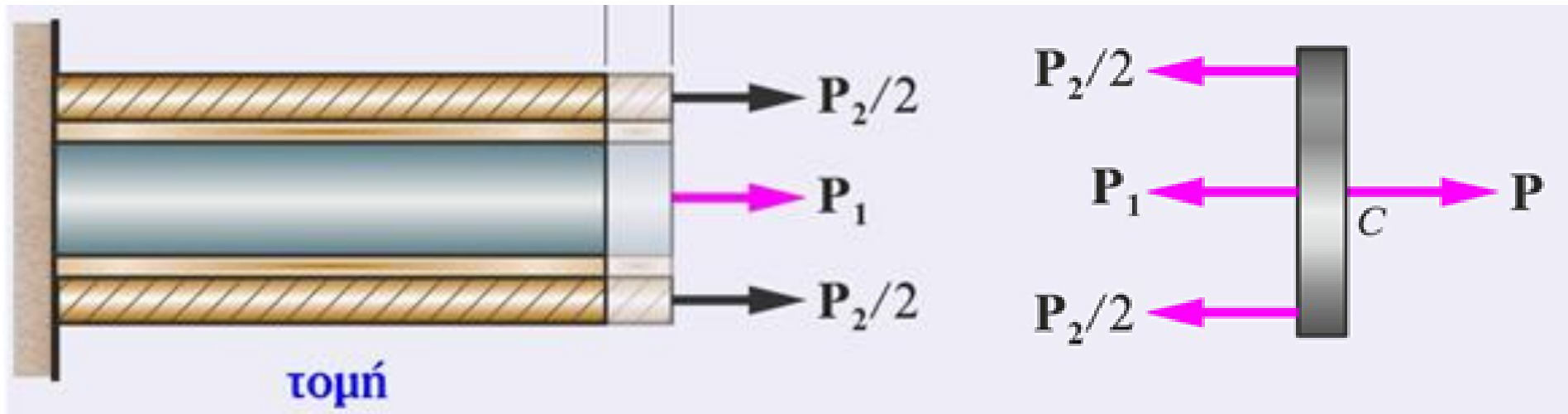
$$R_B + R_D = \sum P_j$$

$$\Delta L_{-R_D} + \sum \Delta L_{\pm P_j} = 0 \Rightarrow (-R_D) \sum_{i=1}^n f_i + \sum_{j=1}^k (\pm P_j) [f_1 + f_2 + \dots + f_n] = 0$$

2.20– ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΩΝ ΡΑΒΔΩΝ



2.20– ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΩΝ ΡΑΒΔΩΝ



Ε.Σ.Μ:

$$\Delta L_1 = \Delta L_2$$

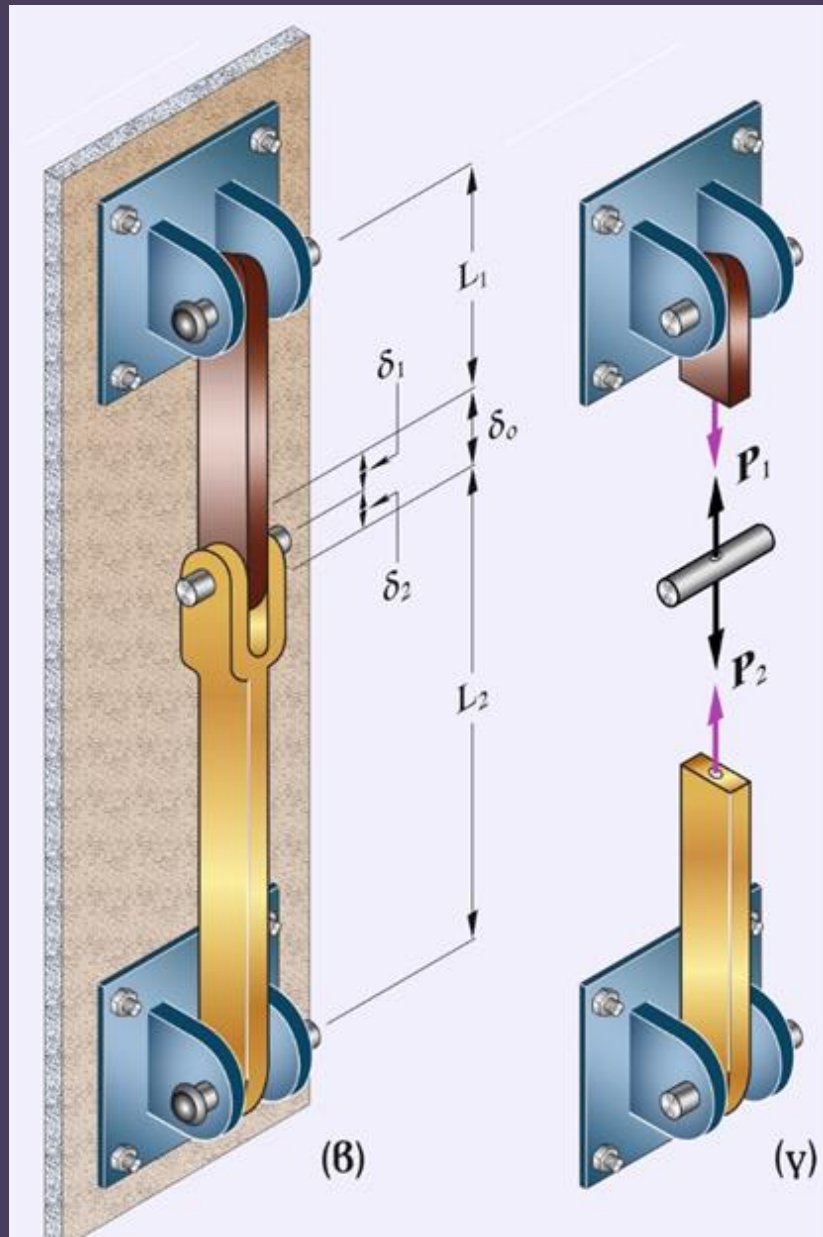
Κατανομή αξονικής δύναμης P σε δύο παράλληλες ράβδους

$$P_1 = \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} P \stackrel{\acute{n}}{=} \frac{k_1}{k_1 + k_2} P \stackrel{\acute{n}}{=} \frac{f_z}{f} + f_z, \quad P_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} P, \quad k_i = \frac{E_i A_i}{L}$$



*Αυτεντατικές
καταστάσεις*

2.23– ΑΥΤΟΕΝΤΑΣΗ ΛΟΓΩ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΤΕΛΕΙΑΣ

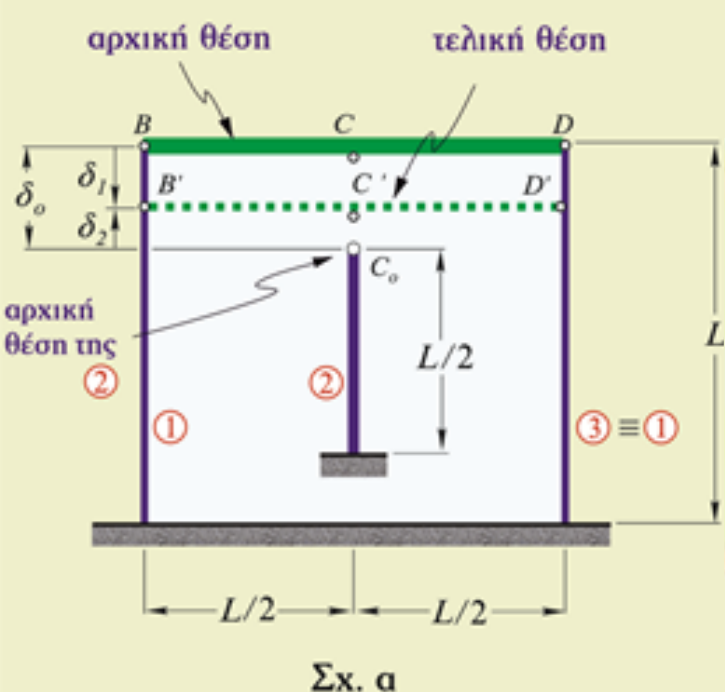


$$\text{Ε.Σ.Μ: } \delta_o = \delta_1 + \delta_2 \quad : \quad \delta_o = \frac{P_1}{E_1 A_1} L_1 + \frac{P_2}{E_2 A_2} L_2$$

$$P_1 = P_2 = \frac{E_1 A_1 \cdot E_2 A_2}{E_1 A_1 L_2 + E_2 A_2 L_1} \delta_o = \frac{\delta_o}{f_1 + f_2} \quad , \quad \text{όπου: } f_i = \frac{L_i}{E_i A_i}$$

23° Παράδειγμα

Η ράβδος ② προορίζονταν να "κουμπώσει" με την άκαμπτη δοκό BD στο C . Από κατασκευαστικό σφάλμα όμως, έγινε μικρότερη κατά $\delta_0 = 0.5 \text{ mm}$ ($\delta_0 \ll L_2$). Θερμαινόμενη κατά κατάλληλη ΔT επιμηκύνθηκε κατά δ_0 ώστε τελικά το C_0 να "κουμπώσει βεβιασμένα" στο C με τη βοήθεια κατάλληλου πείρου (Σχ. α). Ζητούνται οι τάσεις των τριών ράβδων (αυτεντατική κατάσταση) αν $A_2 = 2A_1 = 2A$. Όλες οι ράβδοι είναι χαλύβδινες, οι δε ① και ③ είναι μεταξύ τους ίδιες.



Δίνονται:

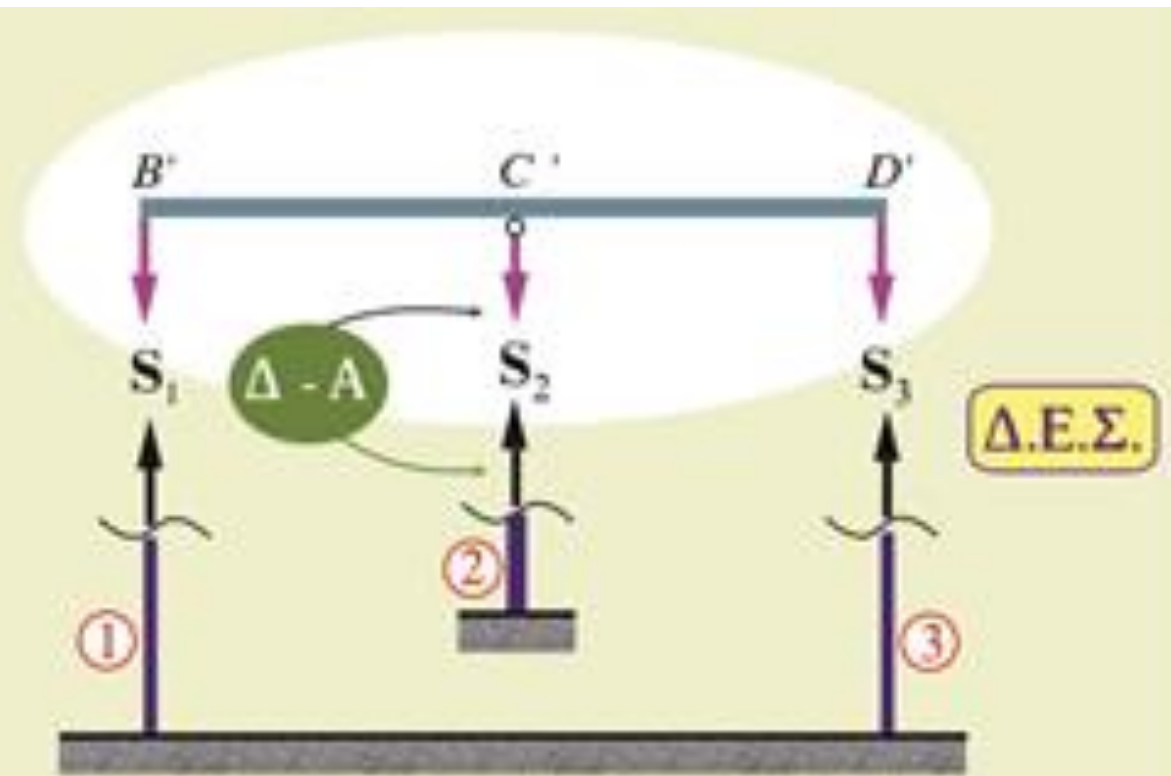
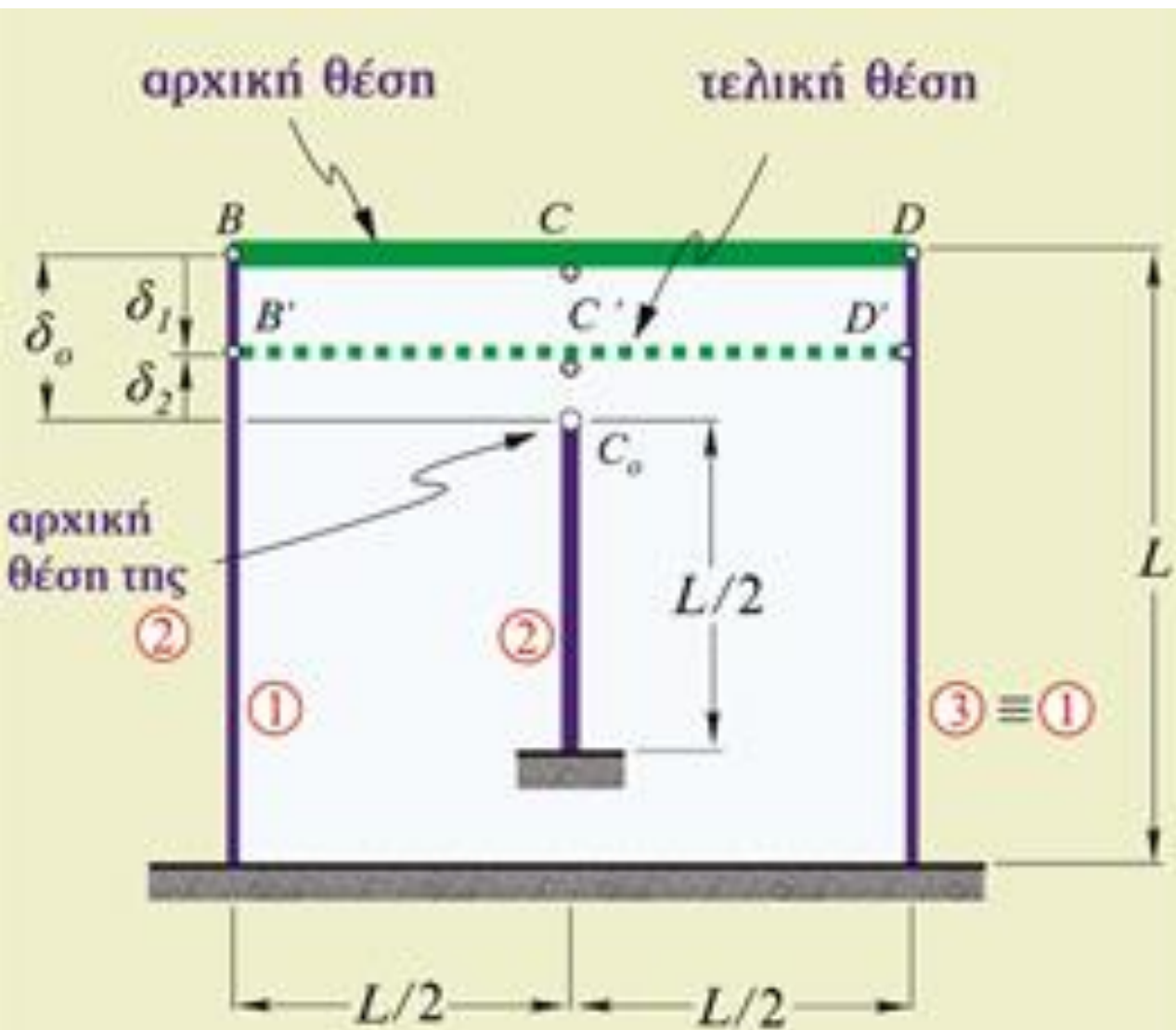
$$L_1 = L_2 = L = 1 \text{ m}, L_3 = L/2$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 210 \text{ GPa}$$

$$\delta_0 = 0.5 \text{ mm}, BCD \text{ άκαμπτη δοκός}$$

23° Παράδειγμα



23° Παράδειγμα

Ε.Σ.Ι: $\uparrow \sum F_y = 0 : \Rightarrow S_2 - S_1 - S_3 = 0 \quad S_3 = S_1 \Rightarrow S_2 = 2S_1 \quad (1)$

Ε.Σ.Μ: $\delta_o = (CC') + (C'C_o) \Rightarrow \delta_o = |\delta_1| + \delta_2 \quad (2)$

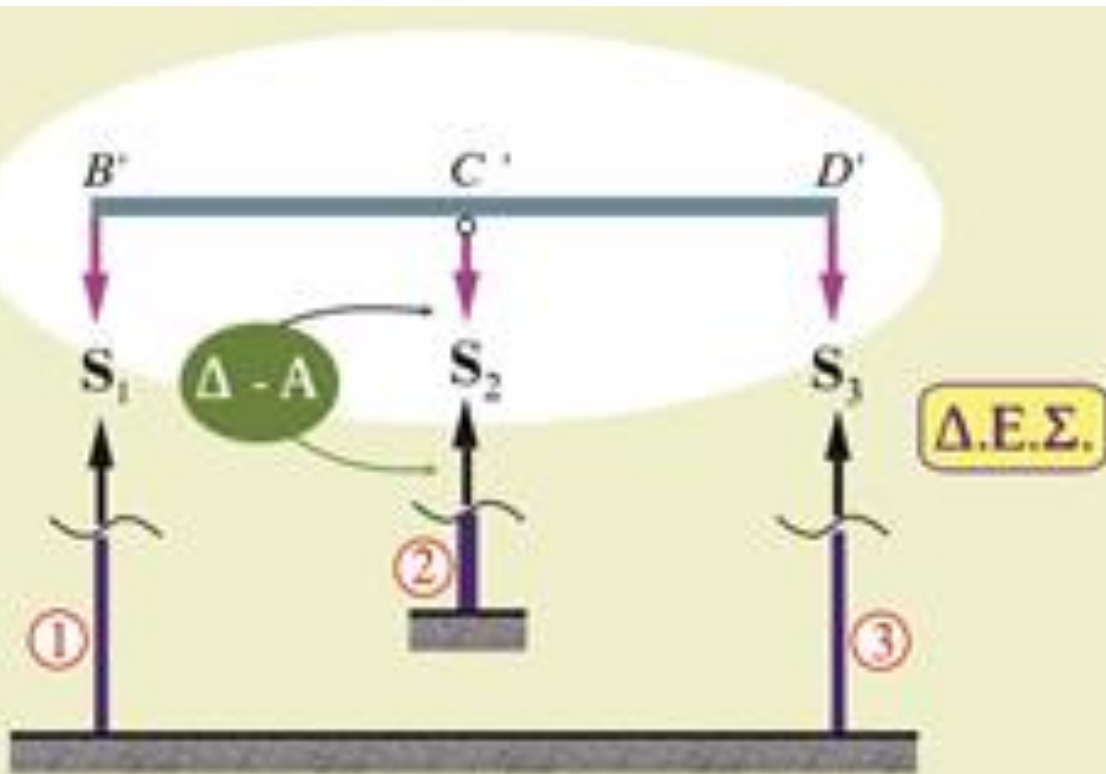
$$S_1 = S_3 = (70 \times 10^3) A \quad , \quad S_2 = 2S_1$$

Αξονικές δυνάμεις των ράβδων:

$$N_1 = N_3 = -S_1 \quad , \quad N_2 = S_2 = 2S_1$$

Τάσεις: $\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{A_1} = -70 \text{ MPa}$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{2S_1}{2A} = 70 \text{ MPa}$$



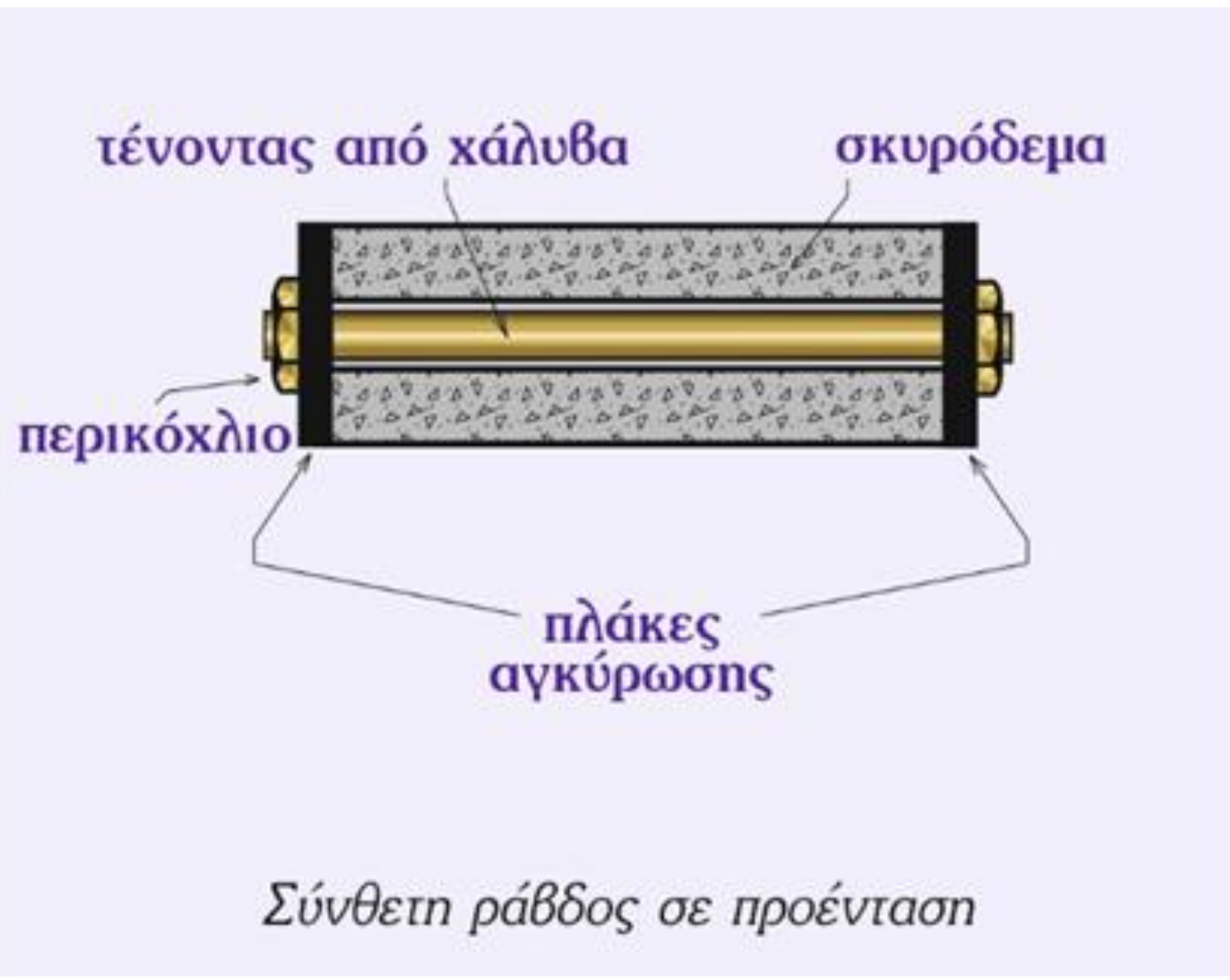
2.25– ΟΠΛΙΣΜΕΝΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ: ΑΥΤΟΕΝΤΑΣΗ



^{6, 1.} Οι πρόβολοι των μεγάλων ανοιγμάτων σε κτίρια, όπως στο *Dominion Tower* στη Μόσχα κατασκευάζονται αποκλειστικά από δοκούς προεντεταμένου σκυροδέματος*

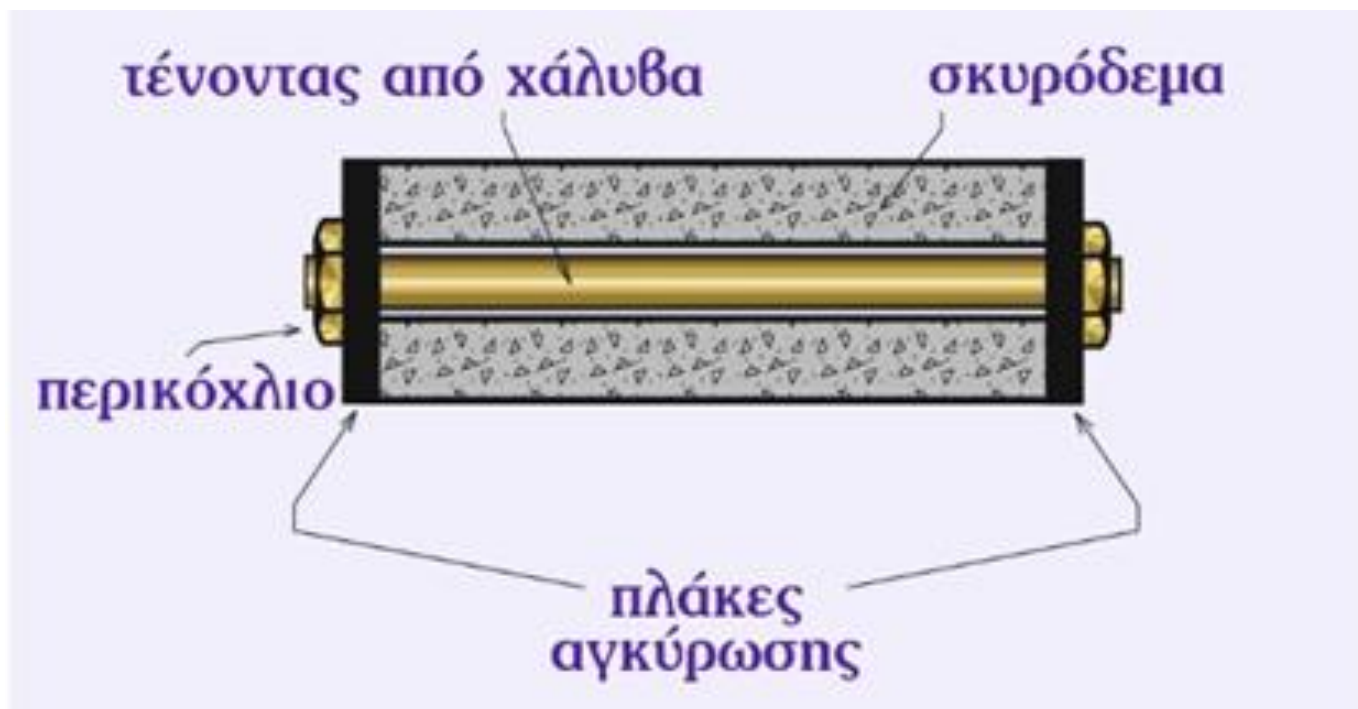
2.25– ΟΠΛΙΣΜΕΝΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ: ΑΥΤΟΕΝΤΑΣΗ

i. Προένταση οπλισμένου σκυροδέματος

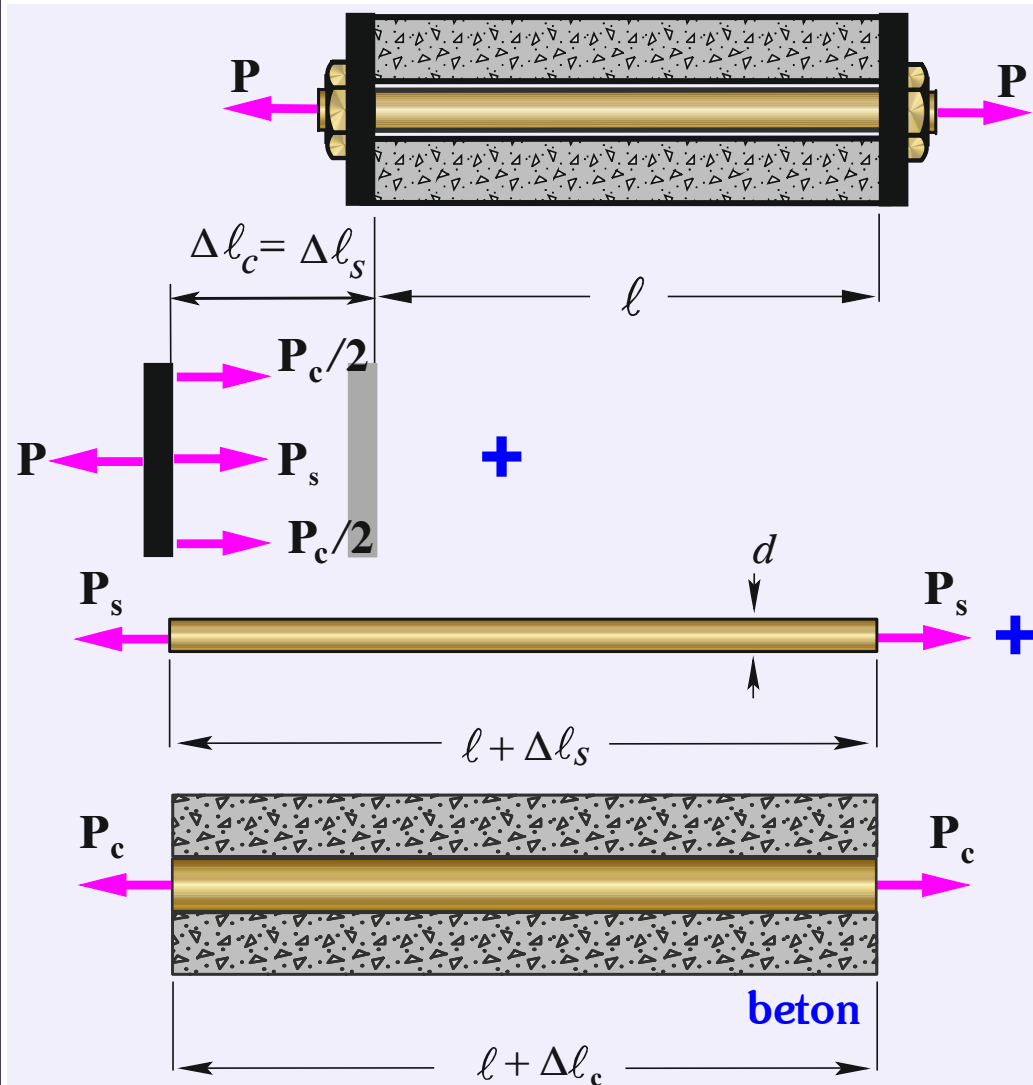


i. Προένταση οπλισμένου σκυροδέματος

Προένταση: Όση εφελκυστική δύναμη προκληθεί στον τένοντα (λόγω σύσφιξης των περικοχλίων), ακριβώς τόση αλλά θλιπτική ασκείται από αυτόν στο σκυρόδεμα (μέσω των πλακών αγκύρωσης), δηλαδή: $F_s = |F_c|$



ii. Οπλισμένο σκυροδέμα σε θερμοκρασιακή μεταβολή



$$P_c^{\Delta T} = |P_s^{\Delta T}| = L \frac{(a_s - a_c) \cdot \Delta T}{f_s + f_c}$$

$$\sigma_c = \frac{P_c^{\Delta T}}{A_c}, \quad \sigma_s = \frac{-|P_s^{\Delta T}|}{A_s}$$

2.25– ΟΠΛΙΣΜΕΝΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ: ΑΥΤΟΕΝΤΑΣΗ

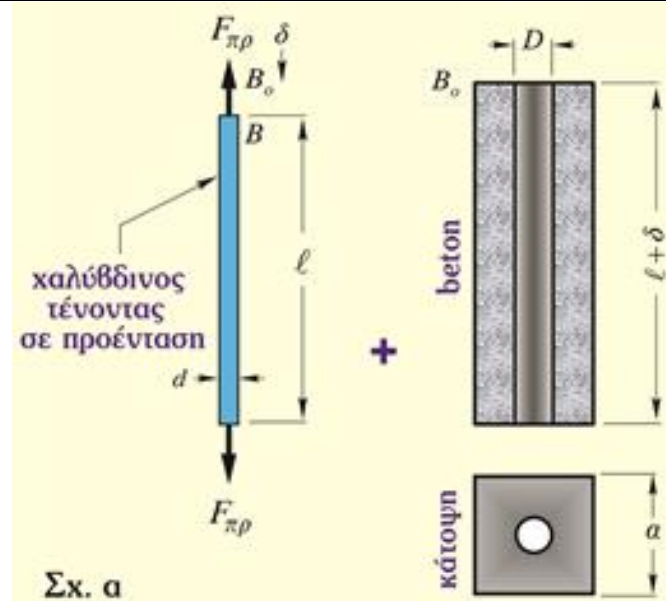
ii. Οπλισμένο σκυροδέμα σε θερμοκρασιακή μεταβολή

Τεχνολογικό συμπέρασμα: Για θέρμανση ($\Delta T > 0$) ομοαξονικών ράβδων το υλικό με το μεγαλύτερο συντελεστή θερμικής διαστολής (δηλ. ο χάλυβας) **θλίβεται**, ενώ με τον μικρότερο (δηλ. το σκυρόδεμα) **εφελκύεται**.

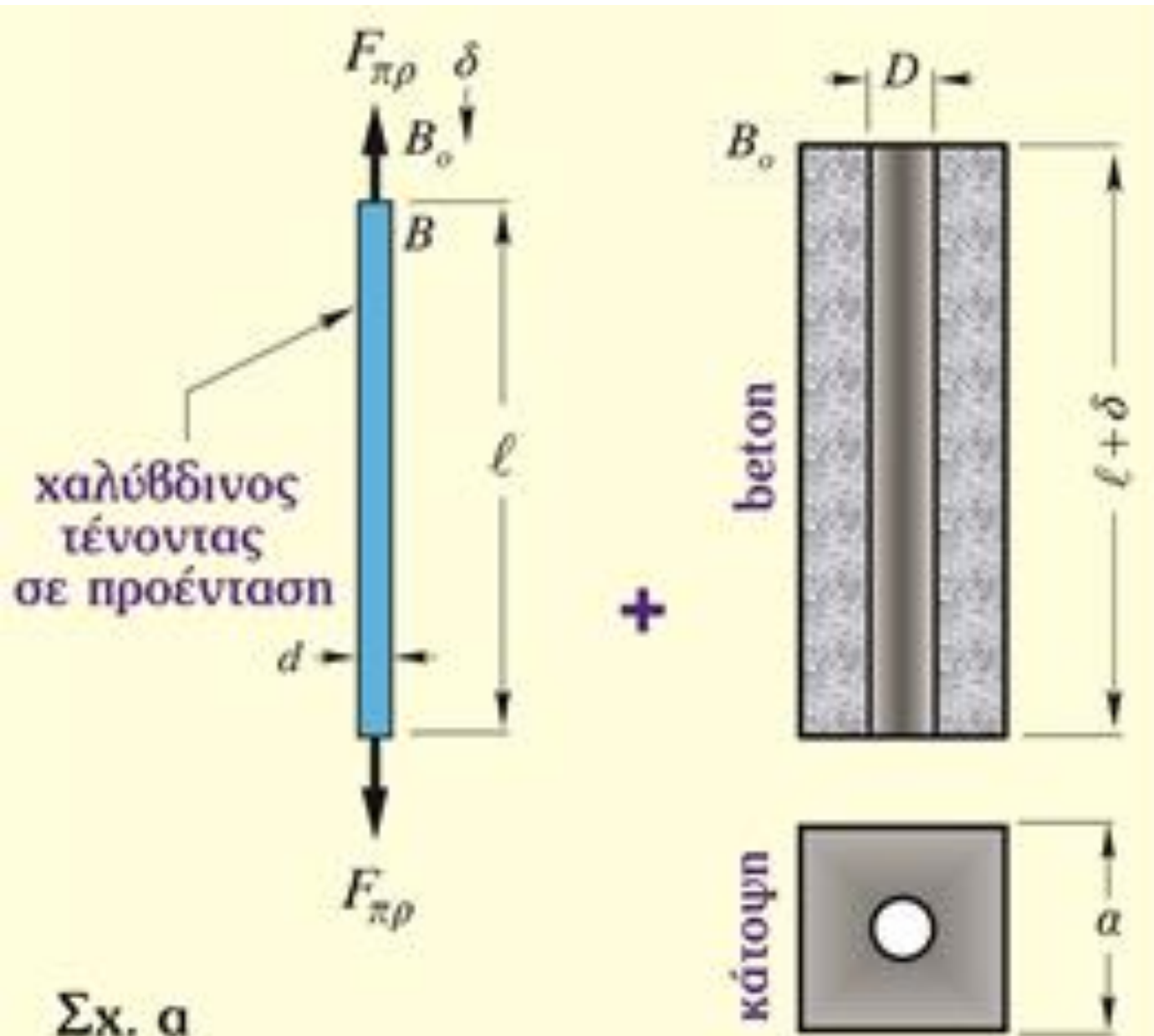
Προφανώς αν $\Delta T < 0$ ισχύουν τα αντίθετα, δηλαδή ο οπλισμός θα **εφελκύεται** ενώ το σκυρόδεμα θα **θλίβεται**, που είναι και προτιμότερο, αφού η αντοχή του σε θλίψη είναι ικανοποιητική. Αυτός είναι και ο λόγος που η σκυροδέτηση είναι προτιμότερο να πραγματοποιείται το καλοκαίρι.

25° Παράδειγμα "Θλίψη προεντεταμένου σκυροδέματος"

Το τμήμα από σκυρόδεμα είναι τετραγωνικής διατομής πλευράς $a=12$ cm και στο κέντρο του φέρει κυκλική οπή διαμέτρου $D=4$ cm, προκειμένου να τοποθετηθεί η χαλύβδινη (τένοντας). Η χαλύβδινη, διαμέτρου $d=2$ cm, προ της τοποθέτησής της είχε προενταθεί με εφελκυστική τάση $\sigma_{\pi\rho}=200$ MPa και έτσι προεντεταμένη, με τη βοήθεια των πλακών αγκύρωσης και των κοχλιών, τοποθετείται στο σκυρόδεμα. Δίνεται ο λόγος $E_s/E_c=10$ και ζητούνται οι τάσεις που θα προκύψουν μετά την ανακατανομή των τάσεων.



25° Παράδειγμα "Θλίψη προεντεταμένου σκυροδέματος"



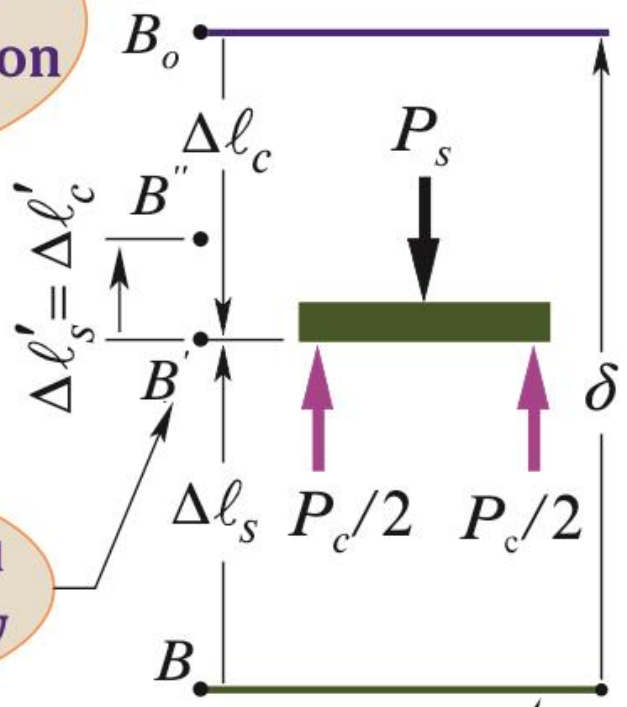
$$\delta = F_o \ell / E_s A_s \Rightarrow$$

$$\delta = \sigma_o \ell / E_s \quad , \quad \sigma_o = F_o / A$$

Σχ. α

25° Παράδειγμα "Θλίψη προενταμένου σκυροδέματος"

θέση προενταμένου
τένοντα & αρχική beton



τελική θέση και
των δύο υλικών

αρχική θέση τένοντα
πριν την προένταση

Ε.Σ.Μ: $\delta = \Delta l_s + |\Delta l_c|$

Ε.Σ.Ι: $\uparrow \sum F_y = 0 : 2(P_c/2) - P_s = 0 \Rightarrow$
 $P_c = P_s$

$$P_c = P_s \approx \frac{E_c A_c A_s}{E_s A_s + E_c A_c} \sigma_{\pi\rho}$$

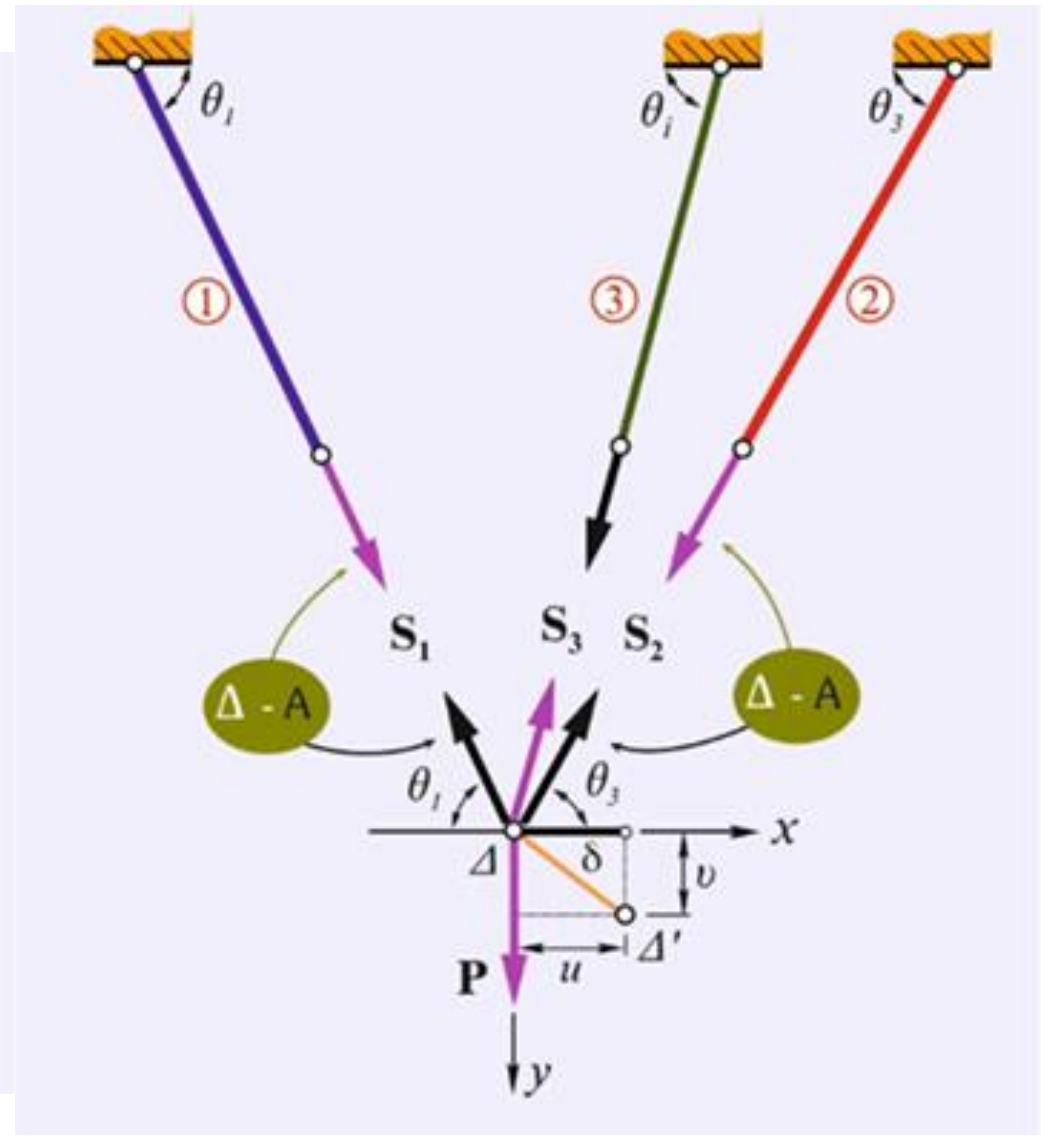
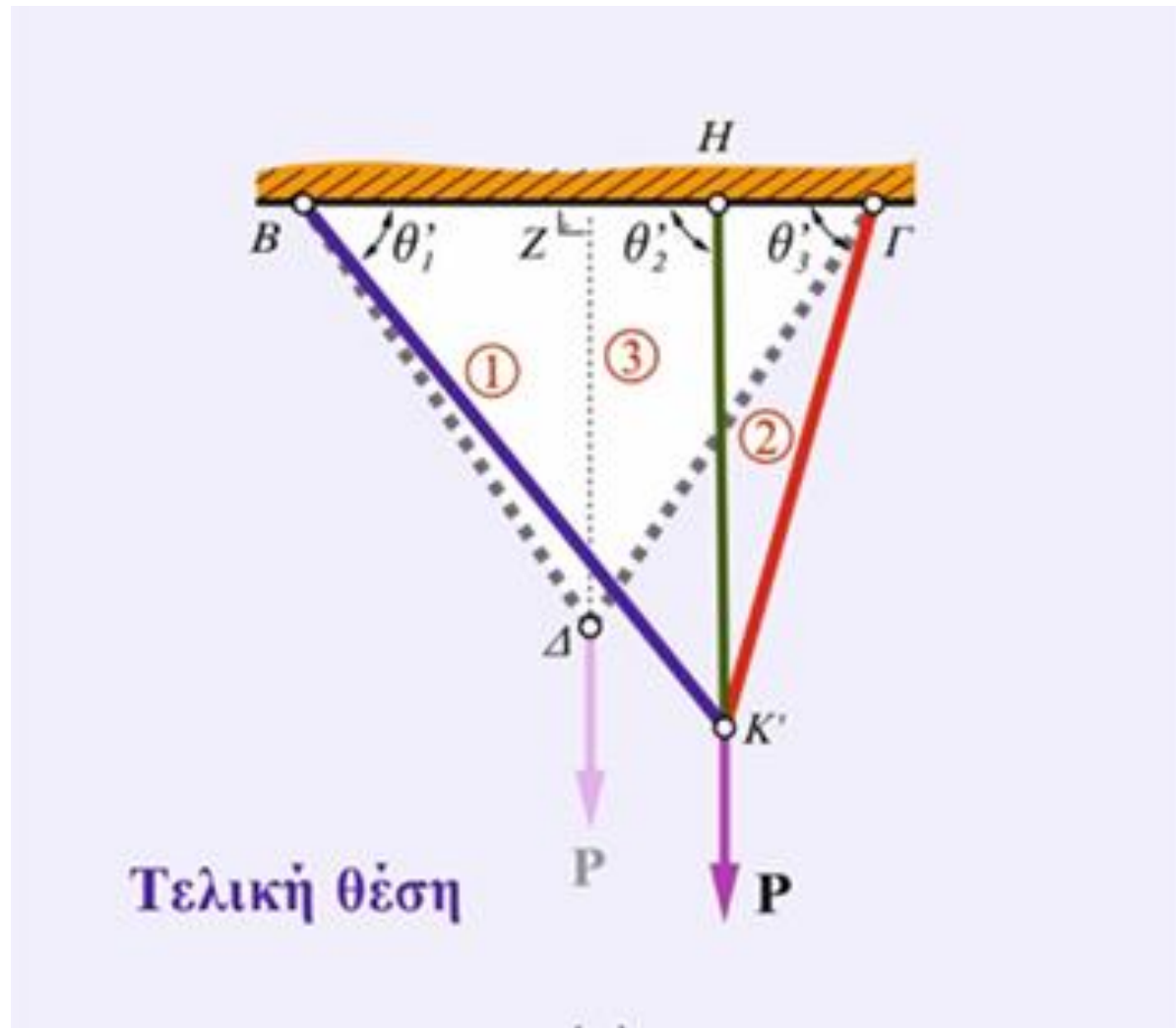
$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} \sigma_{\pi\rho}$$

$$\sigma_b = \frac{-P_c}{A_c} = \frac{-E_c A_s}{E_s A_s + E_c A_c} \sigma_{\pi\rho}$$



*Άλλες μέθοδοι
επίλυσης*

2.27- ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ



2.27 – ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ

$$\delta_i = u \cos \theta_i + v \sin \theta_i$$

- Η θ_i είναι η **γωνία** της "*i*" ράβδου με την οριζόντια.
- Αν οι προβολές των u και v (δηλαδή οι $u \cos \theta$ και $v \sin \theta$) επάνω στην αρχική διεύθυνση της ράβδου συντελούν σε **αύξηση** του μήκους της προσημαίνονται με "+", ενώ αν συντελούν σε **ελάττωση** προσημαίνονται με "-".
- Στο νόμο του *Hooke* $\delta_i = N_i L_i / E_i A_i$ η N_i προσημαίνεται με "+" όταν είναι εφελκυστική και με "-" όταν είναι θλιπτική, ή ισοδύναμα το δ_i προσημαίνεται με "+" στην επιμήκυνση και με "-" στη βράχυνση.
- Η αρχή των αξόνων τοποθετείται στον **αρχικό** κόμβο K και οι άξονες x, y προτιμώνται έτσι που οι συνιστώσες της (u, v) μετατόπισης να είναι **θετικά** x, y .

2.27 – ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ

Η υλοποίηση της μεθόδου, πραγματοποιείται ως εξής:

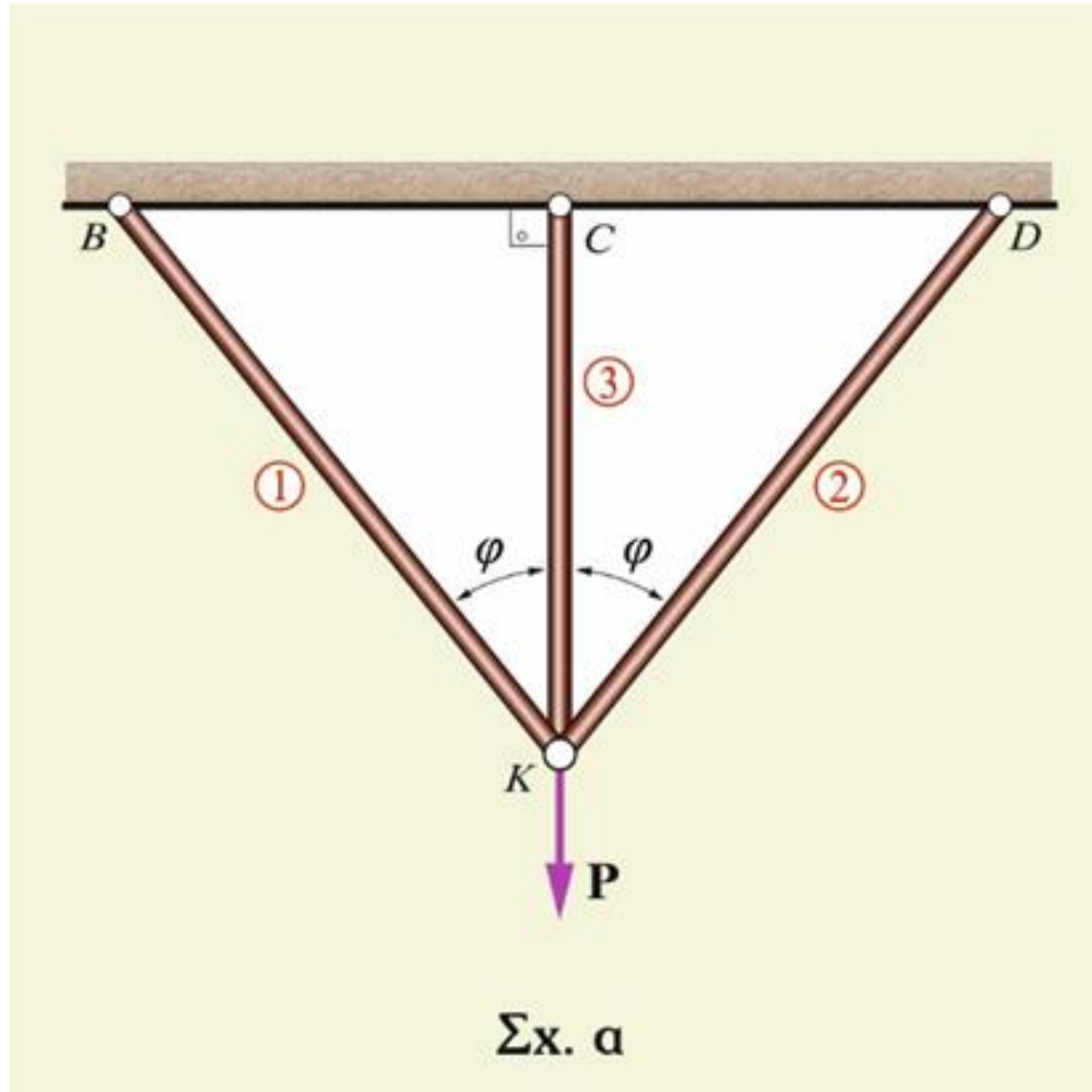
1. Αποτυπώνουμε το Δ.Ε.Σ. του υπερστατικού κόμβου, οπότε υποθέτοντας ότι όλες οι συντρέχουσες ράβδοι *εφελκύνονται*, σχεδιάζουμε τις αντιδράσεις τους προς τα έξω αυτού.
2. Για την κάθε μία από τις ράβδους του προσδιορίζουμε τη *γωνία* της θ_i με την οριζόντια, καθώς και το μήκος της L_i .
3. Καταστρώνουμε τις 2 εξισώσεις ισορροπίας του κόμβου και πιστοποιούμε το *βαθμό υπερστατικότητας*.
4. Σχεδιάζουμε τον εν λόγω κόμβο K στην *αρχική* του θέση, καθώς και στην τελική του K' για την οποία *τελική* του θέση *προβαίνουμε σε εκτίμησή της*.
5. Στην *αρχική* θέση θέτουμε σύστημα αξόνων Kxy έτσι ώστε η απόσταση KK' (που εκφράζει τη *μετατόπιση* του κόμβου) να βρίσκεται στα θετικά x αλλά και y , ή ισοδύναμα θέτουμε την KK' στο πρώτο τεταρτημόριο.
Σχεδιάζουμε τις (θετικές) συνιστώσες (u, v) της μετατόπισης KK' .

2.27– ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ

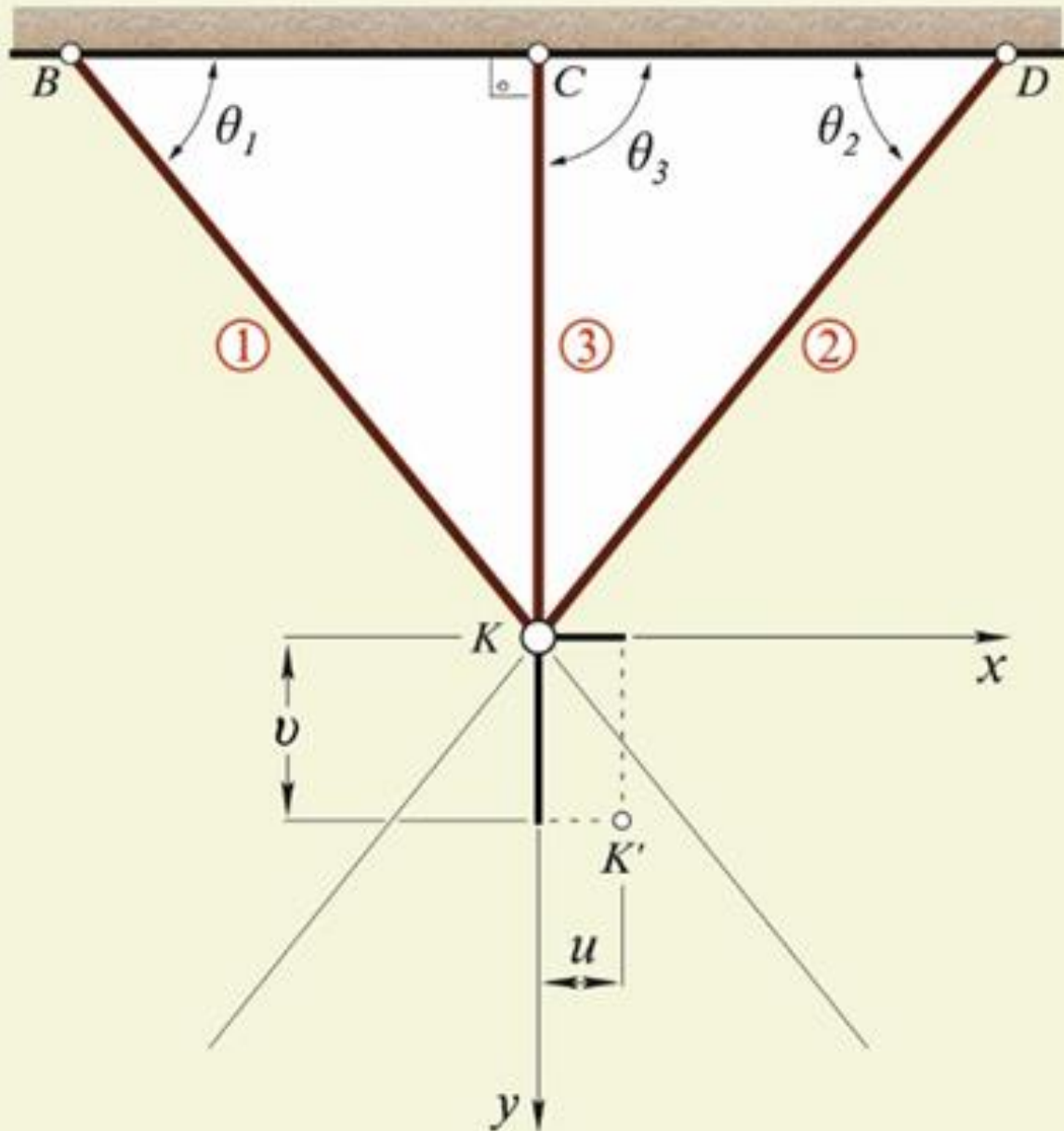
6. Για την κάθε ράβδο καταγράφουμε τη μεταβολή ΔL_i (ή απλούστερα δ_i), οπότε προκύπτουν αθροιστικά τόσες εξισώσεις, όσες είναι ο βαθμός υπερστατικότητας **συν** δύο.
7. Έστω ότι ο βαθμός υπερστατικότητας είναι 1, δηλαδή συντρέχουν 3 ράβδοι στον κόμβο, οπότε προκύπτουν 3 εξισώσεις. Τότε, από το σύστημα των **δύο** μόνον εξ αυτών υπολογίζουμε τις συνιστώσες (u, v) τις οποίες και αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση (η δε προκύπτουσα δεν θα εμπεριέχει προφανώς u, v) και είναι επομένως η αναζητούμενη *εξίσωση συμβιβαστού των μετατοπίσεων*.
8. Εφαρμόζοντας σε αυτήν το νόμο *Hooke* και επιλύοντας το σύστημα αυτής **συν** των δύο Ε.Σ.Ι. του κόμβου K , προκύπτουν N_1, N_2, N_3 .
9. Επιστρέφοντας υπολογίζουμε και τις (u, v) . Αν προκύψουν θετικές, μαντέψαμε τη σωστή **τελική** θέση K' του κόμβου.
10. Αν συντρέχουν 4 ράβδοι (άρα 2 φορές **υπερστατικό**), τις εκφράσεις των (u, v) τις αντικαθιστούμε και στις 2 υπόλοιπες εξισώσεις, άρα τότε προκύπτουν 2 εξισώσεις συμβιβαστού, οπότε και επιλύουμε το σύστημα των 4 εξισώσεων (οι 2 είναι οι Ε.Σ.Ι. του κόμβου).

28° Παράδειγμα "Επίλυση υπερστατικού με τη μέθοδο της μετατόπισης"

Δίνονται το P και η γωνία φ και ζητούνται οι N_i των τριών ραβδων.



28° Παράδειγμα "Επίλυση υπερστατικού με τη μέθοδο της μετατόπισης"

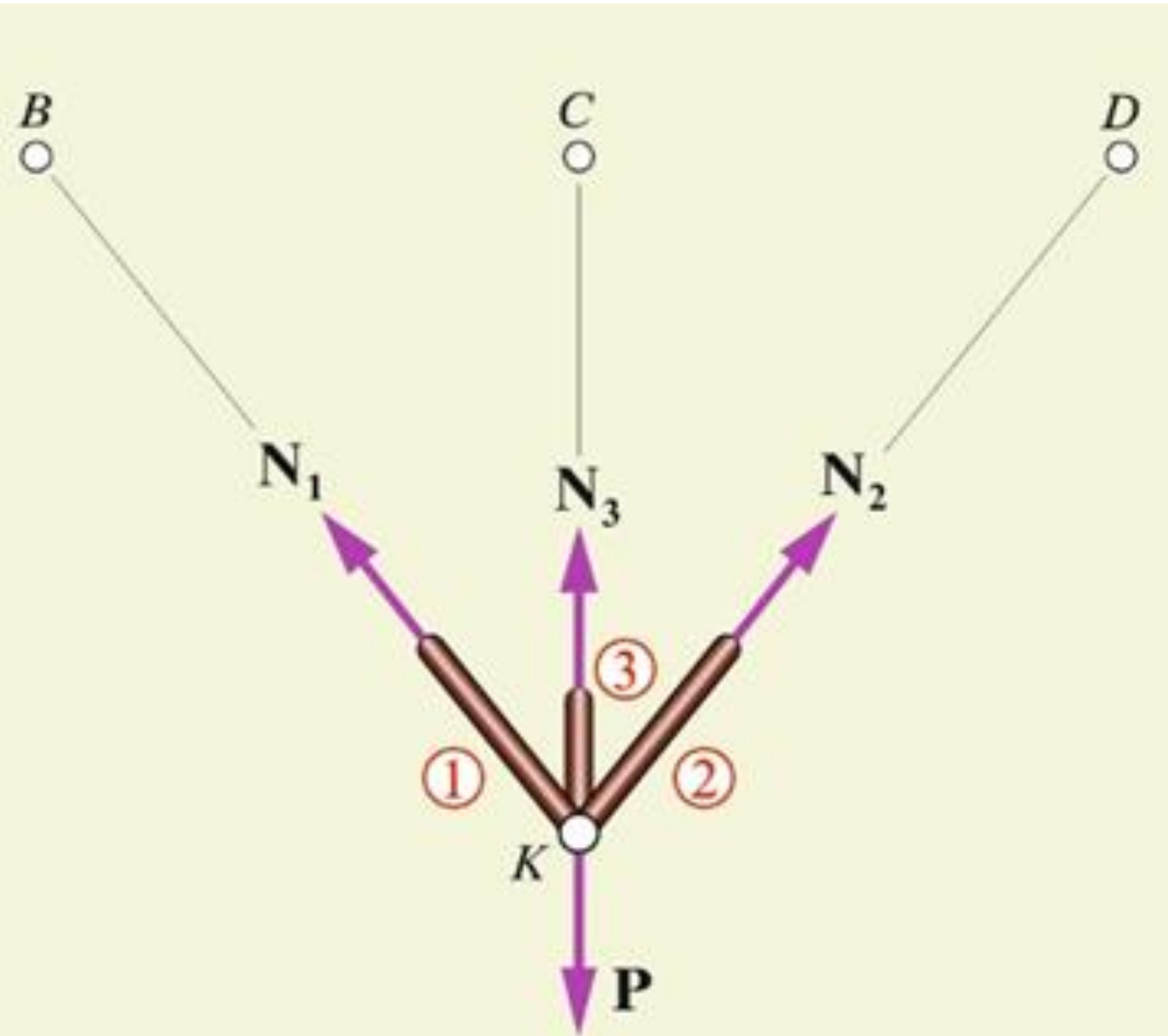


$$(L_1, \theta_1 = 90^\circ - \varphi)$$

$$(L_2 = L_1, \theta_2 = \theta_1 = 90^\circ - \varphi)$$

$$(L_3 = L_1 \cos \varphi, \theta_3 = 90^\circ)$$

28° Παράδειγμα "Επίλυση υπερστατικού με τη μέθοδο της μετατόπισης"



Εξισώσεις ισορροπίας κόμβου K:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad :$$

$$N_1 \sin \varphi + N_2 \sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow$$

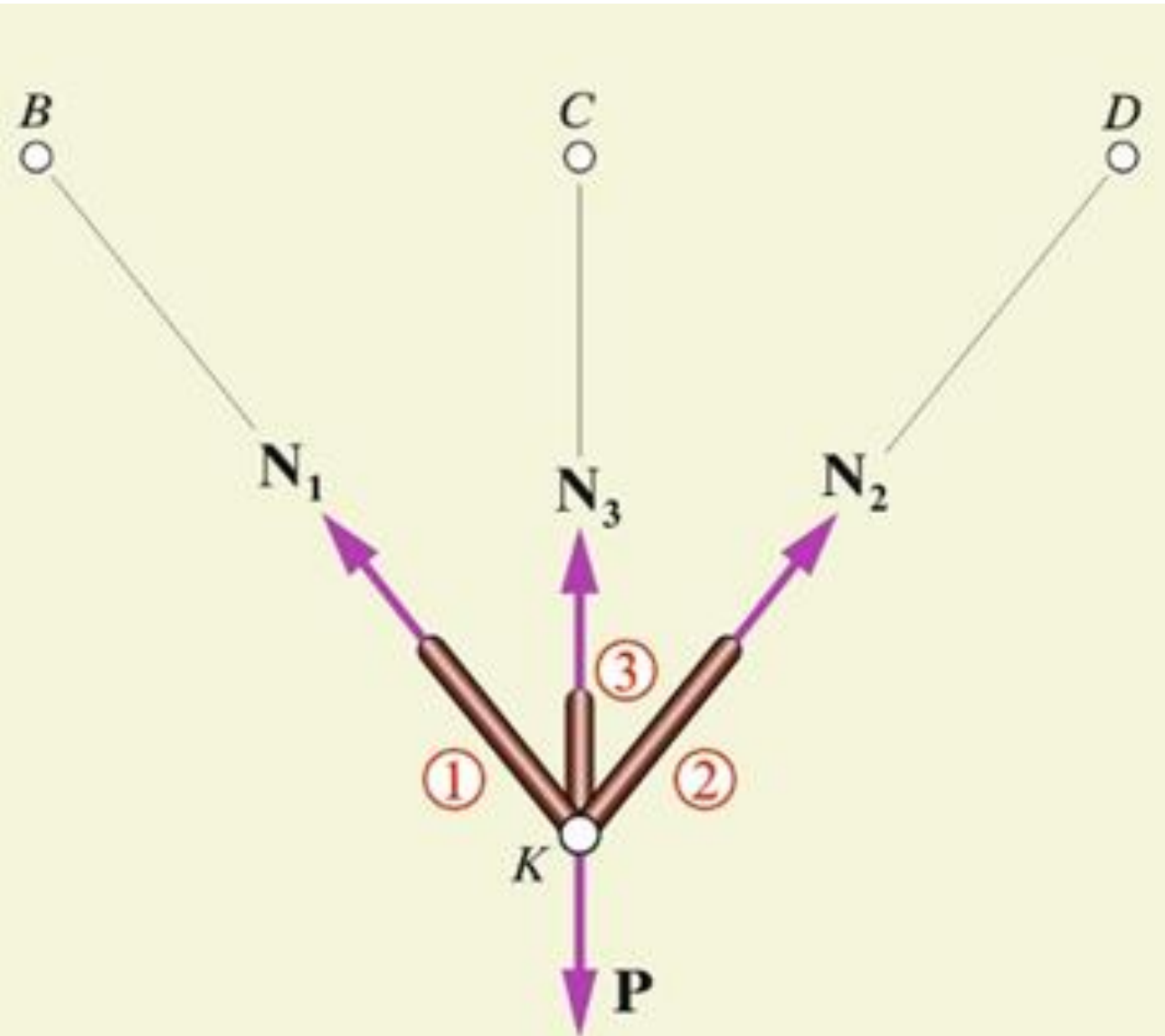
$$\boxed{N_1 = N_2} \quad \text{—συμμετρία—}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad :$$

$$N_1 \cos \varphi + N_3 + N_2 \cos \varphi - P = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{2N_1 \cos \varphi + N_3 = P}$$

28° Παράδειγμα "Επίλυση υπερστατικού με τη μέθοδο της μετατόπισης"

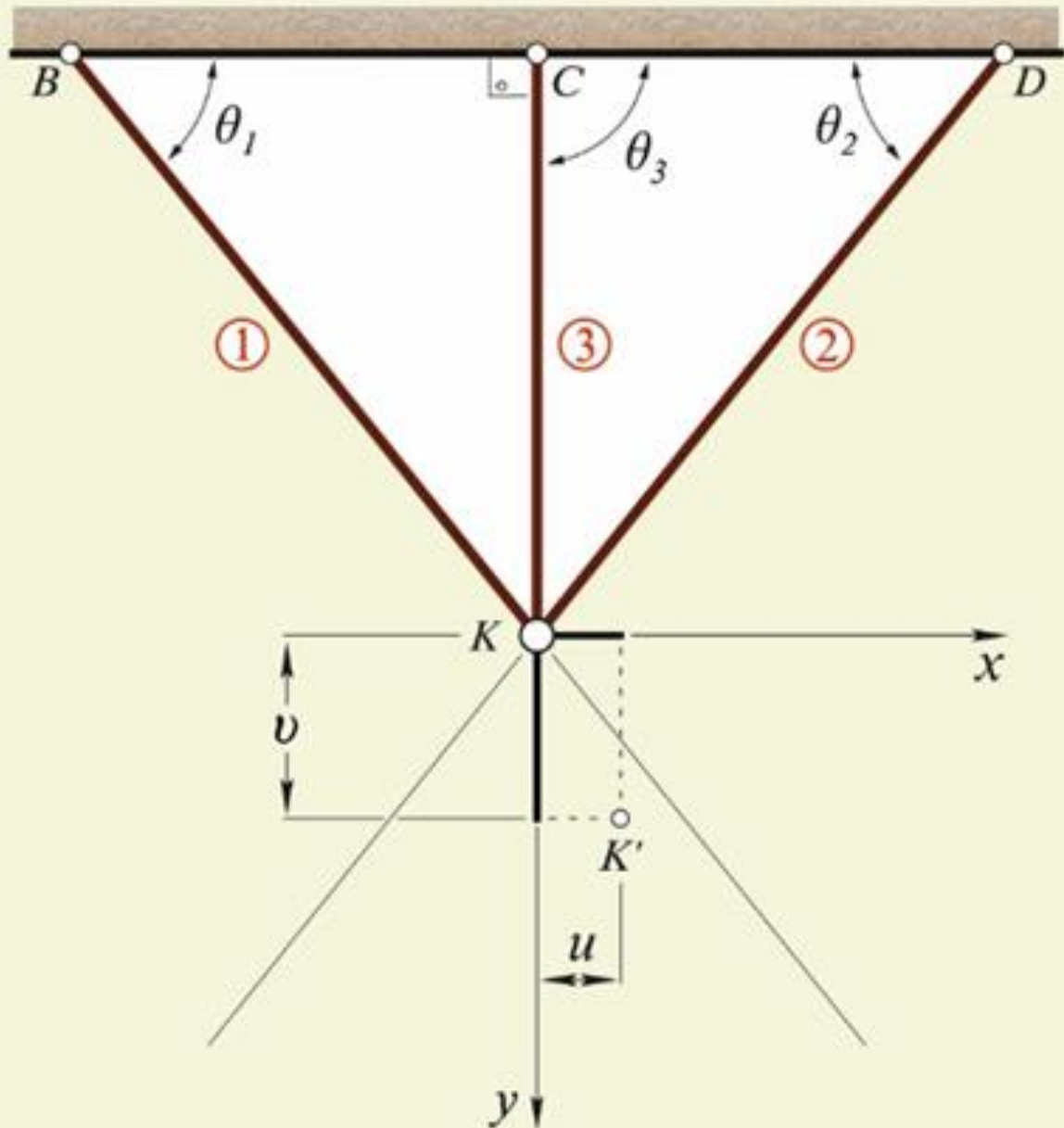


Επίλυση συστήματος

$$N_3 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \varphi}$$

$$N_1 = N_2 = \frac{P \cos^2 \varphi}{1 + 2 \cos^3 \varphi}$$

28° Παράδειγμα "Επίλυση υπερστατικού με τη μέθοδο της μετατόπισης"



Εξισώσεις μετατόπισης των τριών ραβδών:

Ράβδος ①:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= u \cos \theta_1 + v \sin \theta_1 = \\ &= u \cos(90^\circ - \varphi) + v \sin(90^\circ - \varphi) = \\ &= u \sin \varphi + v \cos \varphi\end{aligned}$$

Ράβδος ②:

$$\begin{aligned}\delta_2 &= -u \cos \theta_2 + v \sin \theta_2 = \\ &= -u \sin \varphi + v \cos \varphi\end{aligned}$$

Ράβδος ③:

$$\begin{aligned}\delta_3 &= 0 + v \sin \theta_3 = \\ &= v \sin 90^\circ \Rightarrow \delta_3 = v\end{aligned}$$

