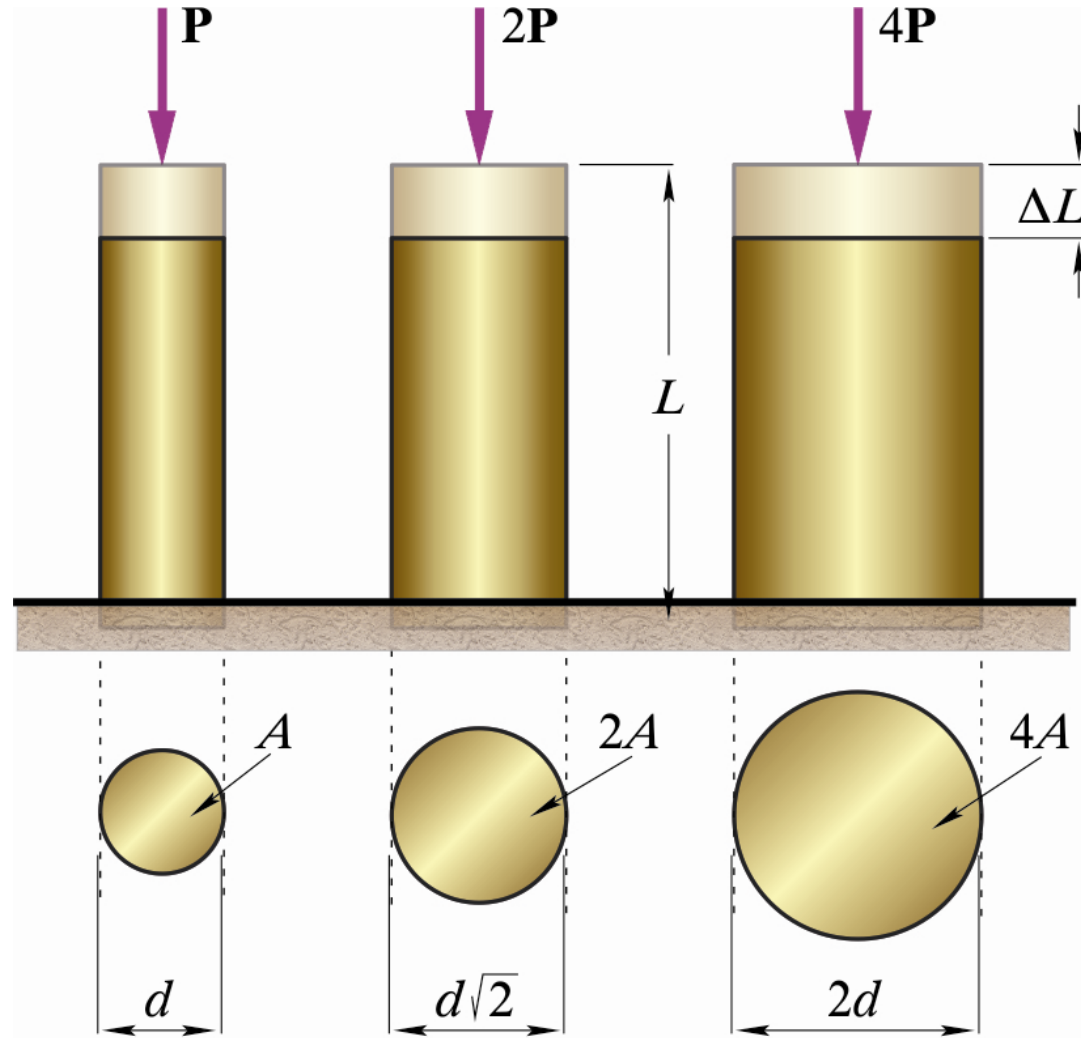




*ΑΙΩΝΙΚΟΣ*

*ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ - ΘΛΙΨΗ*



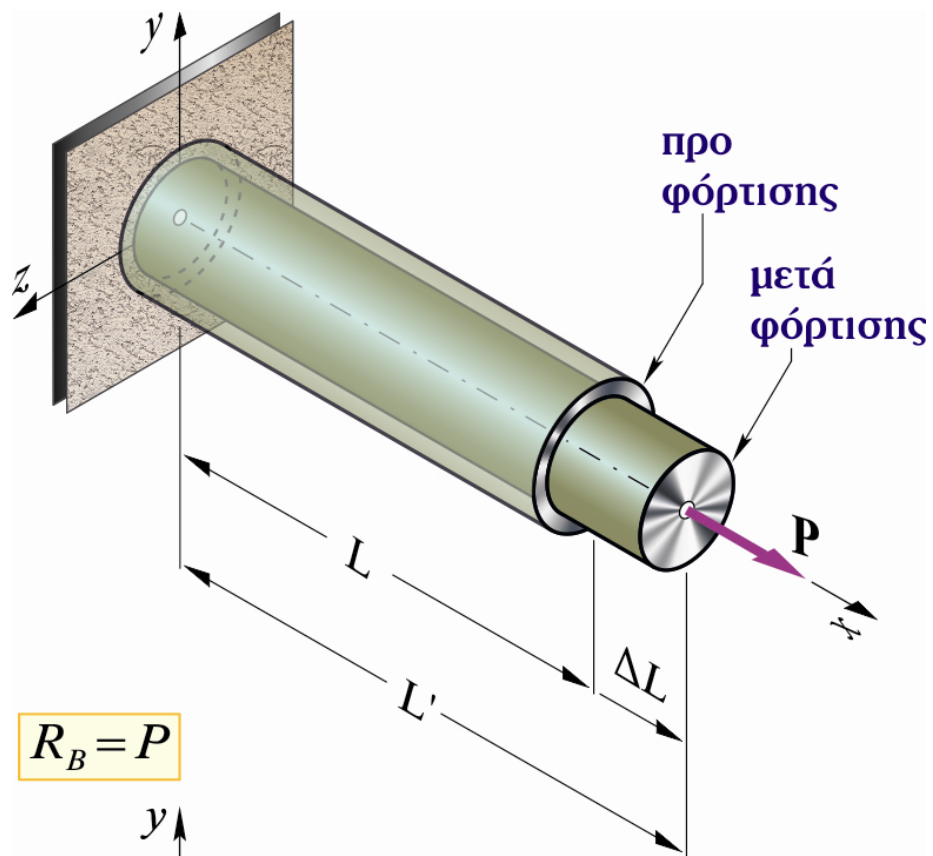
*Ράβδοι με ίδια τάση και ίδια παραμόρφωση*

## Παραδοχές για τη μελέτη της αξονικής καταπόνησης

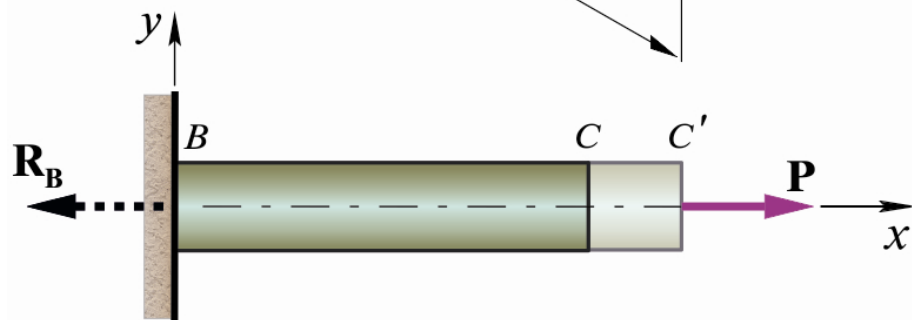
- α') Ο άξονας της ράβδου είναι ευθύγραμμος.
- β') Η δύναμη δρα στη διεύθυνση του άξονα της ράβδου και το σημείο εφαρμογής της είναι το κέντρο βάρους της διατομής (επομένως οι τάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε αυτή).
- γ') Οι τάσεις είναι μικρότερες από την τάση αναλογίας  $\sigma_A$  του υλικού.
- δ') Όλες οι κατά μήκος ίνες της ράβδου επιμηκύνονται το ίδιο.
- ε') Οι διατομές που είναι αρχικά επίπεδες και κάθετες στον άξονα της ράβδου, παραμένουν έτσι και μετά την παραμόρφωση.
- στ') Στα θλιβόμενα μέρη δεν υπάρχει κίνδυνος λυγισμού.
- ζ') Τα υλικά είναι ομογενή, συνεχή και ισότροπα.

# *ΜΕΡΟΣ 1<sup>ο</sup>*

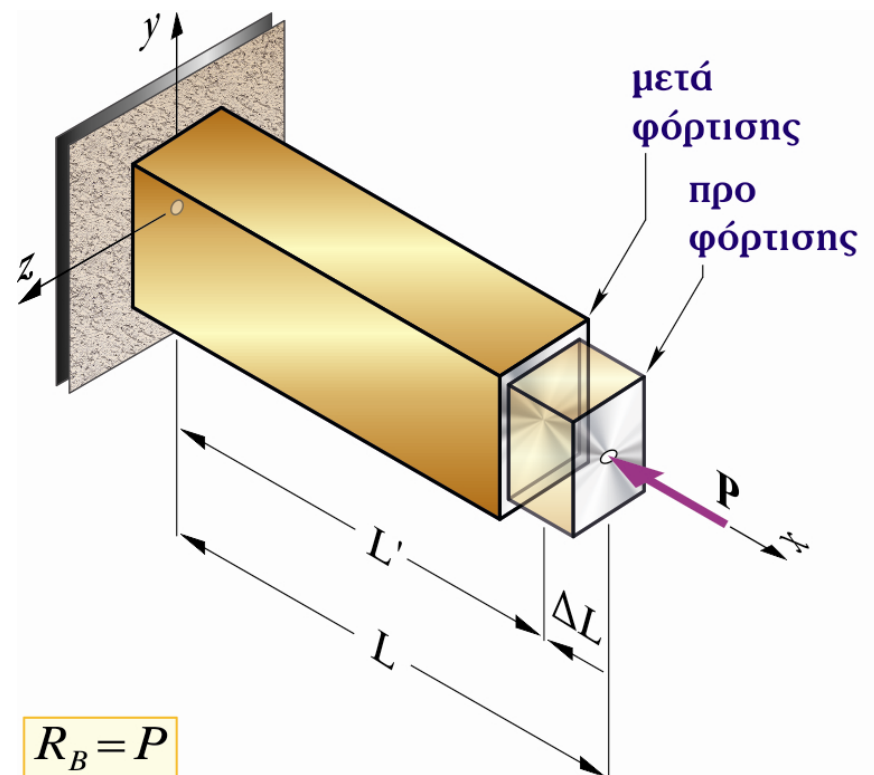
*Μετατοπίσεις στην  
αξονική καταπόνηση*



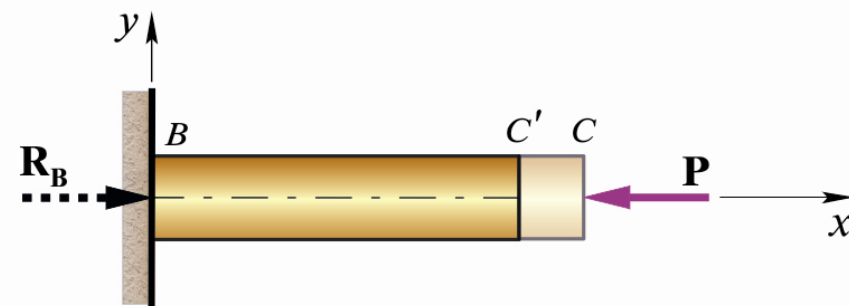
$$R_B = P$$



Επιμήκυνση πακτωμένης ράβδου



$$R_B = P$$



Επιβράχυνση πακτωμένης ράβδου

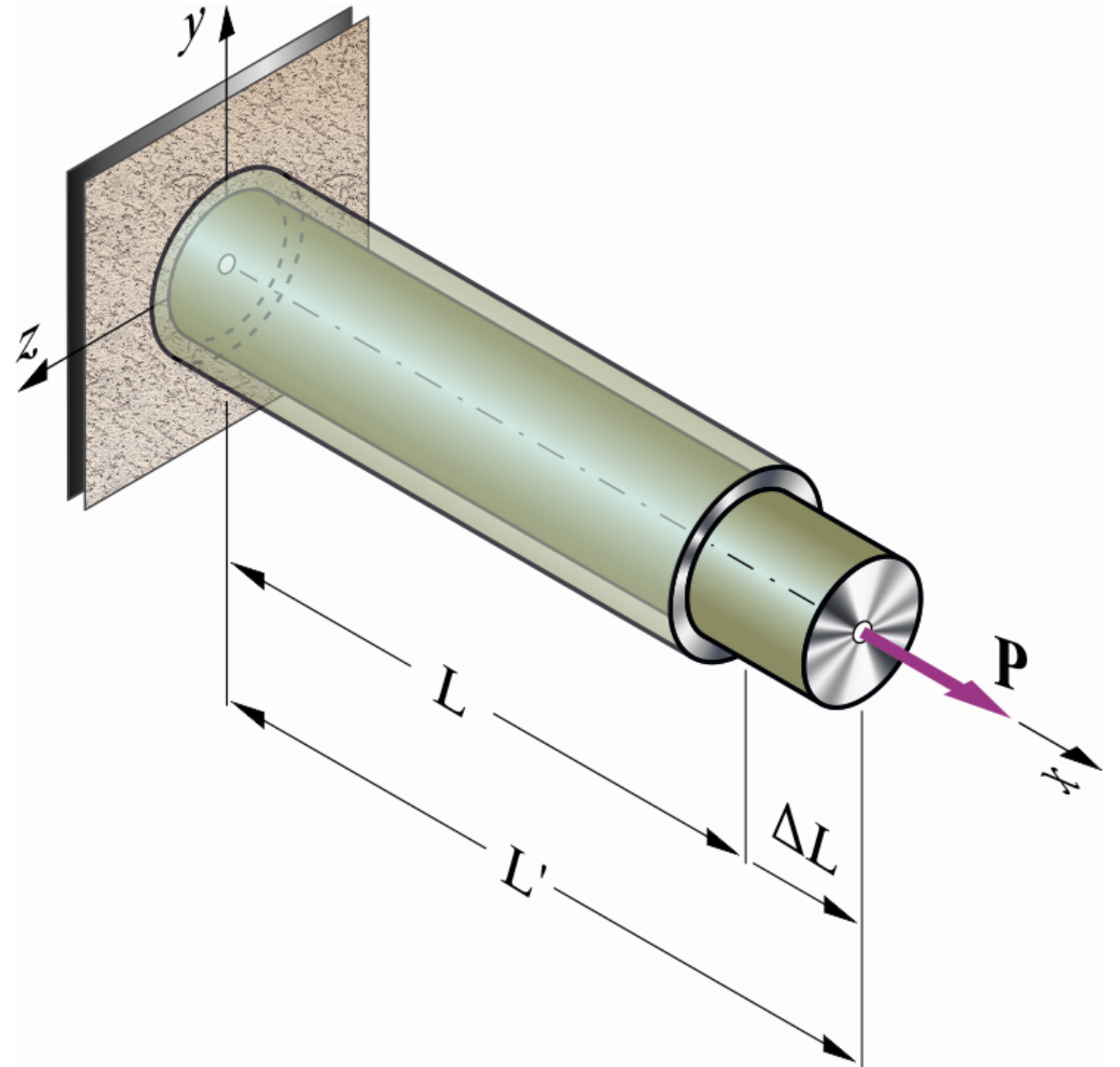
## 2.1- ΝΟΜΟΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ Ή ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΗΟΟΚΕ

Τελικό μήκος εφελκνόμενης ράβδου:

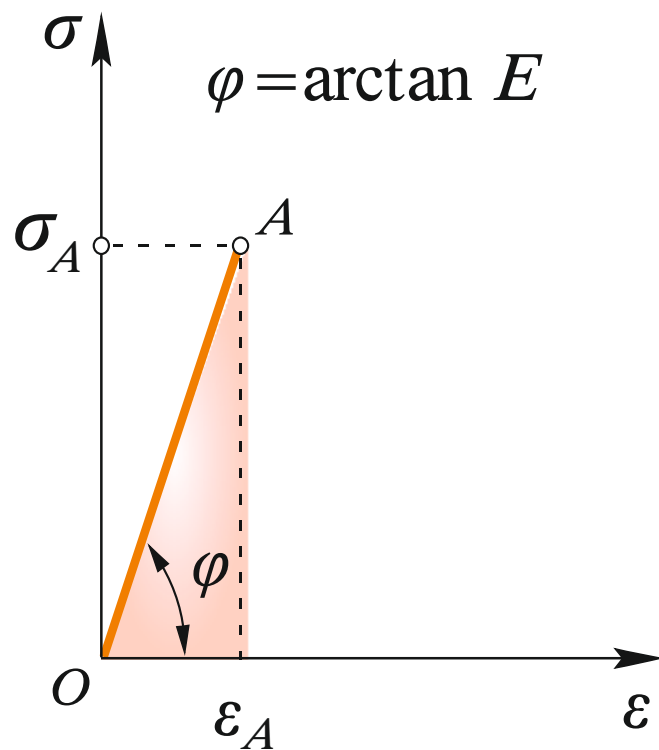
$$L' = L + \Delta L \Rightarrow L' = L(1 + \varepsilon_x)$$

Καταστατικός νόμος αναλογίας (ή νόμος Hooke):

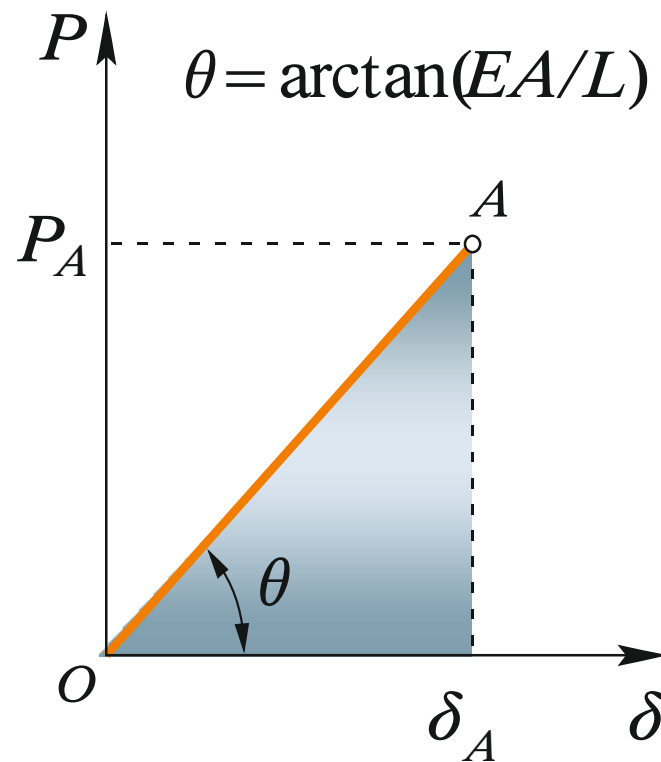
$$\Delta L = \delta = \frac{N}{EA} L \quad \text{ή:} \quad \sigma_x = E\varepsilon_x \leq \sigma_A$$



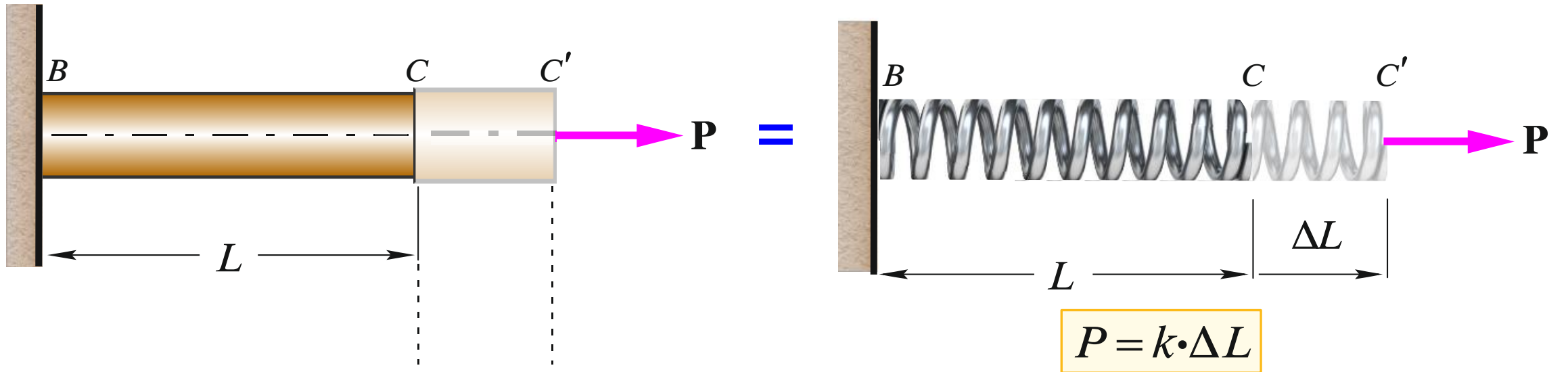
**Μέτρο ελαστικότητας:** Το  $E(=\sigma/\varepsilon)$ , που είναι πάντα θετικό, είναι ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ της τάσης και της τροπής (παραμόρφωσης) και αντιπροσωπεύει την τάση εκείνη που *θα προκαλούσε*  $\varepsilon=1$ , δηλαδή  $\Delta L=L$ .



(α) Διάγραμμα  $\sigma$ - $\varepsilon$

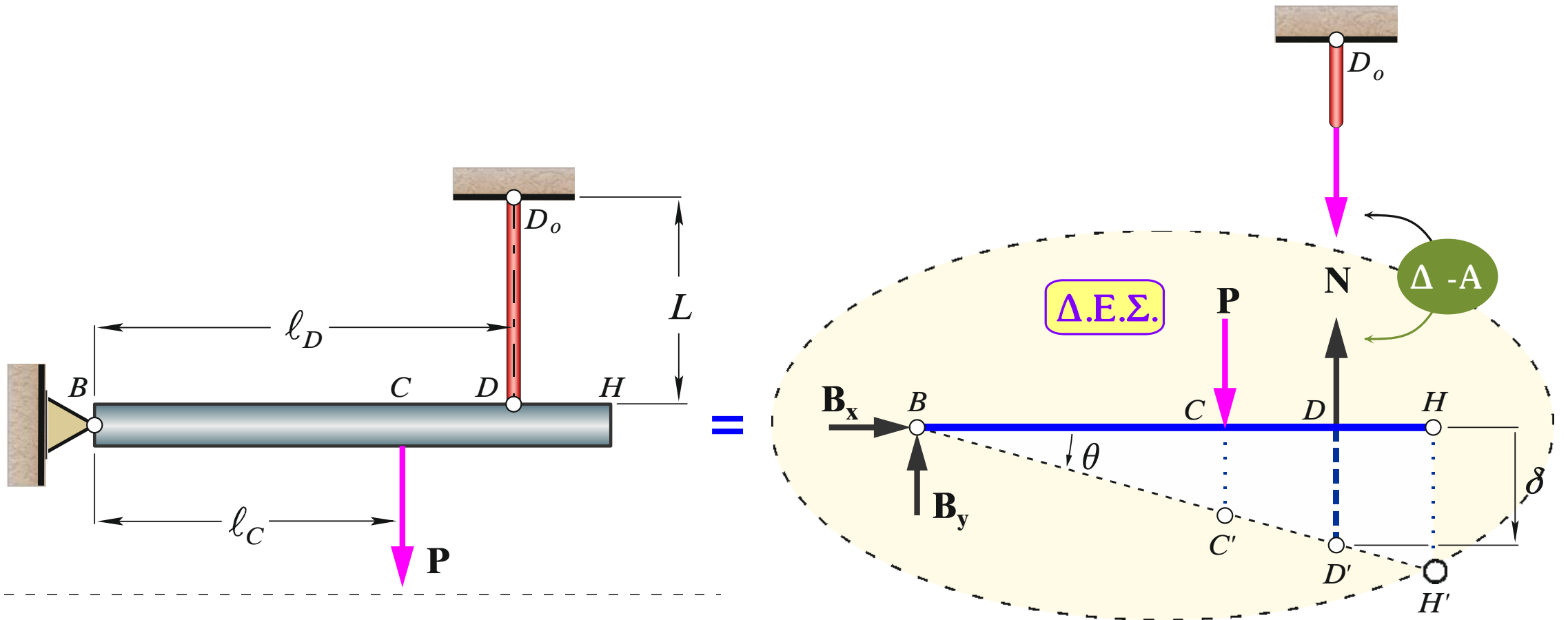


(β) Διάγραμμα  $P$ - $\delta$

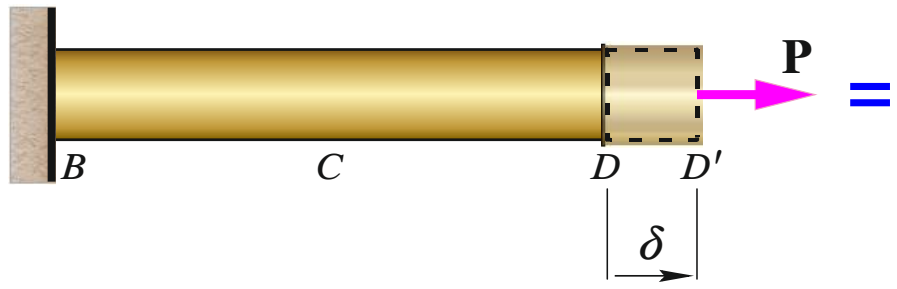
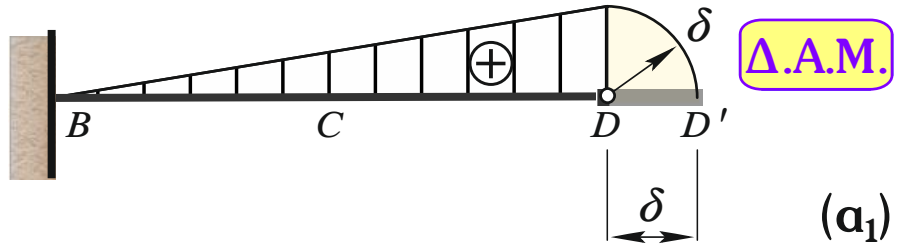


*Προσομοίωση ράβδου με ελατήριο σταθεράς  $k$*



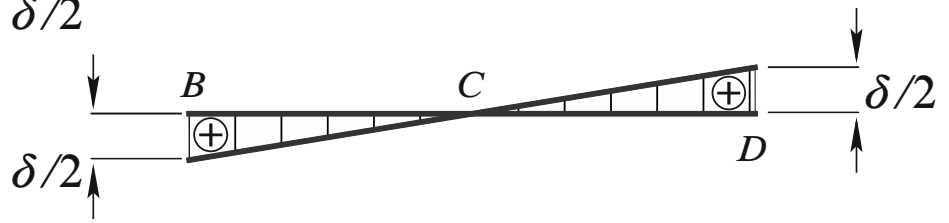
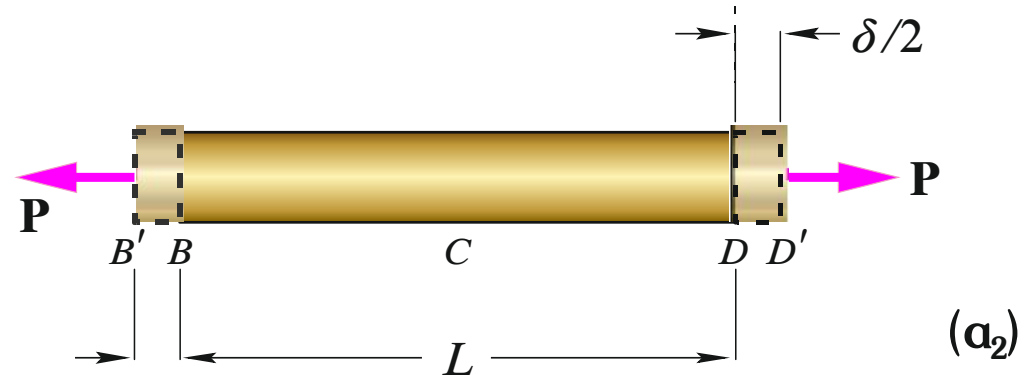


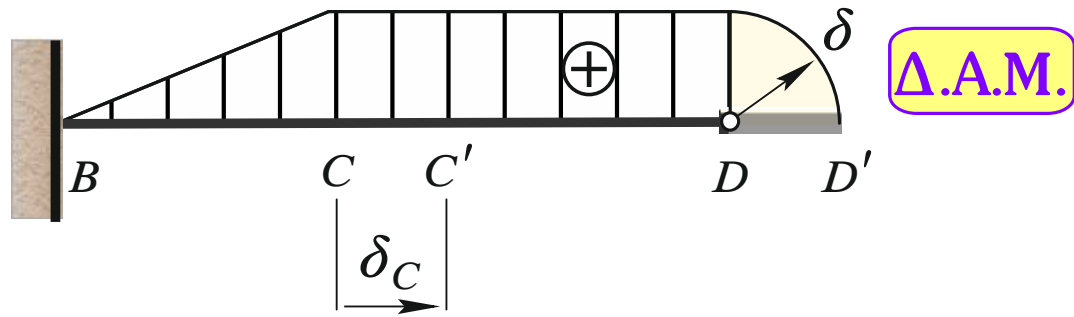
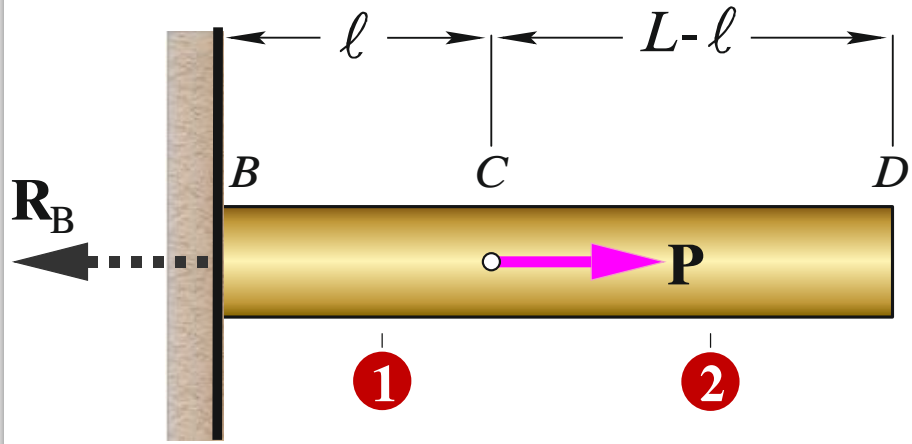
*Έμμεσα φορτιζόμενη ράβδος  $D_0D$*



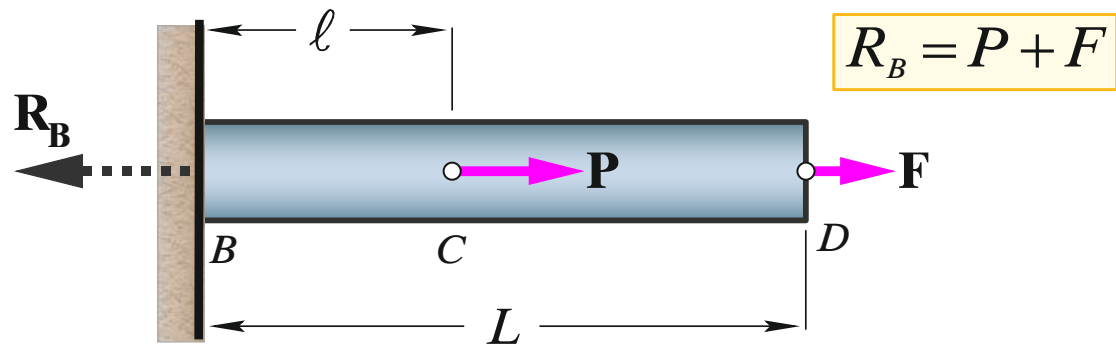
$$\Delta L = (DD') = \delta = \delta_D$$

ενώ:  $\delta_B = 0$



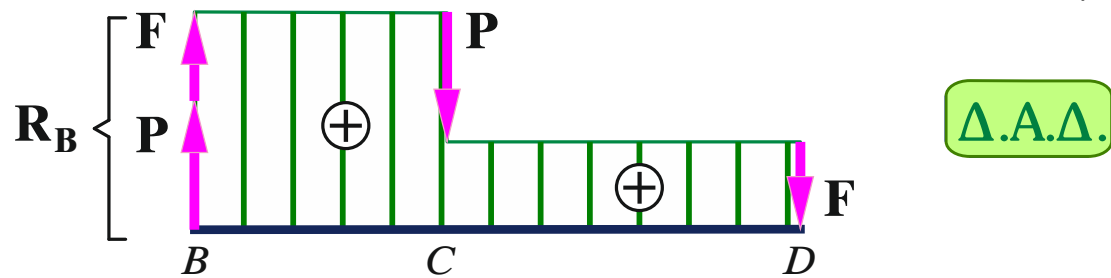


$$\Delta L = \Delta L_{BD} = \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} = \frac{N_{BC}l}{EA} + \frac{N_{CD}(L-l)}{EA} = \frac{Pl}{EA} + 0 \Rightarrow \Delta L = \frac{Pl}{EA}$$

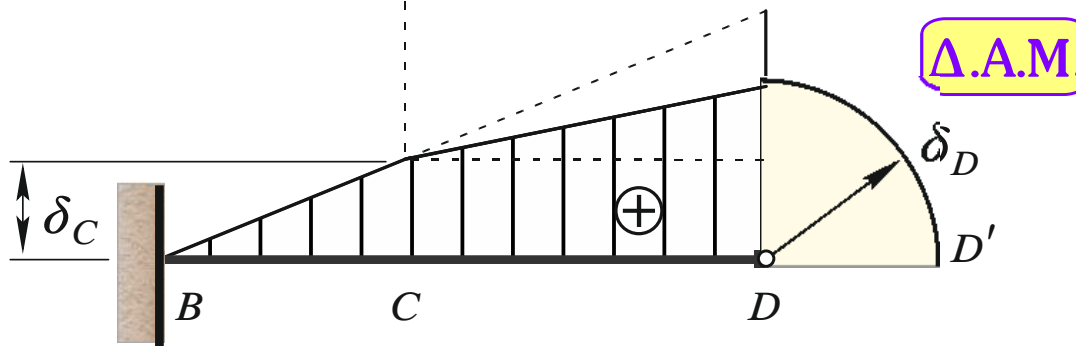


$$\Delta L = \Delta L_P + \Delta L_F = \frac{P\ell}{EA} + \frac{FL}{EA}$$

(v)



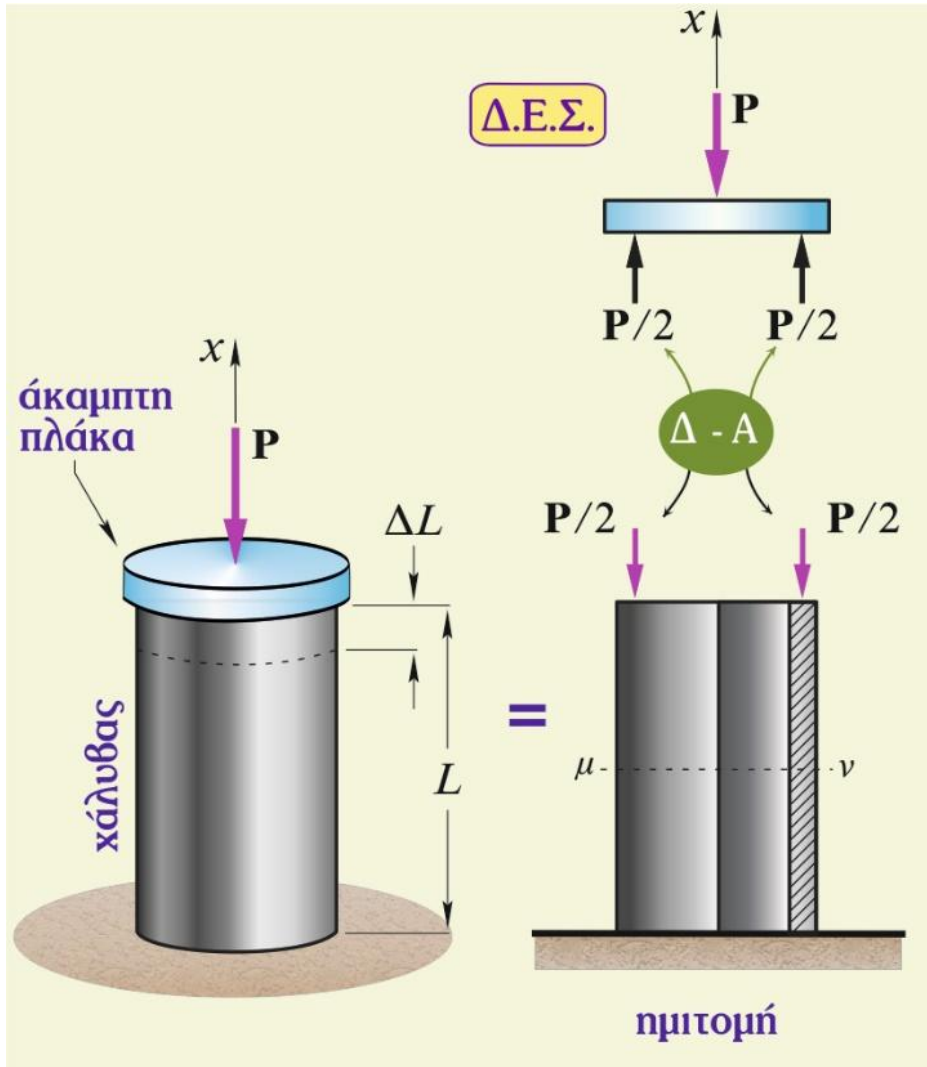
A.A.A.



A.A.M.

# 1<sup>ο</sup> Παράδειγμα

Ζητούνται  $\Delta L$  και  $\sigma_x$  αν  $L=4$  m,  $D=10$  cm,  $t=5$  mm,  $E=210$  GPa,  $P=100$  kN.



$$\Delta L = \frac{NL}{EA} = \frac{(-P) \cdot L}{EA} = \frac{-P \cdot L}{E\pi(D^2 - d^2)/4} =$$
$$= \frac{-100 \cdot 4 \cdot 4}{210 \times 10^6 \cdot \pi(0.1^2 - 0.09)} = -0.0128 \text{ m} \Rightarrow$$

$\Delta L = -1.28 \text{ mm}$  (το "-" σημαίνει βράχυνση)

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{(-P)}{A} = \frac{-100 \text{ kN}}{\pi(0.1^2 - 0.09^2)/4} \Rightarrow$$

$\sigma \approx -67.11 \text{ MPa}$  (θλιπτική)

## 2<sup>ο</sup> Παράδειγμα

Ζητείται η μετατόπιση του κόμβου  $K$  αν  $E=210 \text{ GPa}$ ,  $A=4 \text{ cm}^2$ ,  $L=5 \text{ m}$ ,  $b=6 \text{ m}$ ,  $P=40 \text{ kN}$ .

Ε.Σ.Ι. του κόμβου  $K$ :

$$N = \frac{P}{2 \cos \varphi} = 25 \text{ kN} \quad , \quad \text{όπου: } \sin \varphi = \frac{b/2}{L} = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos \varphi = \frac{4}{5} \quad , \quad \varphi = 36.86^\circ$$

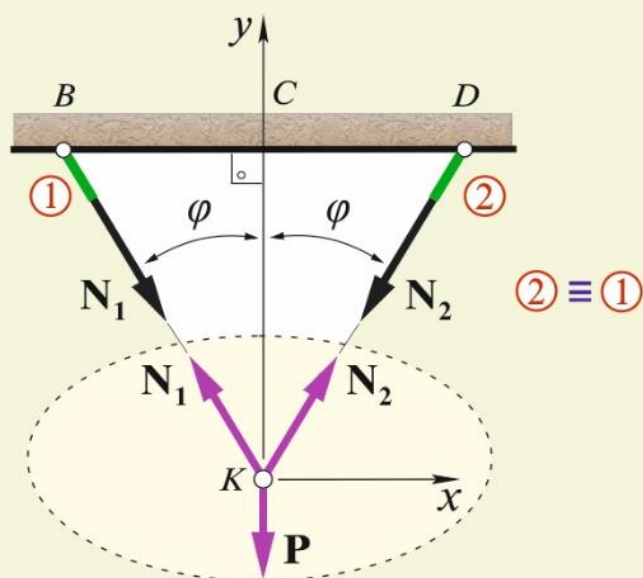
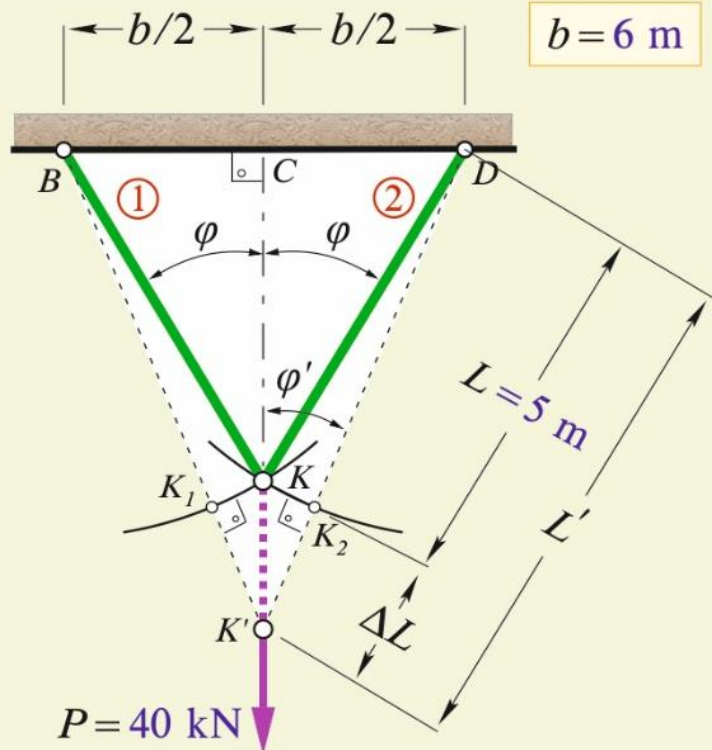
$$\delta = \frac{NL}{EA} = \frac{25 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m}}{210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \cdot 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 0.00149 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \underline{\delta \approx 1.49 \text{ mm}}$$

$$\text{Τελικό μήκος: } L' = L + \delta \quad \Rightarrow \quad \underline{L' = (BK') = 5001.49 \text{ mm}}$$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο  $BCK$ :  $(CK) = 4 \text{ m}$

$$(CK') = \sqrt{L'^2 - (BC)^2} = \sqrt{5001.49^2 - 3000^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{(CK') = 4001.86 \text{ mm}}$$

$$\text{Άρα: } \underline{(KK') = (CK') - (CK) = 1.86 \text{ mm}}$$



### 3<sup>ο</sup> Παράδειγμα

### "Ομοιογενοποίηση σύνθετων ράβδων"

#### A. Ομοιογενοποίηση ράβδων σε σειρά

Στη *σύνθετη*:  $N_1 = N_2 = P$ , στην *ομοιογενή*:  $N = P$

- Συνολική επιμήκυνση  $\delta$  της *σύνθετης*

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A} + \frac{N_2 L_2}{E_2 A} \Rightarrow \delta = \frac{P}{A} \left( \frac{L_1}{E_1} + \frac{L_2}{E_2} \right) \quad (a)$$

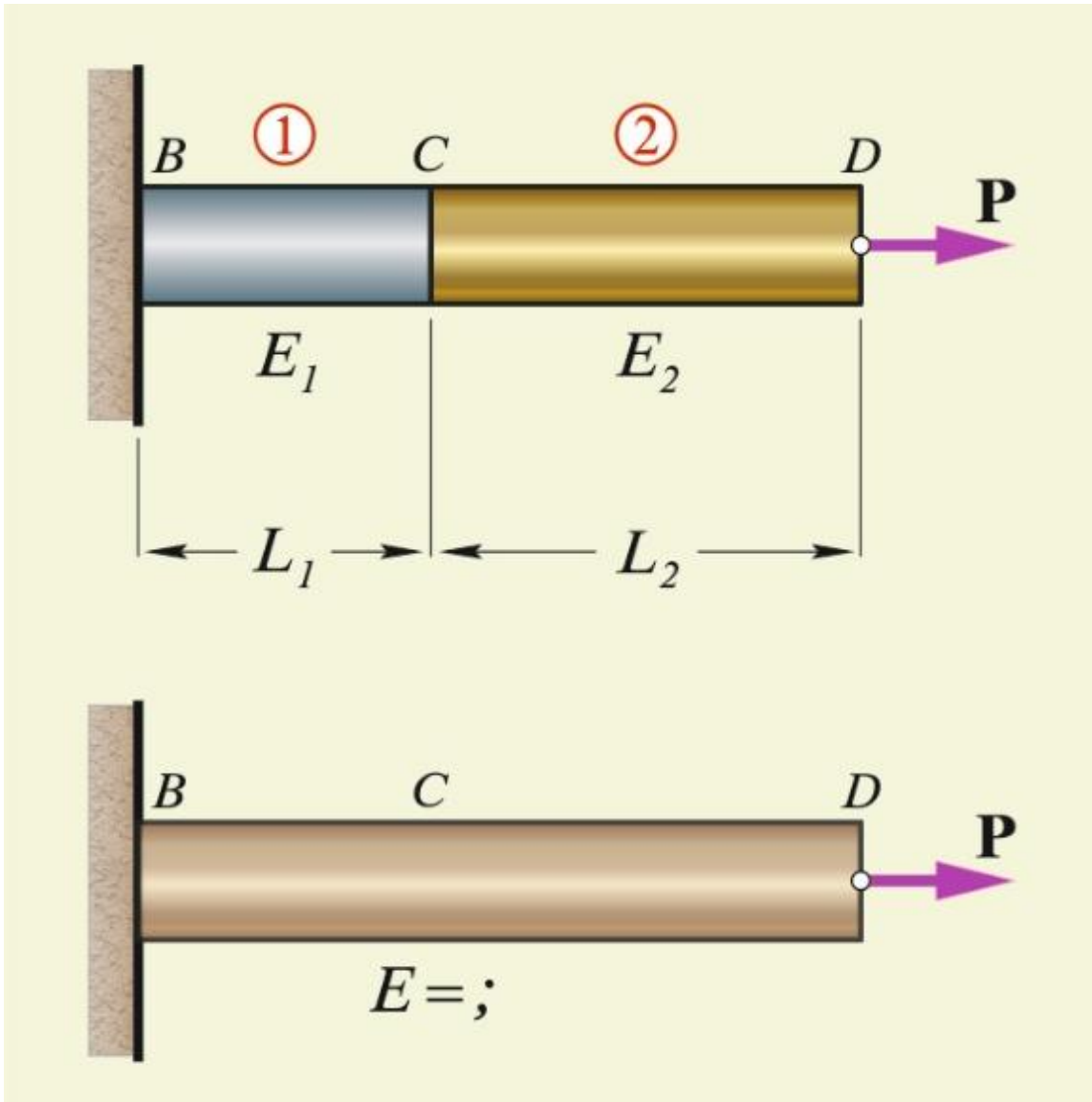
- Επιμήκυνση έστω  $\delta_o$  της (υποθετικής) *ομοιογενούς*

$$\delta_o = \frac{NL}{EA} = \frac{P(L_1 + L_2)}{EA} \quad (b)$$

$$\text{Πρέπει } \delta_o = \delta \Rightarrow \frac{P(L_1 + L_2)}{EA} = \frac{P}{A} \left( \frac{L_1}{E_1} + \frac{L_2}{E_2} \right) \Rightarrow$$

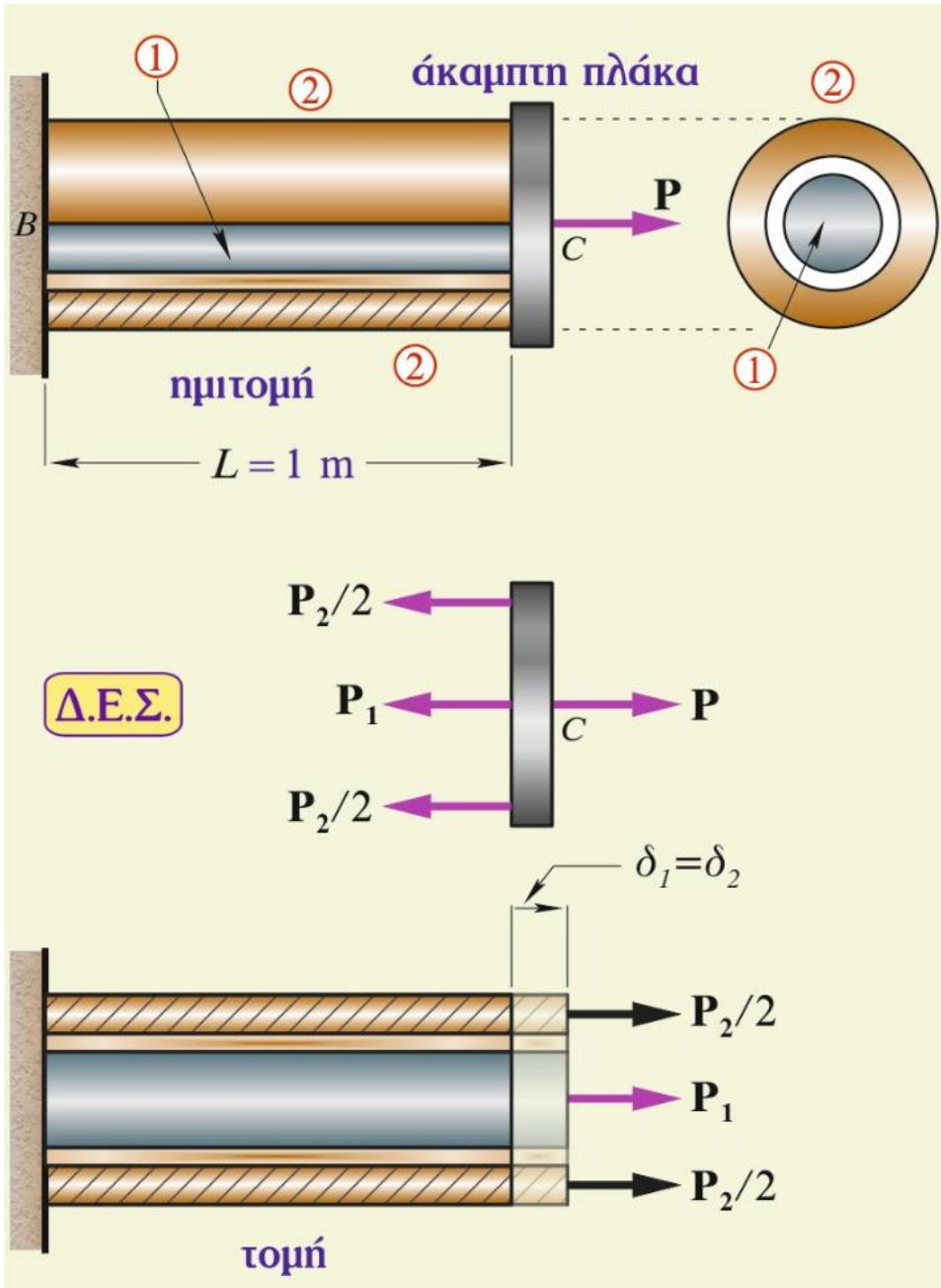
(i): Τύπος του Reuss (ράβδοι σε σειρά):

$$E = \frac{E_1 E_2 (L_1 + L_2)}{E_1 L_1 + E_2 L_2}, \quad A = A_1 = A_2$$



### 3<sup>ο</sup> Παράδειγμα

"Ομοιογενοποίηση σύνθετων ράβδων"



### B. Ομοιογενοποίηση ράβδων παράλληλων

Άκαμπτη πλάκα:  $P_1 + P_2 = P$  (c)

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_o \Rightarrow$$

$$\frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2} = \frac{PL}{E(A_1 + A_2)} \quad (d)$$

(ii): Τύπος του Voght (ράβδοι παράλληλες):

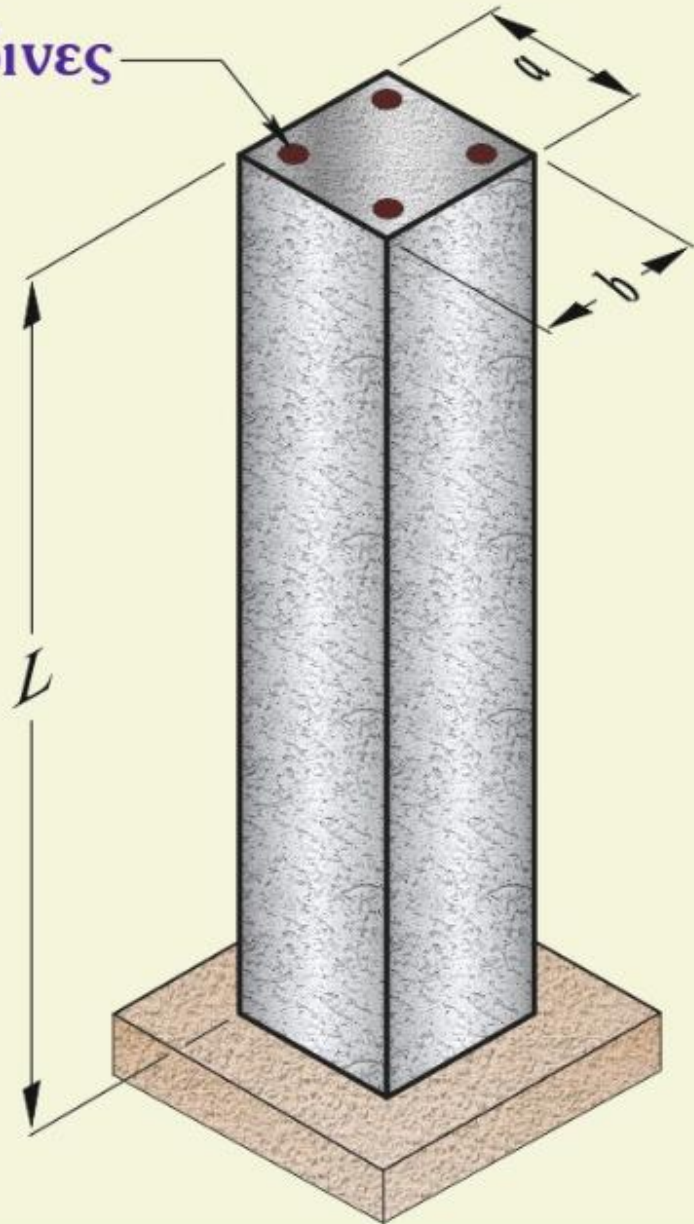
$$E = \frac{A_1}{A} E_1 + \frac{A_2}{A} E_2, \quad \delta = \frac{PL}{E(A_1 + A_2)}$$



### 3<sup>ο</sup> Παράδειγμα

"Ομοιογενοποίηση σύνθετων ράβδων"

χαλύβδινες  
ράβδοι



### Εφαρμογή

Αν ο οπλισμός ② αποτελεί π.χ. το 2% της συνολικής διατομής, με  $E_1 = 20$  GPa,  $E_2 = 210$  GPa, και  $A = 25$  cm  $\times$  25 cm για μήκος π.χ.  $L = 3$  m και **θλιπτικό** φορτίο 800 kN, για το  $E$  της ομοιογενούς και τη **βράχυνση**  $\delta$ , βρίσκουμε:

$$E = \frac{A_1}{A} E_1 + \frac{A_2}{A} E_2 = \frac{2}{100} 210 + \frac{98}{100} 20 \Rightarrow$$

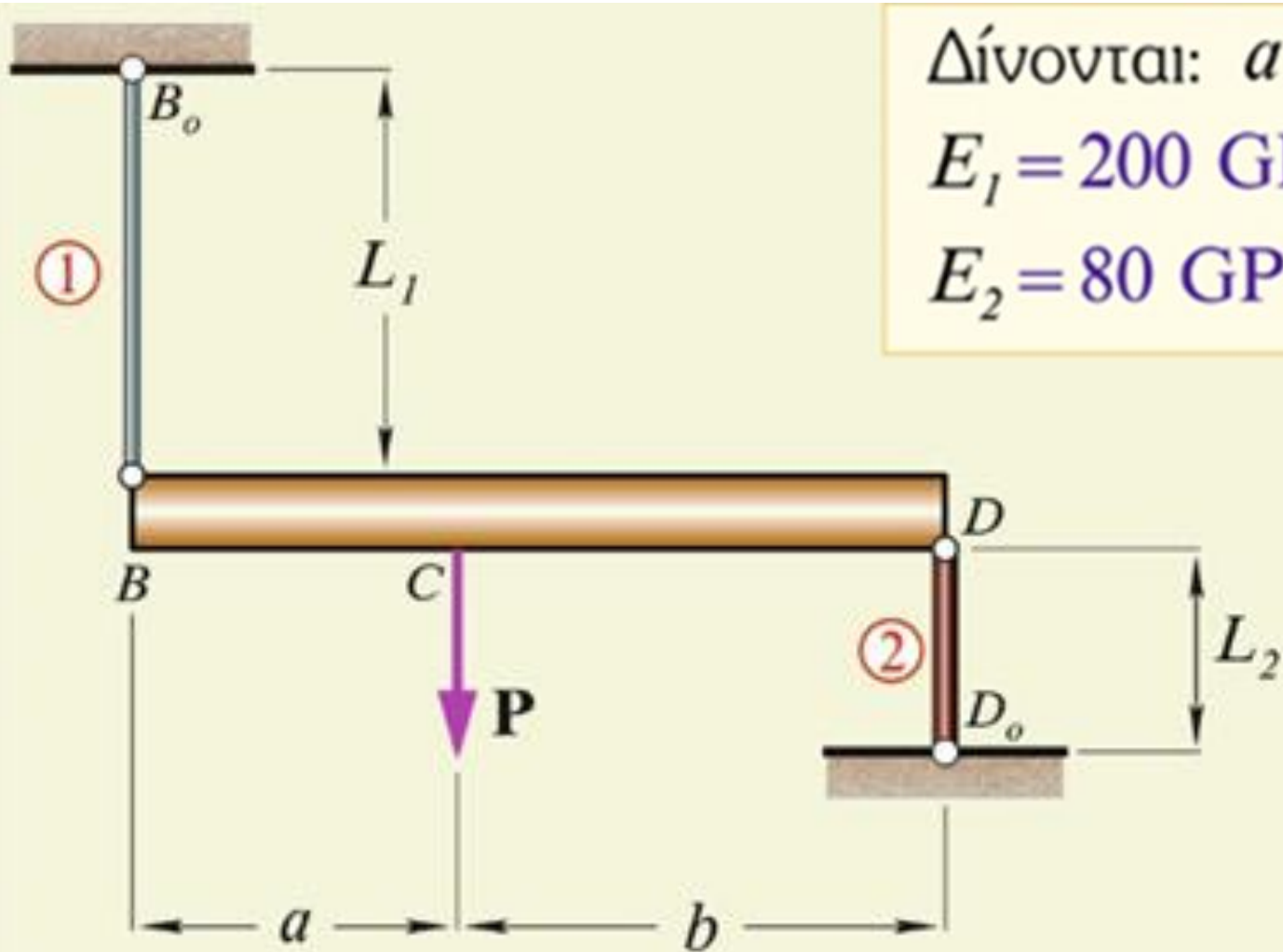
$$\underline{E = 23.8 \text{ GPa}}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA} = \frac{-800 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m}}{23.8 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \cdot 25^2 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \Rightarrow$$

$$\underline{\delta = -1.6 \text{ mm}}$$

## 4<sup>ο</sup> Παράδειγμα "Εμμεση φόρτιση ράβδων δια μέσω άκαμπτης δοκού"

Ζητούνται οι μετατοπίσεις των ράβδων ① και ②, η γωνία στροφής και ο προσδιορισμός του κέντρου στροφής της άκαμπτης δοκού BD αν  $P=90 \text{ kN}$ .



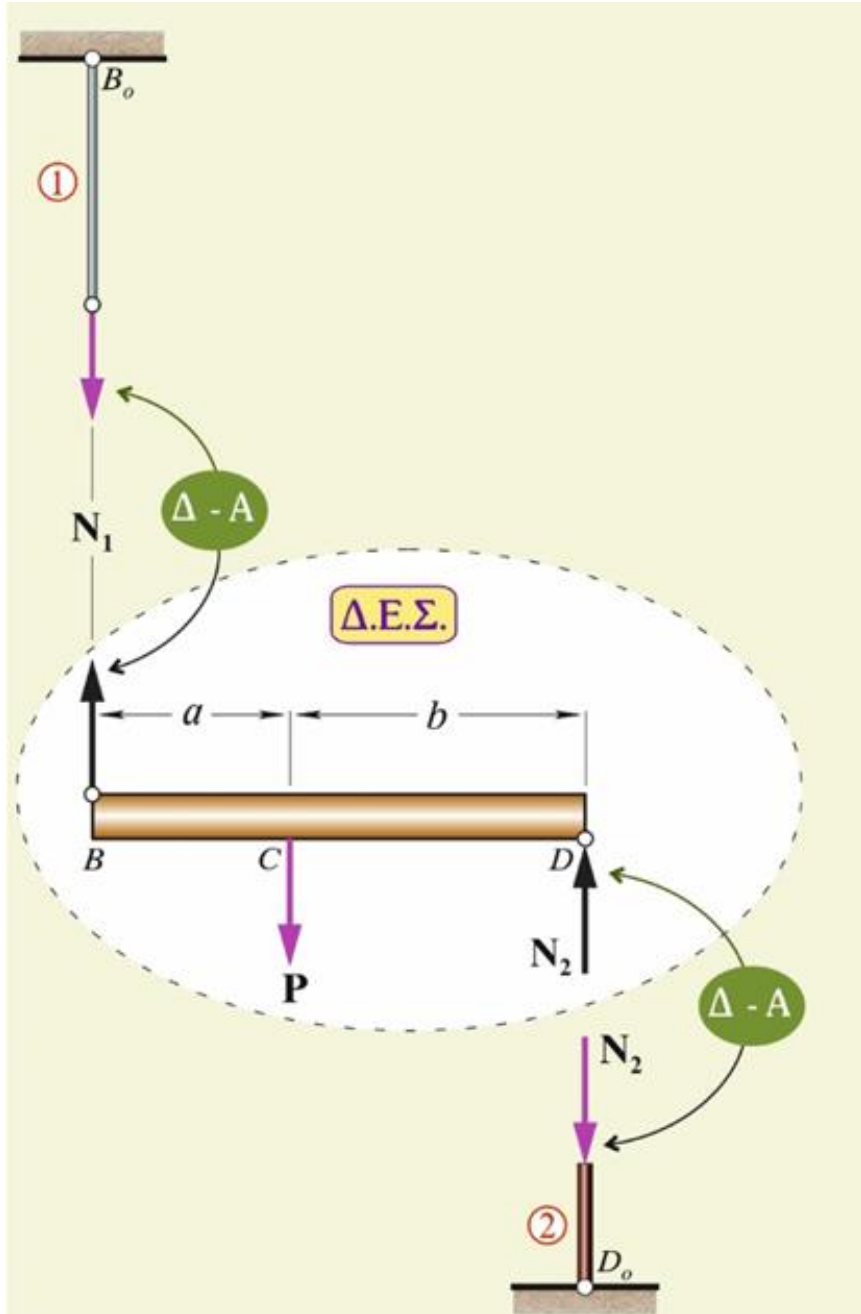
Δίνονται:  $a = 2 \text{ m}$ ,  $b = 3 \text{ m}$

$E_1 = 200 \text{ GPa}$ ,  $L_1 = 2 \text{ m}$ ,  $A_1 = 2 \text{ cm}^2$

$E_2 = 80 \text{ GPa}$ ,  $L_2 = 1 \text{ m}$ ,  $A_2 = 4 \text{ cm}^2$

## 4<sup>ο</sup> Παράδειγμα

"Εμμεση φόρτιση ράβδων δια μέσω άκαμπτης δοκού"



*Εξισώσεις ισορροπίας δοκού BD:*

$$\overset{+}{\curvearrowright} \sum M_D = 0 : -N_1 \cdot (a + b) + P \cdot b = 0 \Rightarrow$$

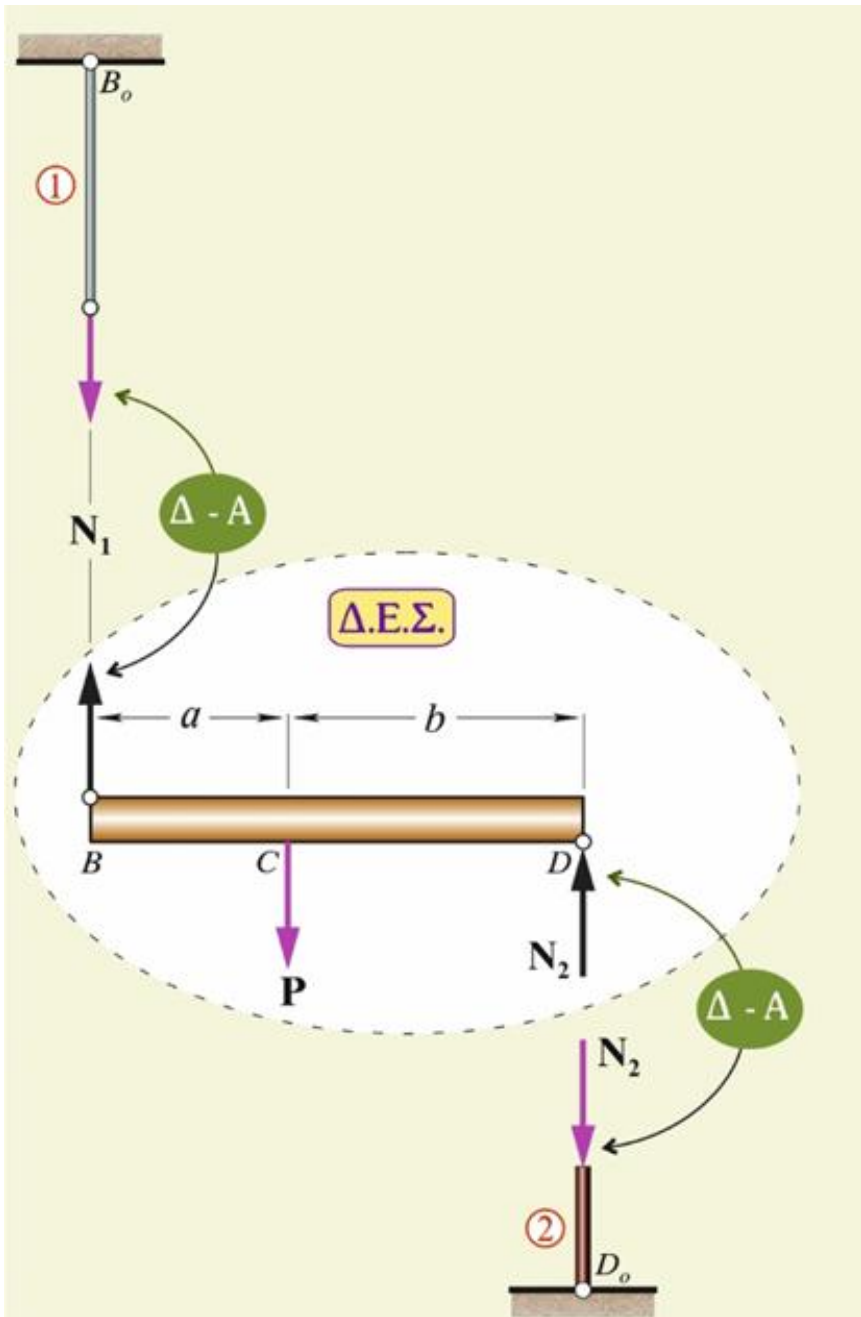
$$\underline{N_1 = 0.6P = 54 \text{ kN}} \quad (1)$$

$$\overset{+}{\curvearrowright} \sum M_B = 0 : -P \cdot a + N_2 \cdot (a + b) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{N_2 = 0.4P = 36 \text{ kN}} \quad (2)$$

# 4<sup>ο</sup> Παράδειγμα

"Εμμeseση φόρτιση ράβδων δια μέσω άκαμπτης δοκού"



Μετατοπίσεις:

$$\delta_1^{\acute{n}} = \Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{0.6P}{E_1 A_1} L_1 = \frac{0.6 \cdot 90 \text{ kN} \cdot 2000 \text{ mm}}{200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \cdot 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \Rightarrow$$

$$\delta_1 = 2.7 \text{ mm}$$

$$\delta_2^{\acute{n}} = \Delta L_2 = \frac{-N_2 L_2}{E_2 A_2} = \frac{-0.4P}{E_2 A_2} L_2 = \frac{-0.4 \cdot 90 \cdot 1000 \text{ mm}}{80 \times 10^6 \cdot 4 \times 10^{-4}} \Rightarrow$$

$$\delta_2 = -1.125 \text{ mm}$$

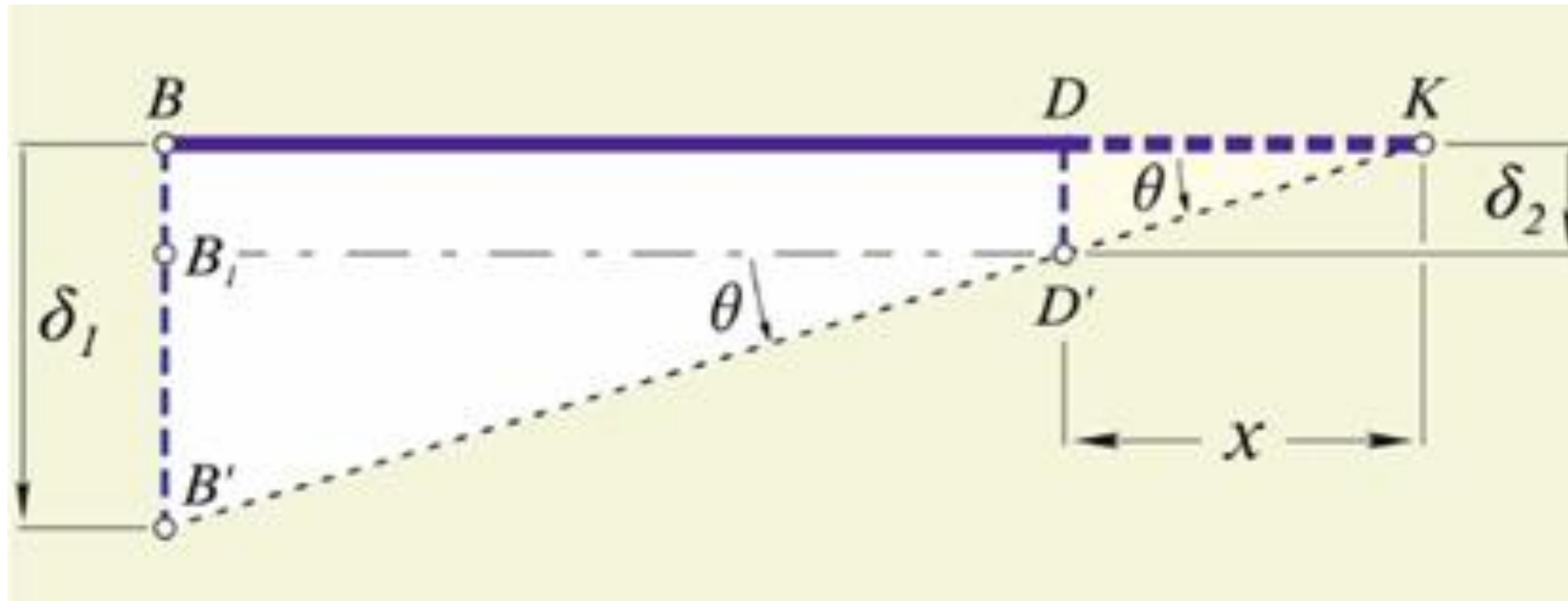
## 4° Παράδειγμα "Έμμεση φόρτιση ράβδων δια μέσω άκαμπτης δοκού"

Προσδιορισμός του κέντρου στροφής  $K$ :

$$\tan \theta = \frac{B_1 B'}{B_1 D'} = \frac{\delta_1 - |\delta_2|}{a + b} = \frac{(2.7 - 1.125) \times 10^{-3} \text{ m}}{(2 + 3) \text{ m}} = 3.15 \times 10^{-4} \Rightarrow \underline{\theta = 0.018^\circ}$$

και:

$$x = \frac{|\delta_2|}{\tan \theta} = \frac{|-1.125 \times 10^{-3} \text{ m}|}{31.5 \times 10^{-4} \text{ m}} \Rightarrow \underline{x = 3.571 \text{ m}}$$

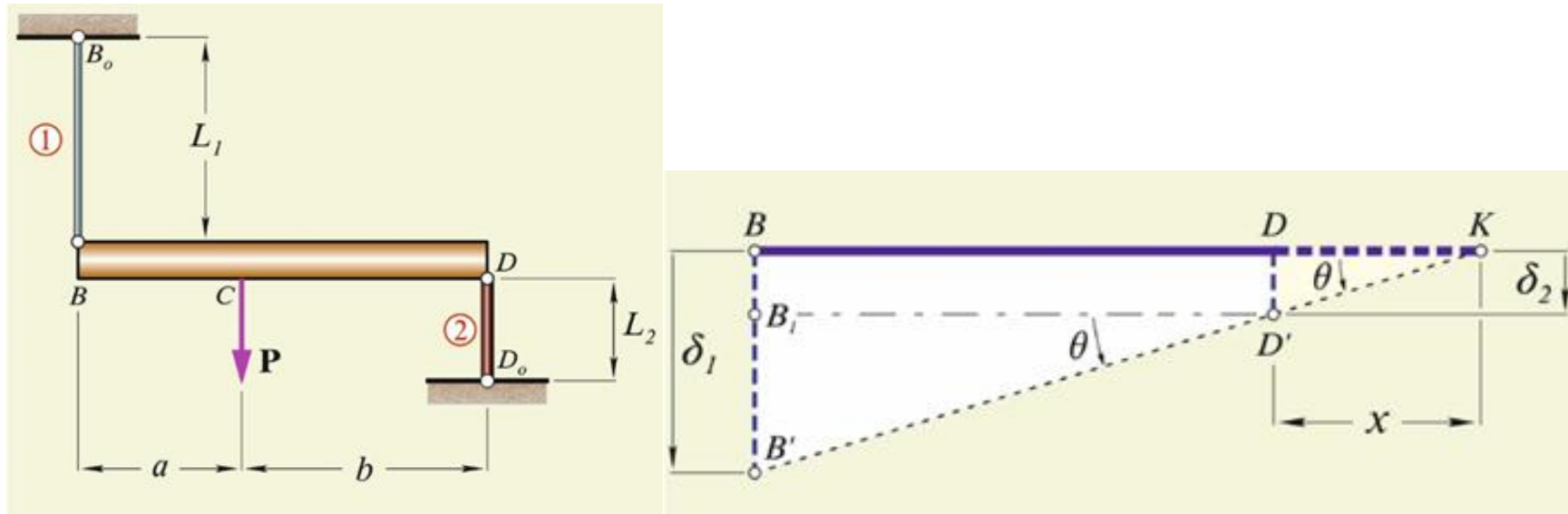


## 4<sup>ο</sup> Παράδειγμα "Εμμεση φόρτιση ράβδων δια μέσω άκαμπτης δοκού"

Πρακτικό συμπέρασμα: Οι μετατοπίσεις των σημείων δοκού, είναι ανάλογες των αποστάσεών τους από το κέντρο στροφής, δηλαδή:

$$\tan \theta = \frac{\delta_1}{(a+b)+x} = \frac{|\delta_2|}{x}$$

Παρατήρηση: Φορτιζόμενη η δοκός στράφηκε ως προς το κέντρο στροφής  $K$  κατά μικρή γωνία  $\theta$ , ή ταυτόσημα, πρώτα εκτέλεσε *παράλληλη μεταφορά* κατά  $\Delta L_2 = DD'$  και στη συνέχεια *στράφηκε* ως προς το  $D'$  κατά γωνία  $\theta$  (ή και ανάποδα, δηλαδή πρώτα στράφηκε και μετά μετατοπίστηκε).



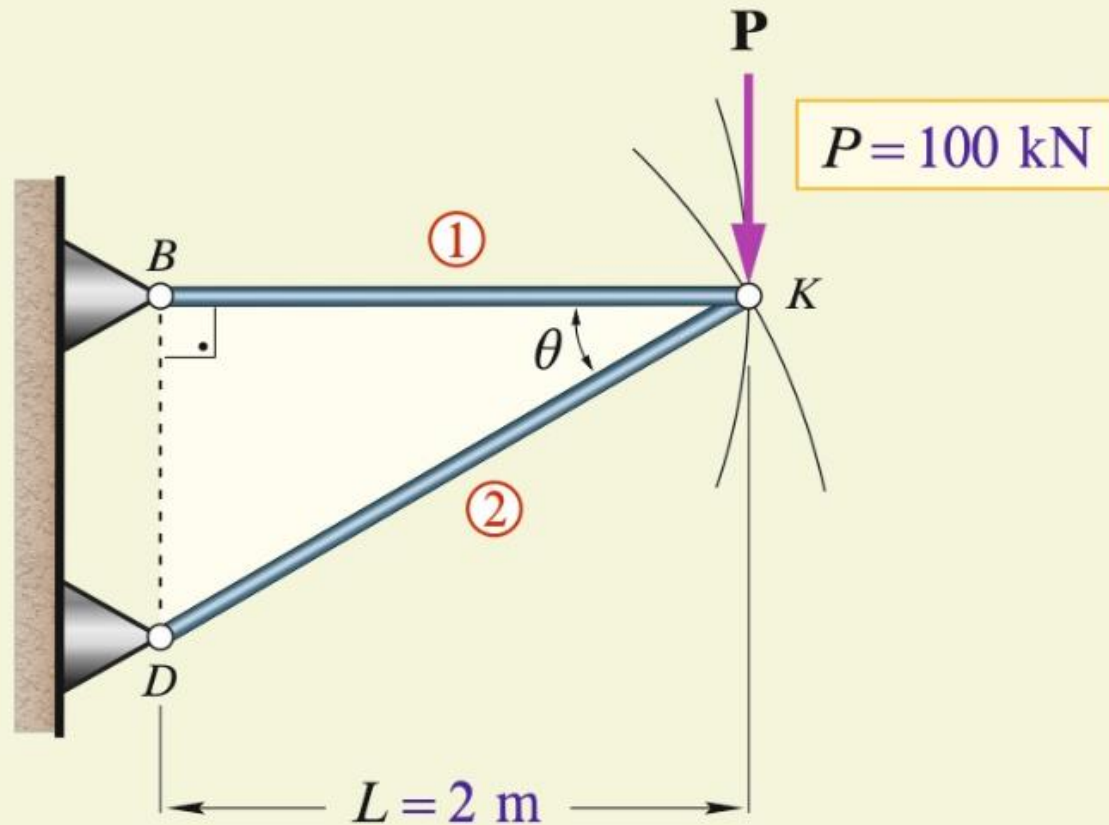
## 5° Παράδειγμα "Έμμεση φόρτιση ράβδων συντρεχουσών σε κόμβο"

Ζητείται η οριζόντια  $u$  και η κατακόρυφη  $v$  μετατόπιση του κόμβου  $K$ .

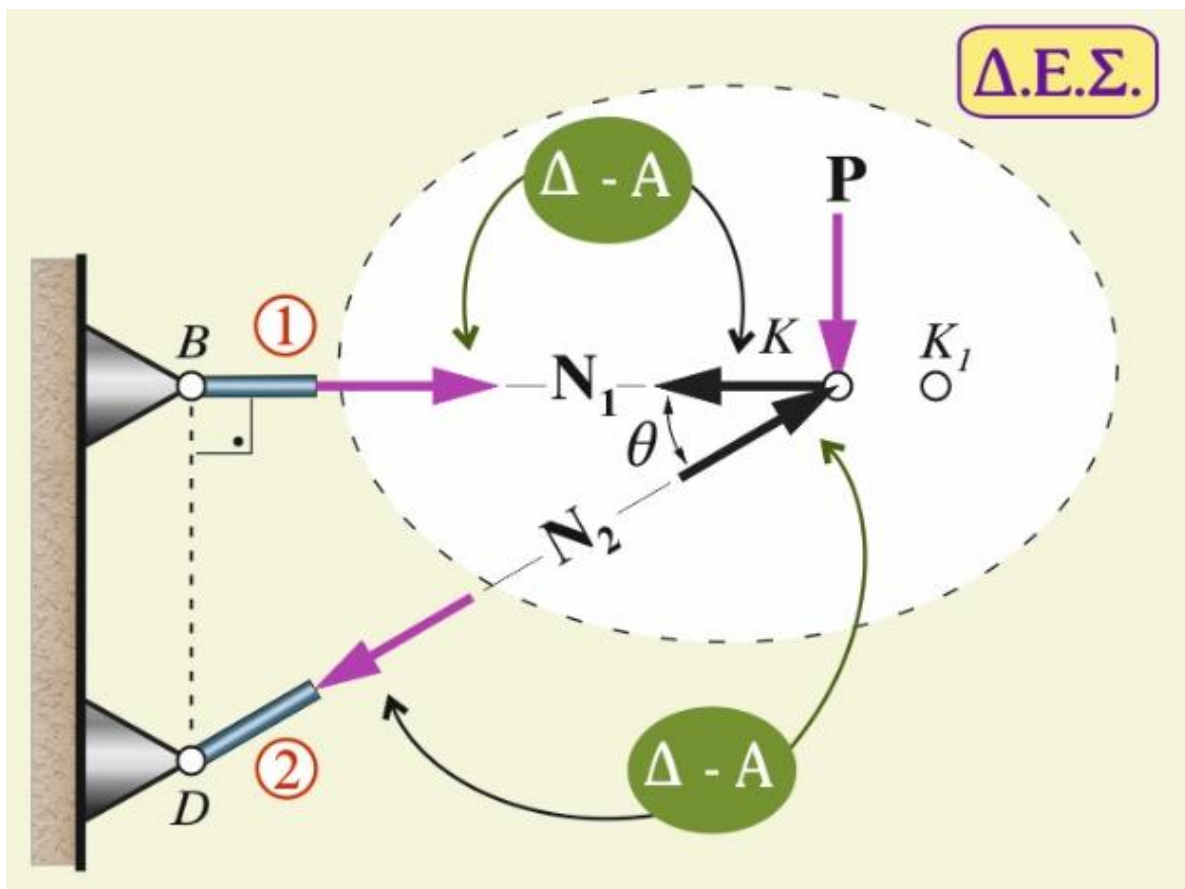
Δίνονται:

$$L_1 = 2 \text{ m}, E_1 = E_2 = 200 \text{ GPa} = 2 \times 10^8 \text{ kPa}$$

$$A_1 = A_2 = 10 \text{ cm}^2 = 10^{-3} \text{ m}^2, \theta = 45^\circ$$



# 5° Παράδειγμα "Έμμεση φόρτιση ράβδων συντηρεχουσών σε κόμβο"



Εξισώσεις ισορροπίας κόμβου Κ:

$$\uparrow \sum F_y = 0 : N_2 \sin \theta - P = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 = P / \sin \theta$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 : -N_1 + N_2 \cos \theta = 0 \quad (1) \Rightarrow$$

$$N_1 = P / \tan \theta$$

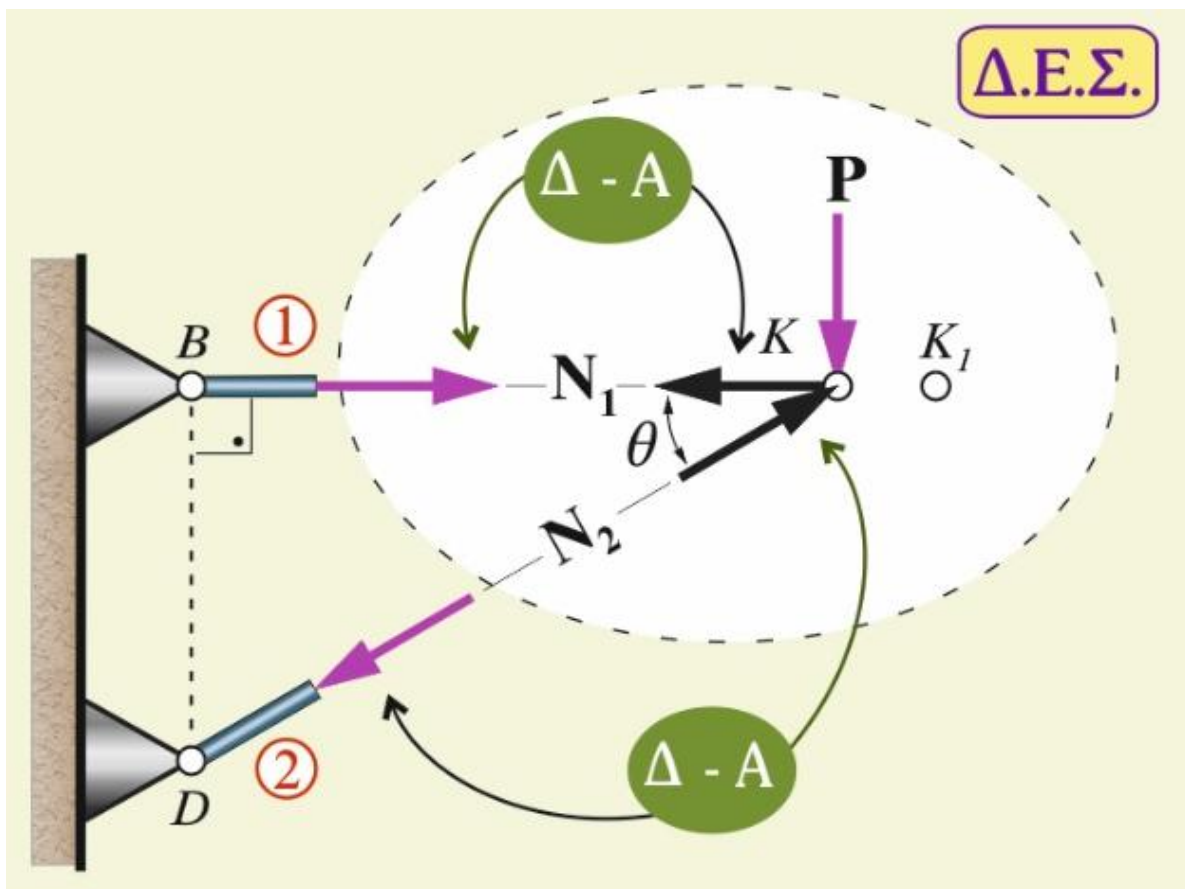
$$\underline{\sigma_1 = N_1 / A_1} \quad \text{ενώ} \quad \underline{\sigma_2 = -N_2 / A_2}$$



## 5° Παράδειγμα "Έμμεση φόρτιση ράβδων συντηρεχουσών σε κόμβο"

$$N_1 = P / \tan \theta$$

$$N_2 = P / \sin \theta$$

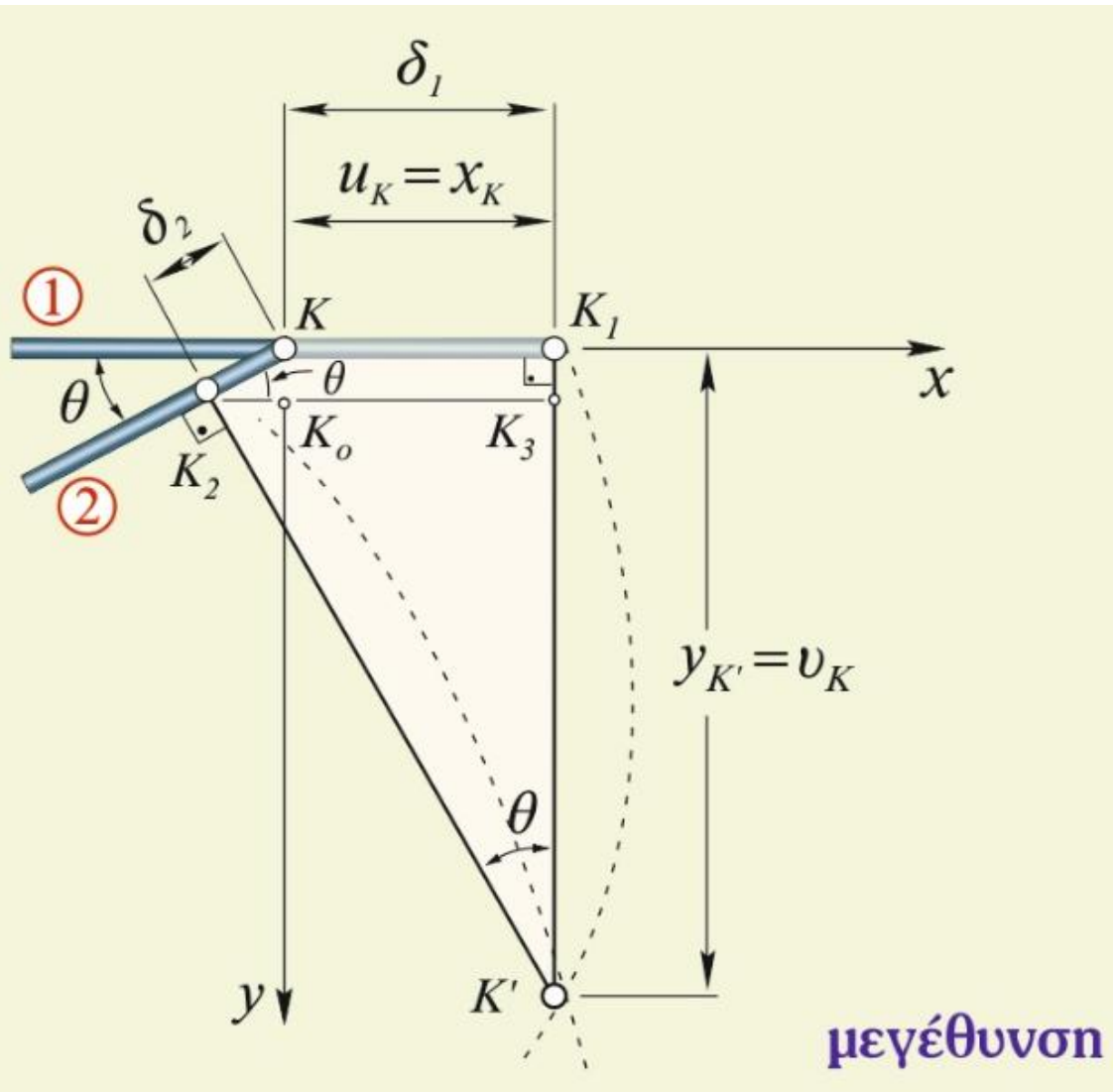


Επιμηκύνσεις ράβδων:

$$\delta_1 = \Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{PL}{E_1 A_1 \tan \theta} \Rightarrow \underline{\delta_1 = 1 \text{ mm}}$$

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{-N_2 L_2}{E_2 A_2} = \frac{-P \cdot L / \cos \theta}{E_2 A_2 \cdot \sin \theta} = \\ &= \frac{-PL / \cos^2 \theta}{E_1 A_1 \cdot \sin \theta / \cos \theta} = \frac{-\delta_1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \underline{\delta_2 = -2 \text{ mm}} \end{aligned}$$

## 5° Παράδειγμα "Έμμεση φόρτιση ράβδων συντηρεχουσών σε κόμβο"



*Μετατόπιση του κόμβου K:*

$$(K_1K') = (K_1K_3) + (K_3K') =$$

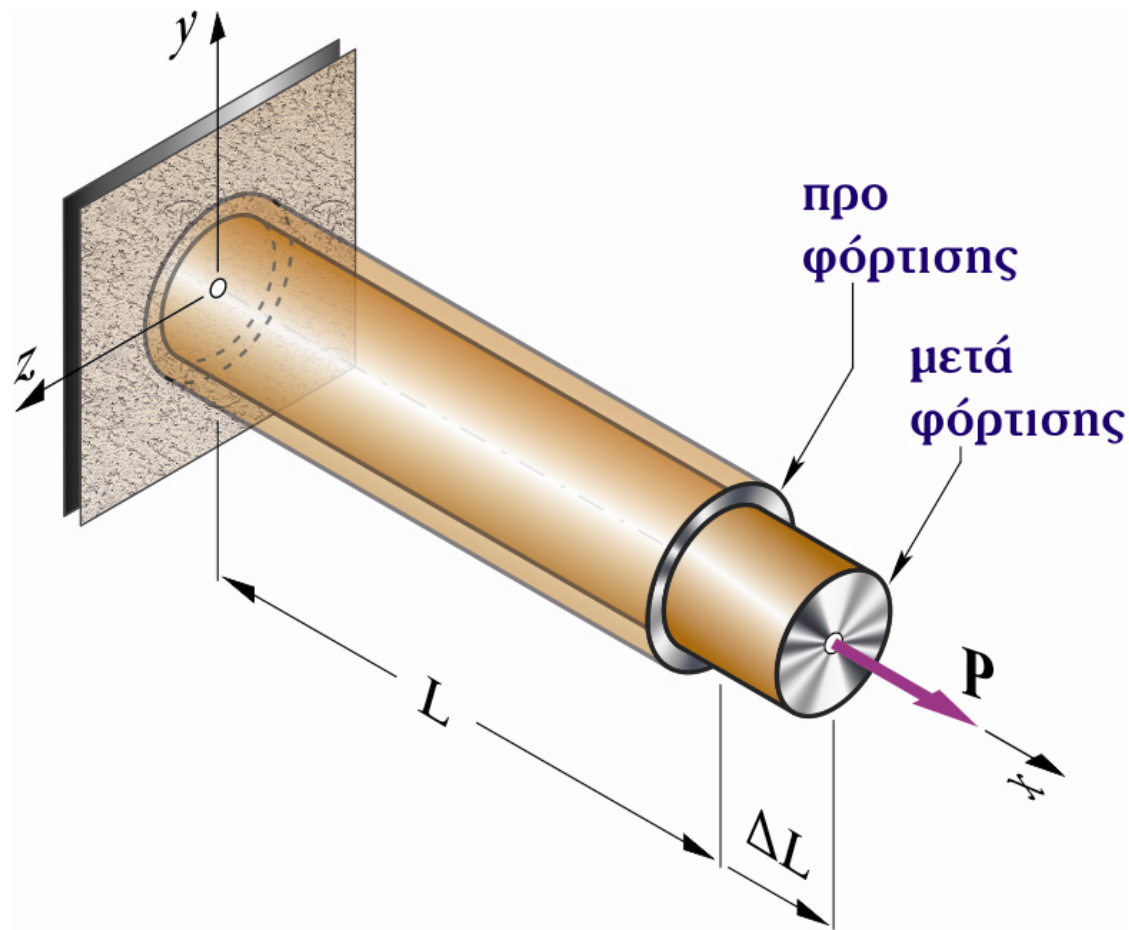
$$= (KK_0) + \frac{(K_3K_2)}{\tan\theta} = (KK_0) + \frac{(K_3K_0) + (K_0K_2)}{\tan\theta} \Rightarrow$$

$$(K_1K') = |\delta_2| \cos\theta + \frac{\delta_1 + |\delta_2| \cos\theta}{\tan\theta} \Rightarrow$$

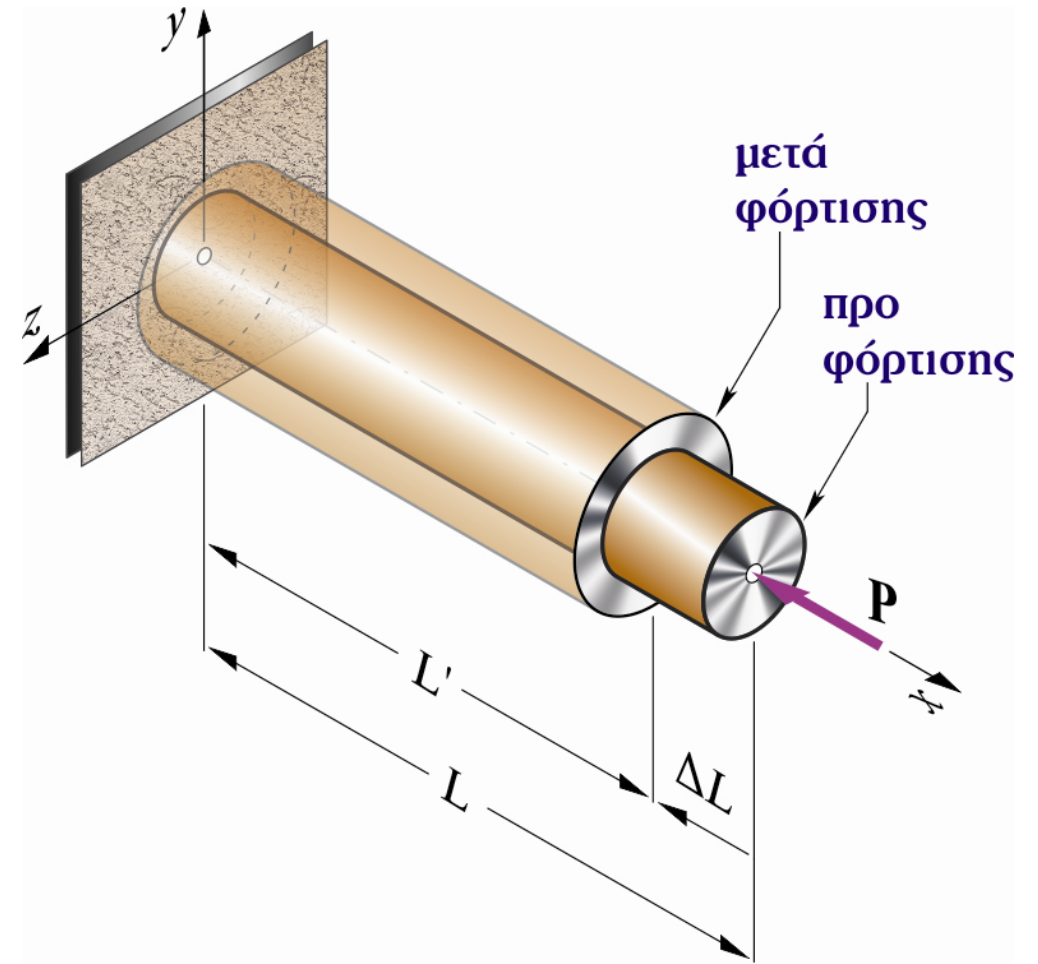
$$(K_1K') = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1 + 2 \cdot \sqrt{2}/2}{1} = 2\sqrt{2} + 1$$

$$\underline{u = x_K = \delta_1 = 1 \text{ mm}} \quad , \quad \underline{v = y_K = (K_1K') = 3.828 \text{ mm}}$$

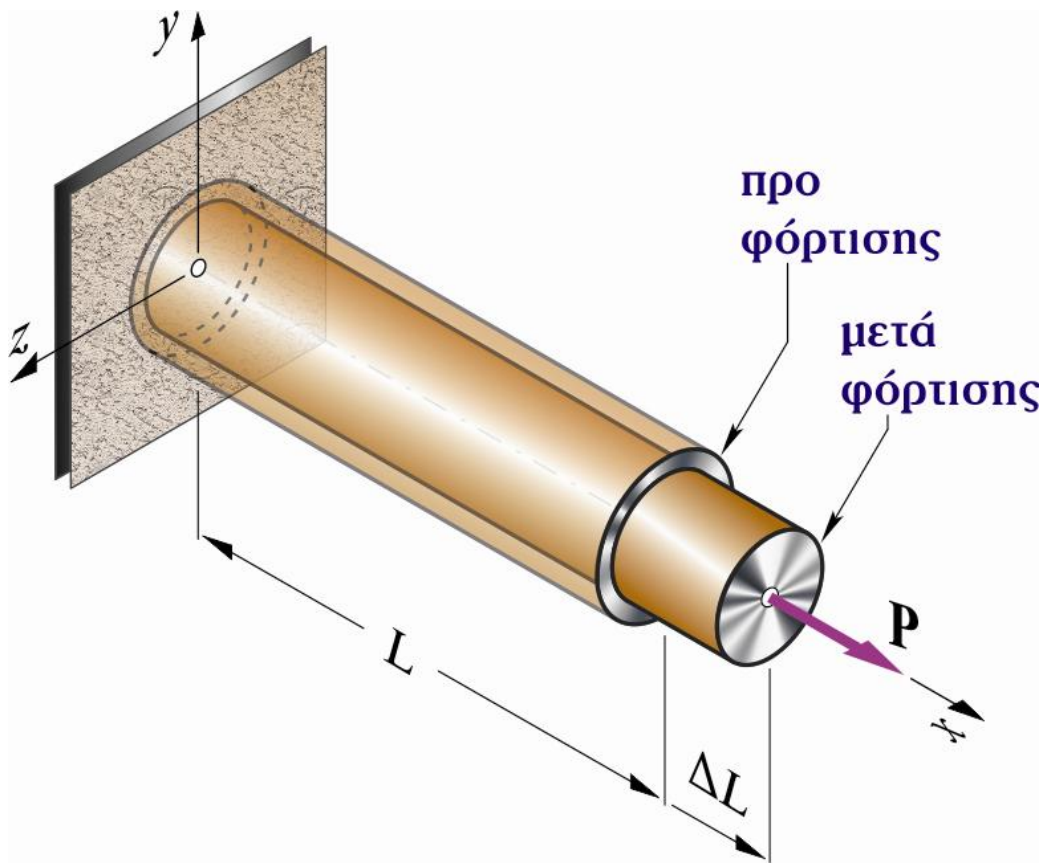
## 2.2- ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ - ΛΟΓΟΣ ΤΟΥ POISSON



*Επιμήκυνση με ταυτόχρονη εγκάρσια βράχυνση*



*Επιβράχυνση με ταυτόχρονη εγκάρσια διαστολή*



*Εγκάρσια Τροπή:*  $\epsilon_y = \frac{\Delta d}{d} = \frac{d' - d}{d}$

*Ισότροπα υλικά:*  $\epsilon_y = \epsilon_z$

*Λόγος του Poisson:*

$$\nu = -\frac{\text{εγκάρσια τροπή}}{\text{αξονική τροπή}} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}, \quad 0 \leq \nu \leq 0.5$$

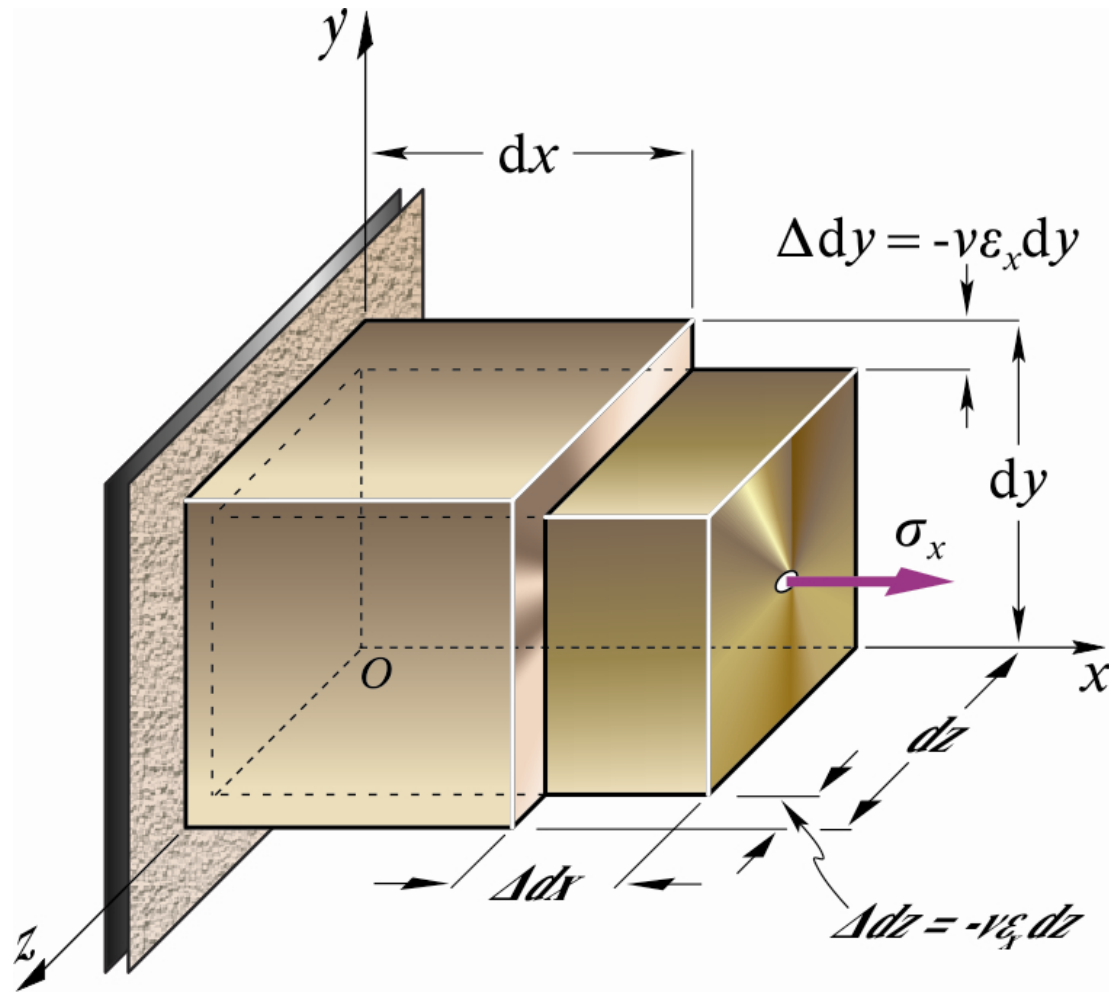
*Τροπές  $\epsilon_y, \epsilon_z$  συναρτήσκει της τάσης  $\sigma_x$ :*

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

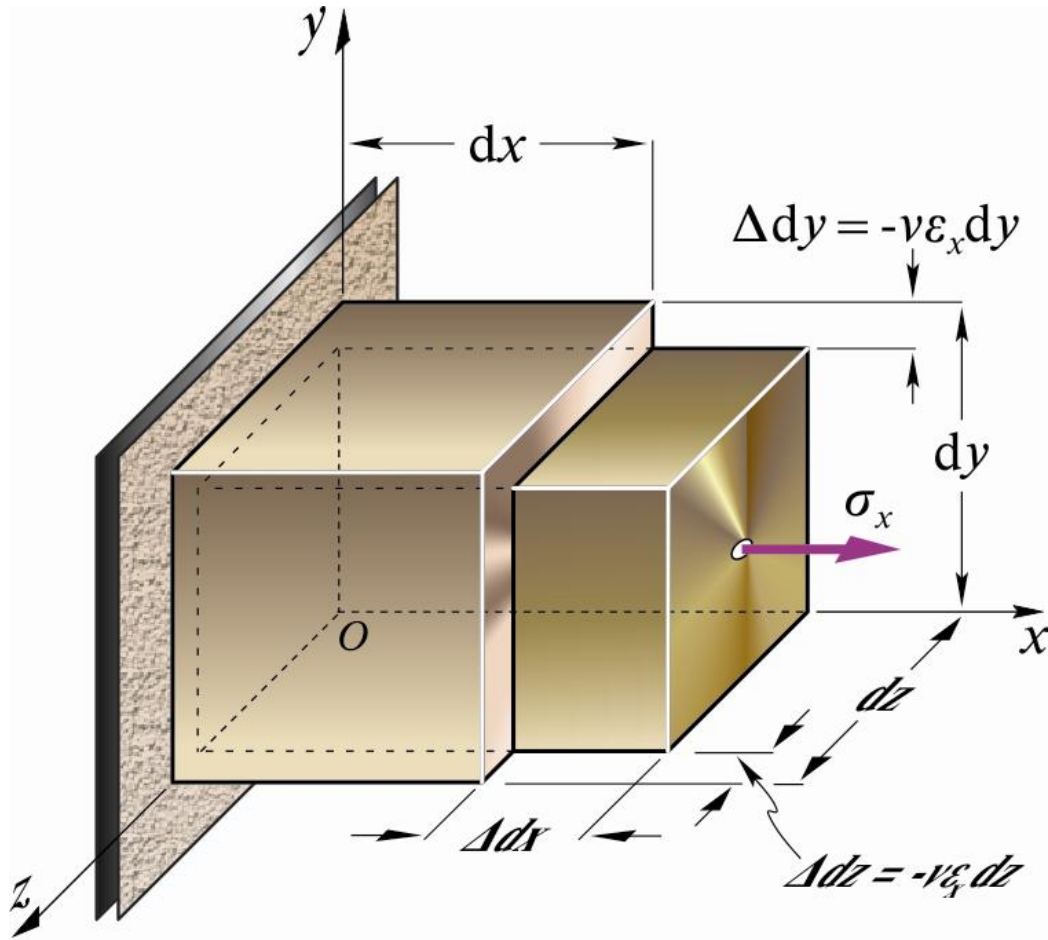
## Πίνακας πρόσημου μεγεθών

Μέγεθος	Εφελκυσμός	Θλίψη
$P$	+	-
$\sigma_x$	+	-
$\Delta L$ ή $\delta$	+	-
$\varepsilon_x$	+	-
$\varepsilon_y$	-	+
$\varepsilon_z = \varepsilon_y$	-	+

## 2.3- ΔΙΟΓΚΩΣΗ ΕΦΕΛΚΥΟΜΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΥ



Μεταβολή όγκου στοιχείου λόγω της  $\sigma_x$



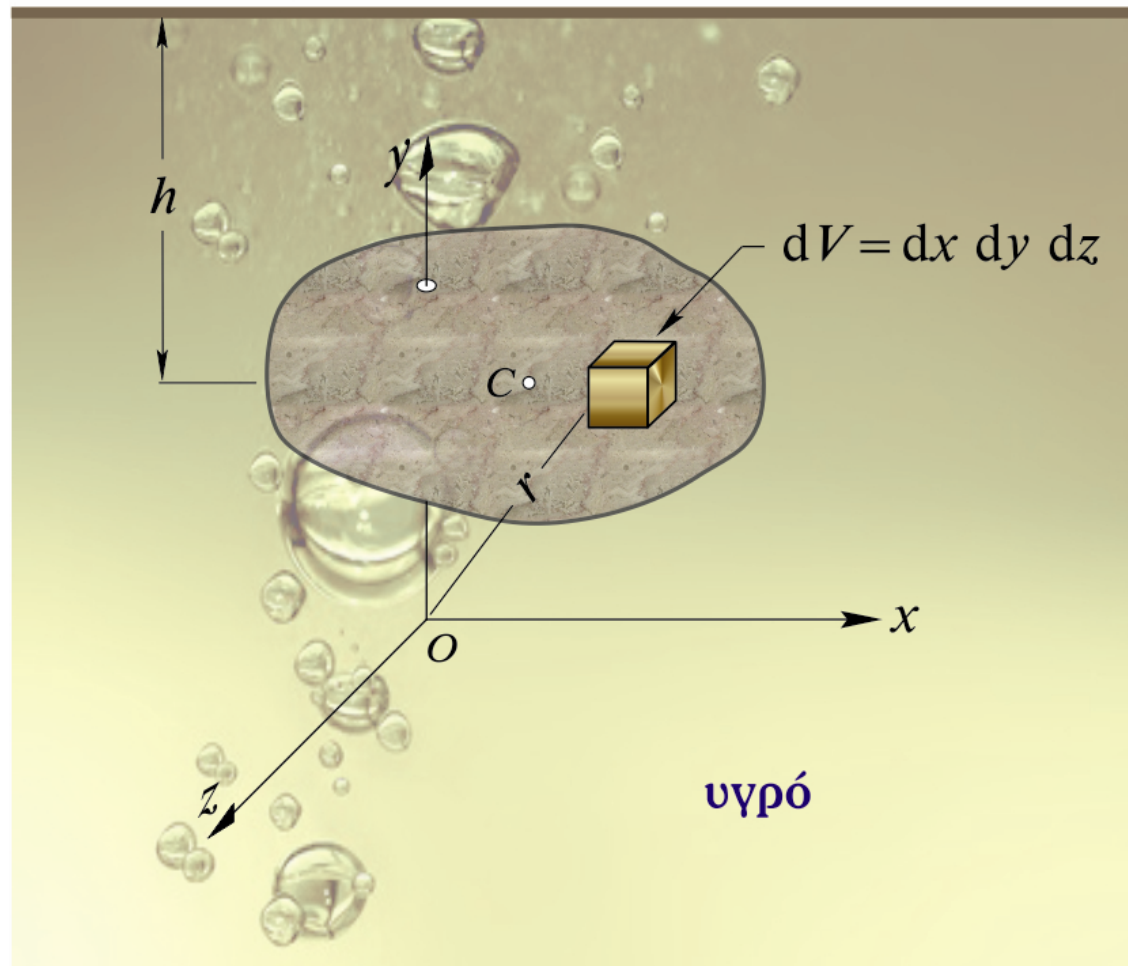
*Ανηγμένη διόγκωση:*

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_x (1 - 2\nu) = \frac{\sigma_x}{E} (1 - 2\nu)$$

*Μέτρο διόγκωσης:*

$$K_p = \frac{\sigma}{e} = -\frac{p}{e} = -\frac{p}{\Delta V/V}, \quad K_p \geq 0, \quad \left[ \sigma \epsilon \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

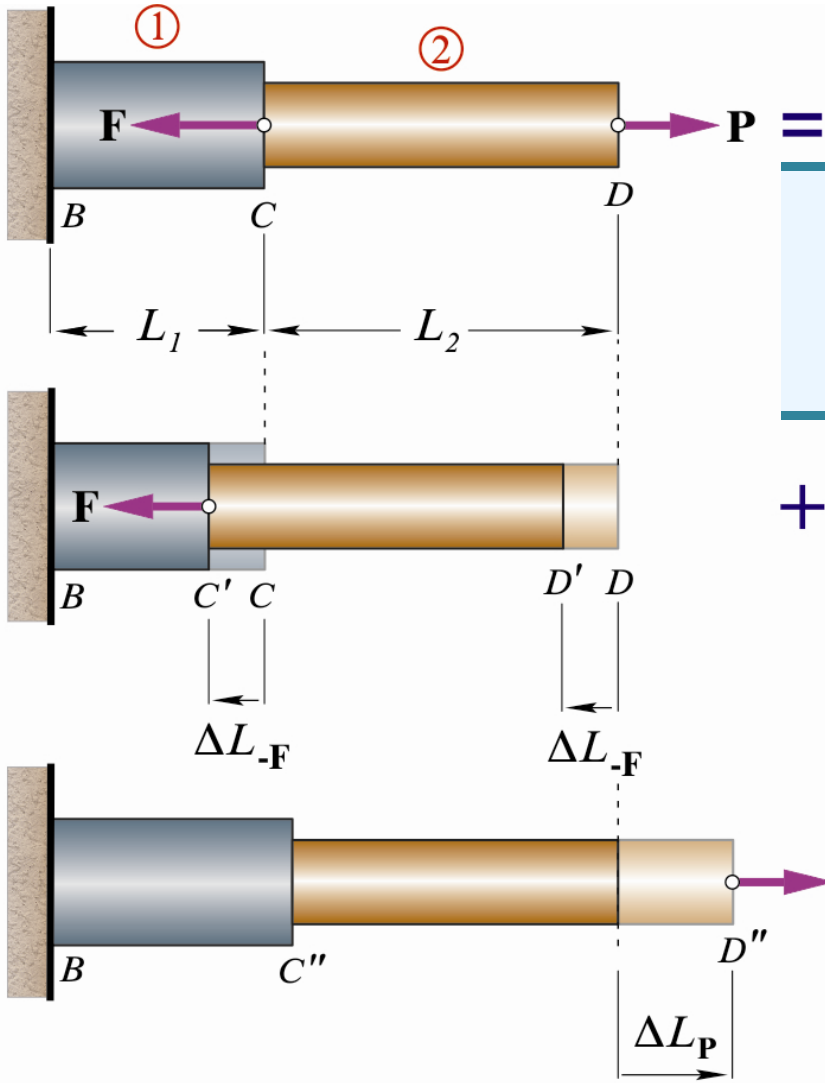
▽ ελεύθερη επιφάνεια ▽



Σώμα όγκου  $V$  βυθισμένο εντός υγρού



## 2.4- ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΡΑΒΔΟΥ



Μέθοδος Δ.Ε.Σ. των επιμέρους χαρακτηριστικών τμημάτων

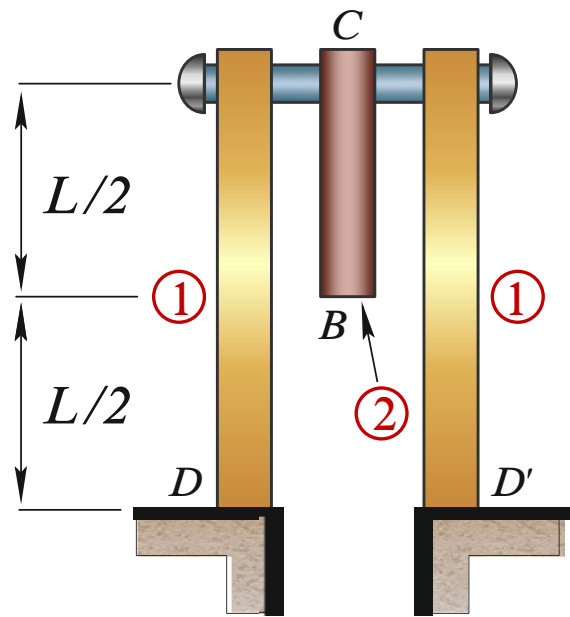
$$\Delta L_{ολ} \overset{\acute{n}}{=} \delta = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} + \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2} + \dots + \frac{N_n L_n}{E_n A_n} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

+

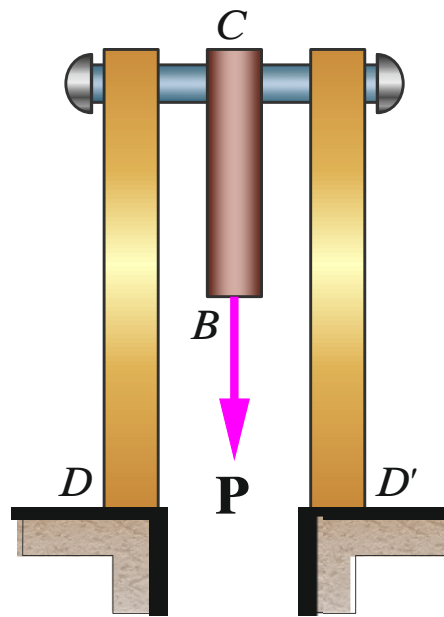
Μέθοδος επαλληλίας για τις επιμέρους ενδιάμεσες δυνάμεις

$$\Delta L_{ολ} \overset{\acute{n}}{=} \delta = \sum_{i=1}^k \Delta L_{P_i} + \sum_{j=k+1}^n \Delta L_{-P_j} = \sum_{i=1}^k \frac{P_i L_i}{E_i A_i} + \sum_{j=k+1}^n \frac{(-P_j) L_j}{E_j A_j}$$

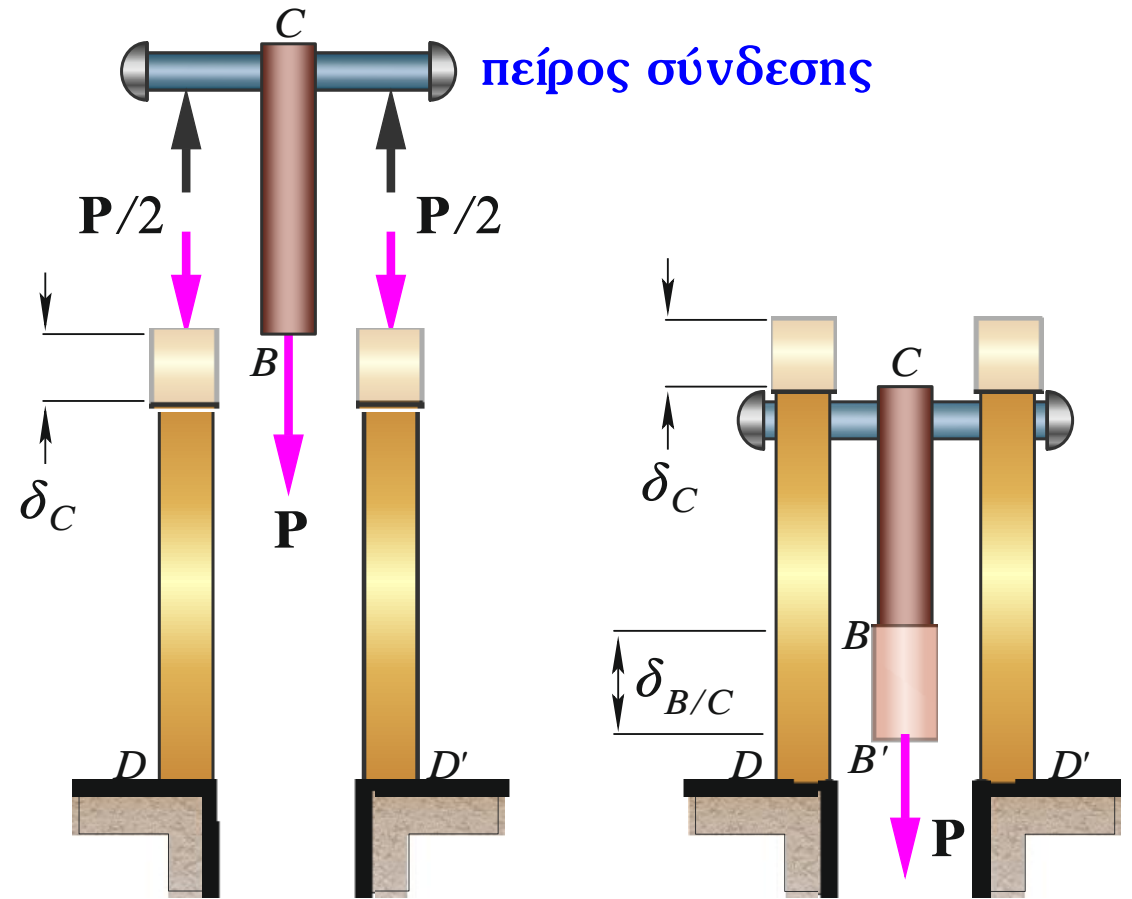
Αρχή της επαλληλίας για τις P και F



αφόρτιστο



φορτισμένο



# 6° Παράδειγμα

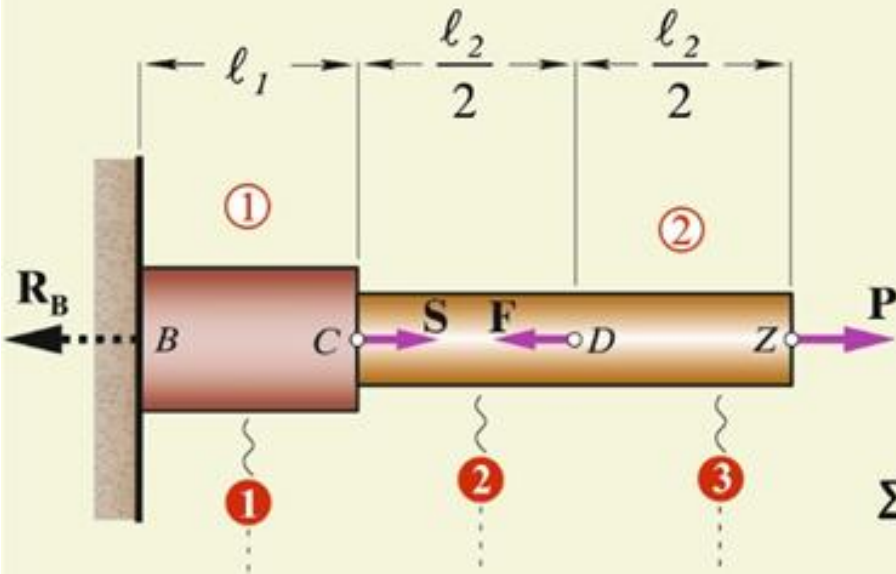
"Μετατοπίσεις σε σύνθετη ράβδο"

Στο (Σχ. α) ζητείται η μετατόπιση του Z.

Δίνονται:

$$S = 5P, F = 4P, \ell_1 = \ell, \ell_2 = 2\ell$$

$$E_1 = E, E_2 = 2E, A_1 = A, A_2 = A/4$$



1ος τρόπος: "Μέθοδος επαλληλίας"

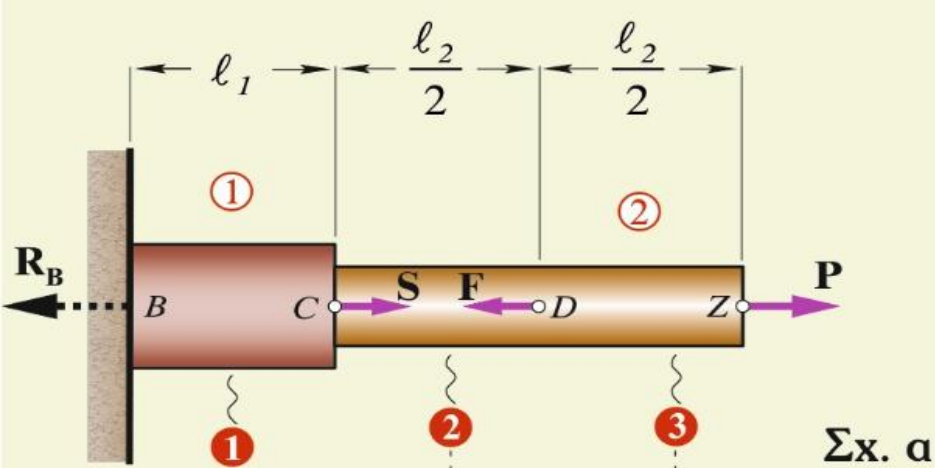
$$\Delta L_{ολ} = \delta_Z - \delta_B = \Delta L_S + \Delta L_{-F} + \Delta L_P, \quad \delta_B = 0$$

$$\Delta L_{ολ} = \delta_Z - 0 = \frac{S\ell_1}{E_1 A_1} + \left[ \frac{-F\ell_1}{E_1 A_1} + \frac{-F\ell_2/2}{E_2 A_2} \right] + \left[ \frac{P\ell_1}{E_1 A_1} + \frac{P\ell_2}{E_2 A_2} \right] =$$

$$= \frac{5P\ell}{EA} + \left[ \frac{-4P\ell}{EA} + \frac{-4P\ell}{2E \cdot A/4} \right] + \left[ \frac{P\ell}{EA} + \frac{P \cdot 2\ell}{2E \cdot A/4} \right] \Rightarrow \delta_Z = -\frac{2P\ell}{EA}$$

Σχ. α – Το "-" σημαίνει ότι το Z θα μετατοπιστεί προς τα αριστερά.

## 6<sup>ο</sup> Παράδειγμα



2ος τρόπος: "Μέθοδος τομών" (Σχ. β)

*Τμήμα BC:* Τομή ❶ , δεξιό τμήμα ❶Z:

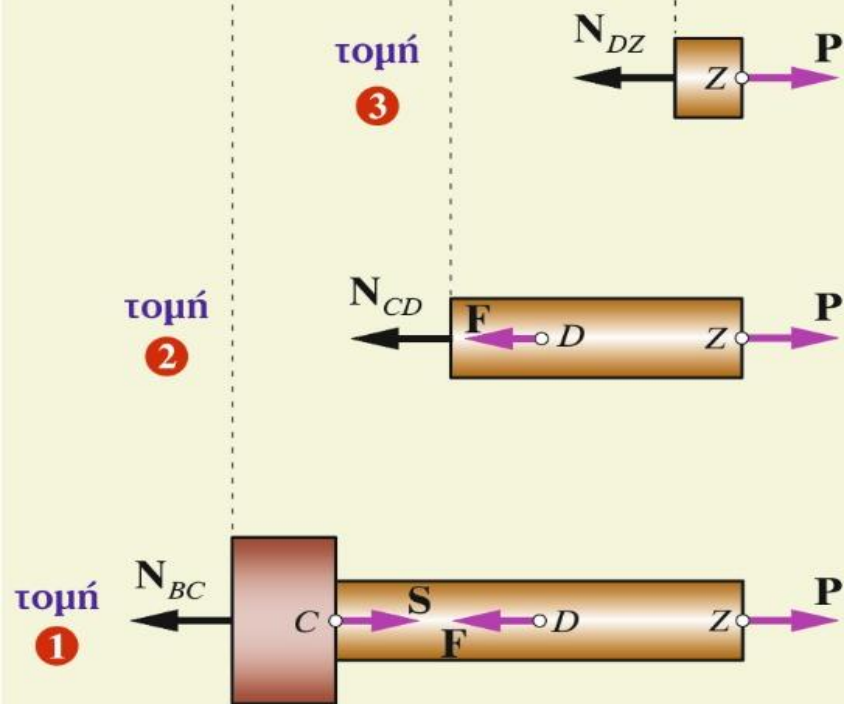
$$N_{BC} = S - F + P \Rightarrow N_{BC} = 2P$$

*Τμήμα CD:* Τομή ❷ , δεξιό τμήμα ❷Z:

$$N_{CD} = -F + P \Rightarrow N_{CD} = -3P$$

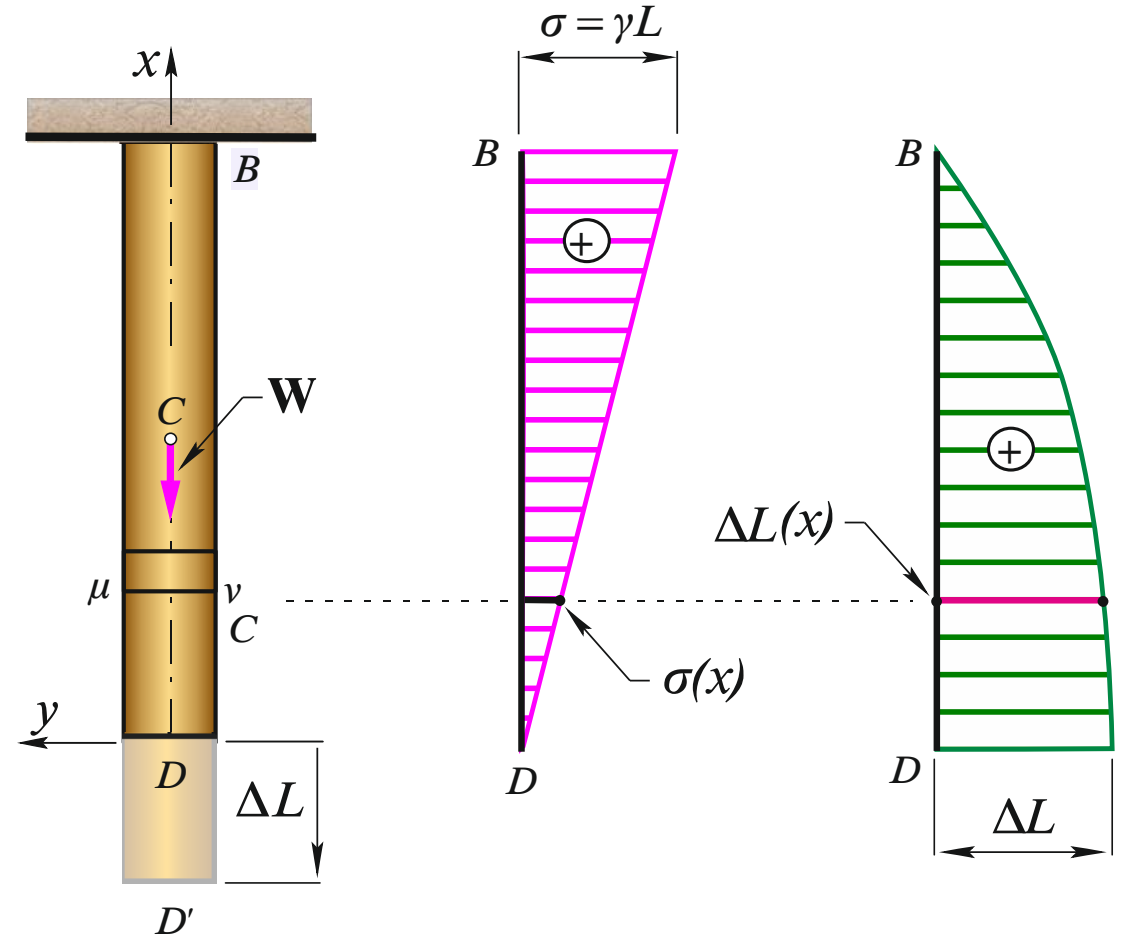
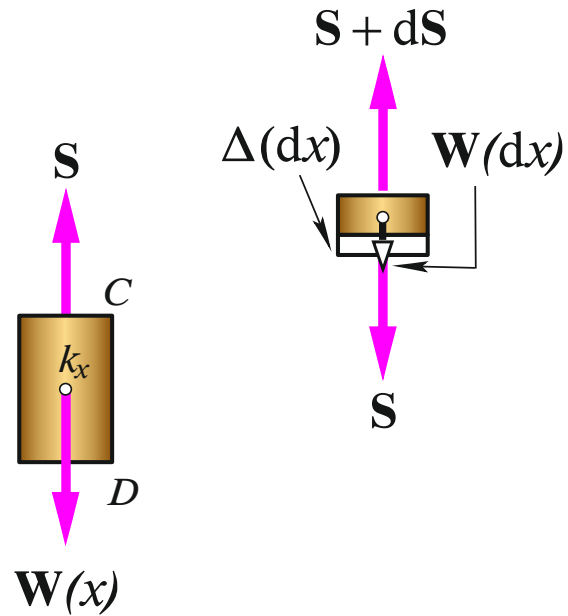
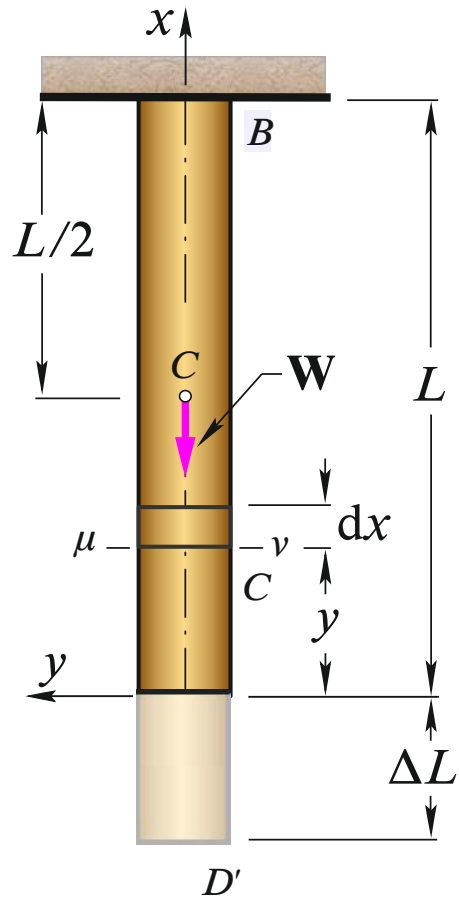
*Τμήμα DZ:* Τομή ❸ , δεξιό τμήμα ❸Z:

$$N_{DZ} = +P \Rightarrow N_{DZ} = P$$



$$\Delta L_{ολ} = \delta_Z = \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} + \Delta L_{DZ} \Rightarrow \delta_Z = -\frac{2P\ell}{EA}$$

## 2.5- ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΛΟΓΩ ΙΔΙΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

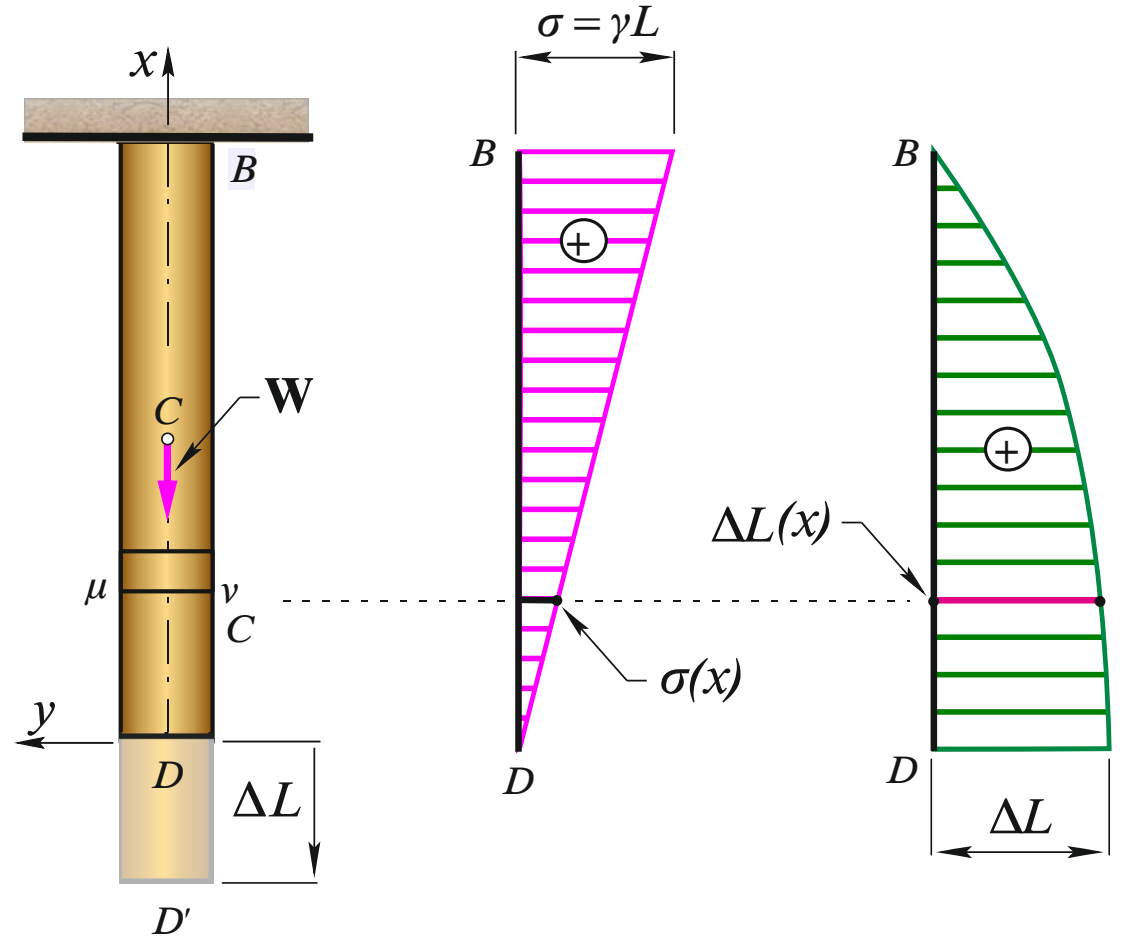


## 2.5- ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΛΟΓΩ ΙΔΙΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

Ορθή τάση λόγω ιδίου βάρους  
πρισματικής ράβδου

$$\sigma(x) = \gamma x$$

$$\underline{\sigma_{max} = \sigma(L) = \sigma_B = \gamma L}$$



## 2.5- ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΛΟΓΩ ΙΔΙΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

### Τεχνολογικά συμπεράσματα

- Δύο ράβδοι ίδιου υλικού, η μία διατομής  $A$  και η άλλη πολύ μεγαλύτερης, ο κίνδυνος αστοχίας (λόγο μόνον του βάρους τους) είναι ο ίδιος.
- Λόγω ίδιου βάρους πρισματικής ράβδου, η αναπτυσσόμενη αξονική δύναμη  $N(x) = W(x) = \gamma A(x)$  δεν είναι σταθερή αλλά γραμμική.
- Η κατανομή της τάσης είναι τότε **γραμμική**, ενώ της μετατόπισης **παραβολική**.

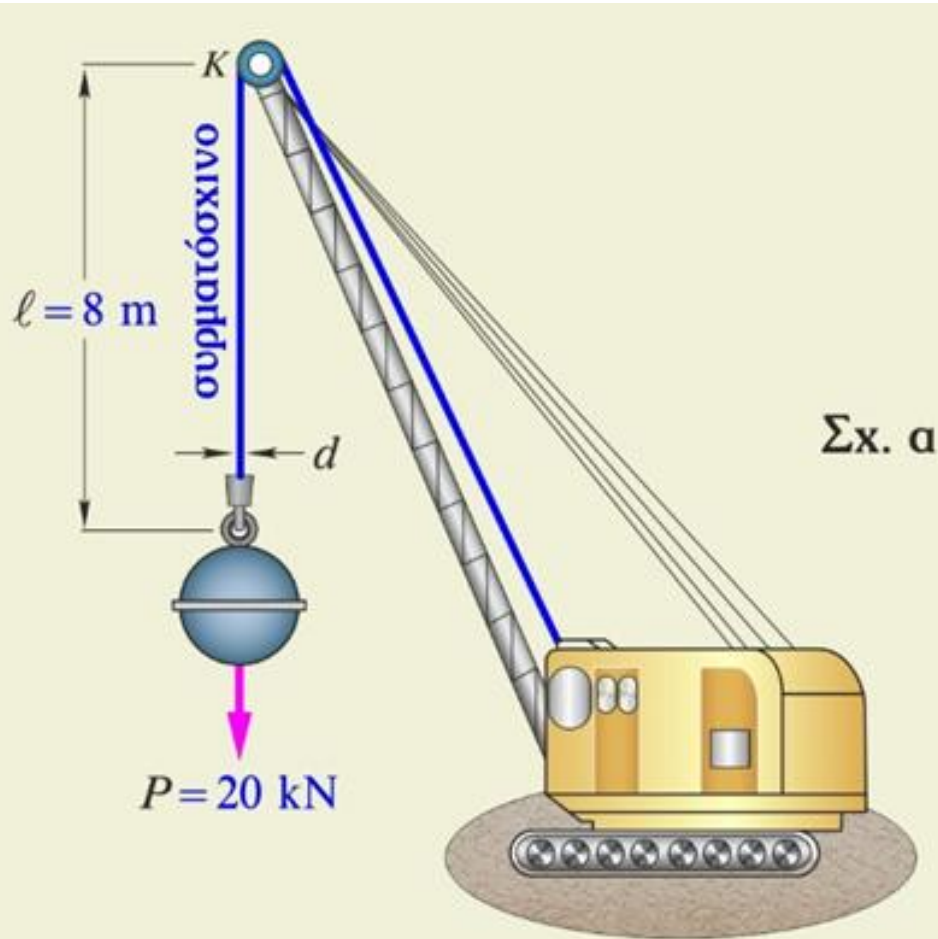
*Επιμήκυνση λόγω ιδίου βάρους πρισματικής:*

$$\Delta L_w = \frac{WL}{2EA} = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

## 7<sup>ο</sup> Παράδειγμα

Χαλύβδινο συρματόσχοινο μήκους  $\ell = 8 \text{ m}$  και διάμετρου  $d = 20 \text{ mm}$ , χρησιμοποιείται για την ανύψωση βάρους  $P = 20 \text{ kN}$  από γερανό (Σχ. α).

Ζητείται η επιμήκυνση και η μέγιστη τάση του, αν:  $\gamma = 7.8 \times 10^4 \text{ N/m}^3$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$



$$\Delta \ell = \Delta \ell_{\text{P}} + \Delta \ell_{\text{W}}$$

$$\Delta \ell_{\text{P}} = \frac{P\ell}{EA} = \frac{P\ell}{E\pi d^2/4} \Rightarrow \Delta \ell_{\text{P}} \approx 2.4 \text{ mm}$$

$$\Delta \ell_{\text{W}} = \frac{\gamma \ell^2}{2E} \Rightarrow \Delta \ell_{\text{W}} = 0.012 \text{ mm}$$

$$\Delta \ell = \Delta \ell_{\text{P}} + \Delta \ell_{\text{W}} \Rightarrow$$

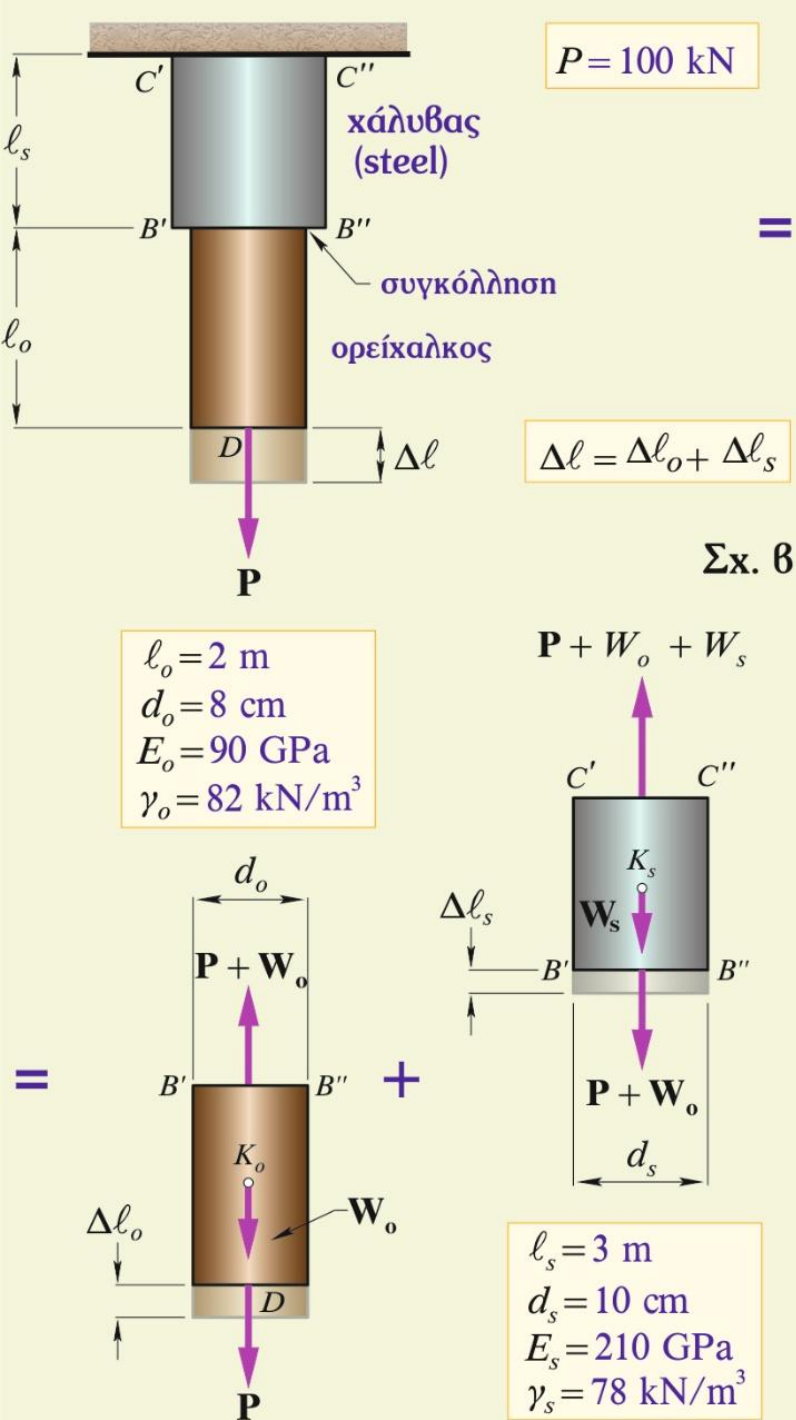
$$\Delta \ell = 2.412 \text{ mm} = 2412 \mu\text{m}$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{P+W}{A} = \frac{P}{A} + \gamma \ell \Rightarrow \sigma_{\text{max}} = 64.3 \text{ MPa}$$



## 8° Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η μετατόπιση του σημείου D (Σχ. β).  
 Δίνονται  $W_o = 823.94 \text{ N}$ ,  $W_s = 1838 \text{ N}$ .

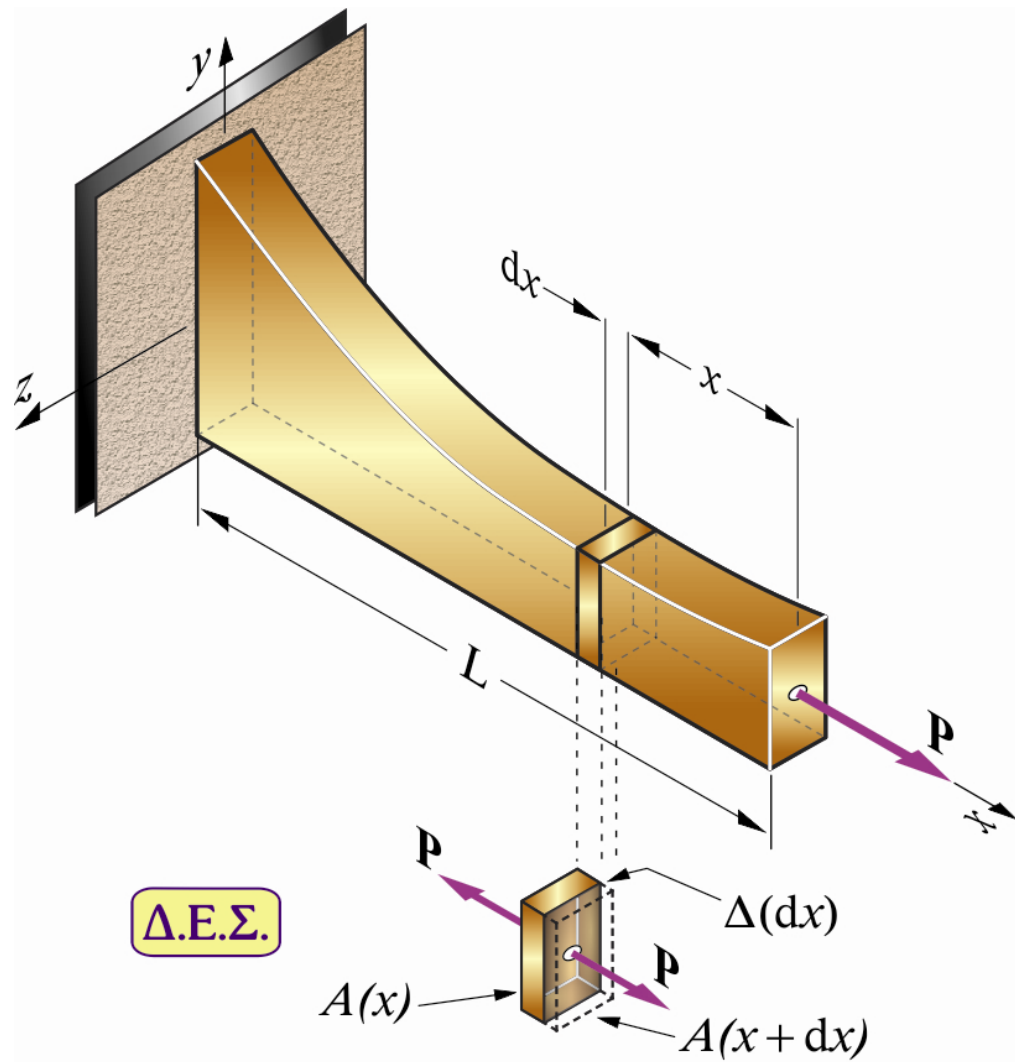


$$\Delta l_o = \frac{P l_o}{E_o A_o} + \frac{W_o l_o}{2 E_o A_o} = \frac{4 l_o}{E_o \pi d_o^2} \left( P + \frac{W_o}{2} \right) = 0.44 \text{ mm}$$

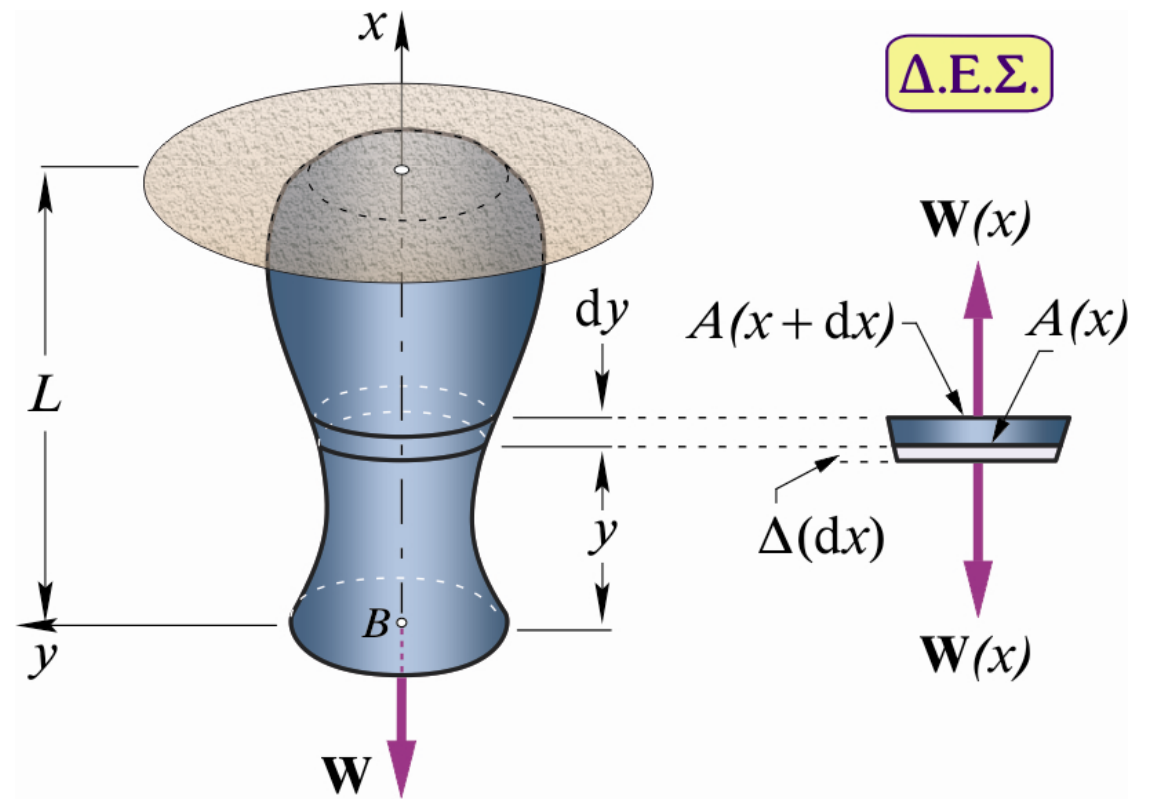
$$\Delta l_s = \frac{P + W_o}{E_s A_s} l_s + \frac{W_s l_s}{2 E_s A_s} = \frac{l_s}{E_s \frac{\pi}{4} d_s^2} \left( P + W_o + \frac{W_s}{2} \right) = 0.18 \text{ mm}$$

$$\Delta l = \Delta l_o + \Delta l_s = 0.44 + 0.18 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta l = 0.62 \text{ mm}}}$$

## 2.6- ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΡΑΒΔΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ



Εφελκυσμός μεταβλητής διατομής



Εφελκυσμός λόγω ιδίου βάρους μεταβλητής διατομής

## 2.6- ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΡΑΒΔΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

*Επιμήκυνση μη πρισματικής:*

$$\Delta L_P = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(x)} \quad , \quad \Delta L_{P(x)} = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{P(x)}{A(x)} dx$$

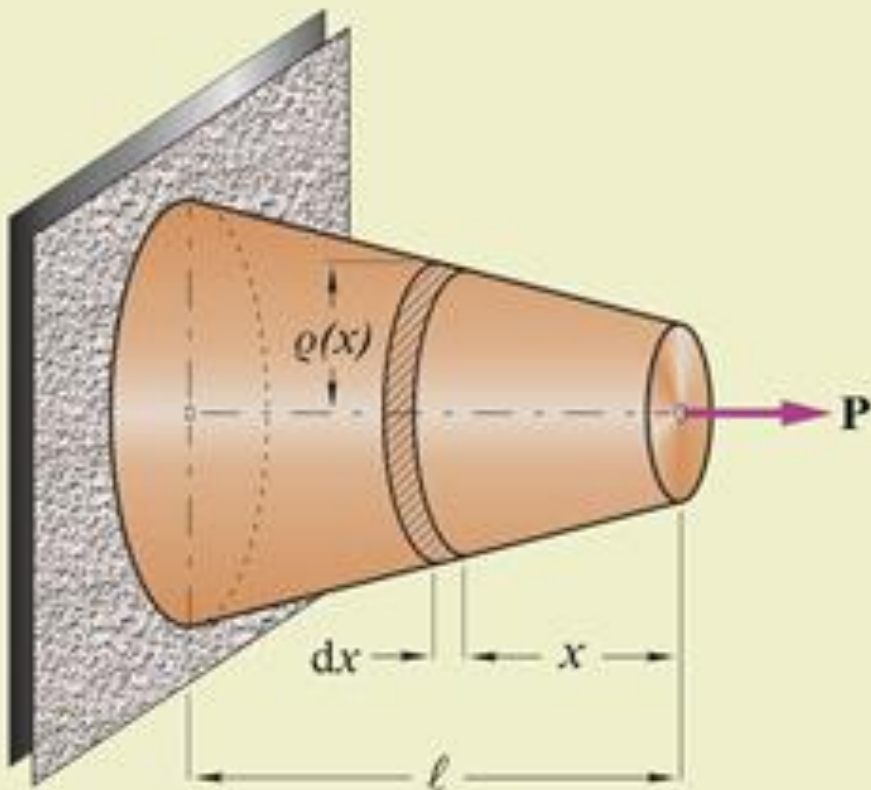
*Επιμήκυνση μη πρισματικής ράβδου λόγω ιδίου βάρους:*

$$\Delta L_W = \frac{\gamma}{E} \int_0^L \frac{V(x)}{A(x)} dx \quad , \quad \sigma_x = \frac{W(x)}{A(x)}$$

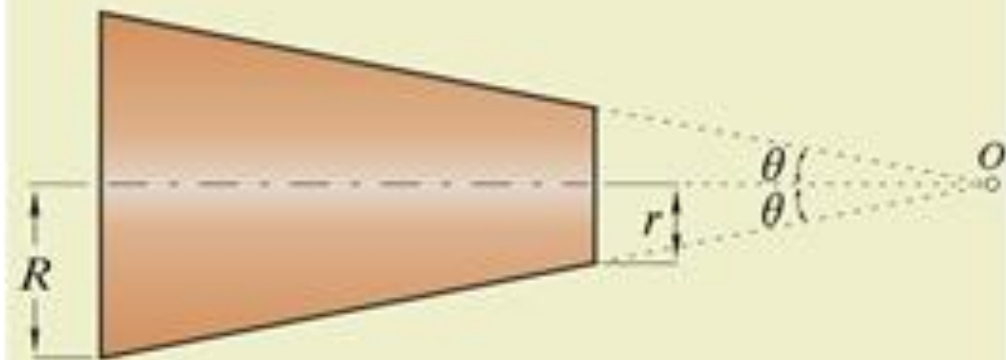
## 9<sup>ο</sup> Παράδειγμα

"Επιμήκυνσεις διαφόρων πρισμάτων"

Αβαρής κόλυρος κώνος, μεγάλης ακτίνας  $R$ , μικρής  $r$  και μήκους  $\ell$ , εφελκύεται από αξονική δύναμη  $\mathbf{P}$  (Σχ. α<sub>1</sub>). Ζητείται η επιμήκυνσή του.



Σχ. α<sub>1</sub>



$$\frac{\rho(x) - r}{R - r} = \frac{x}{\ell} \Rightarrow \rho(x) = r + \frac{x(R - r)}{\ell}$$

$$A(x) = \pi[\rho(x)]^2 = \pi \left[ r + \frac{x}{\ell}(R - r) \right]^2$$

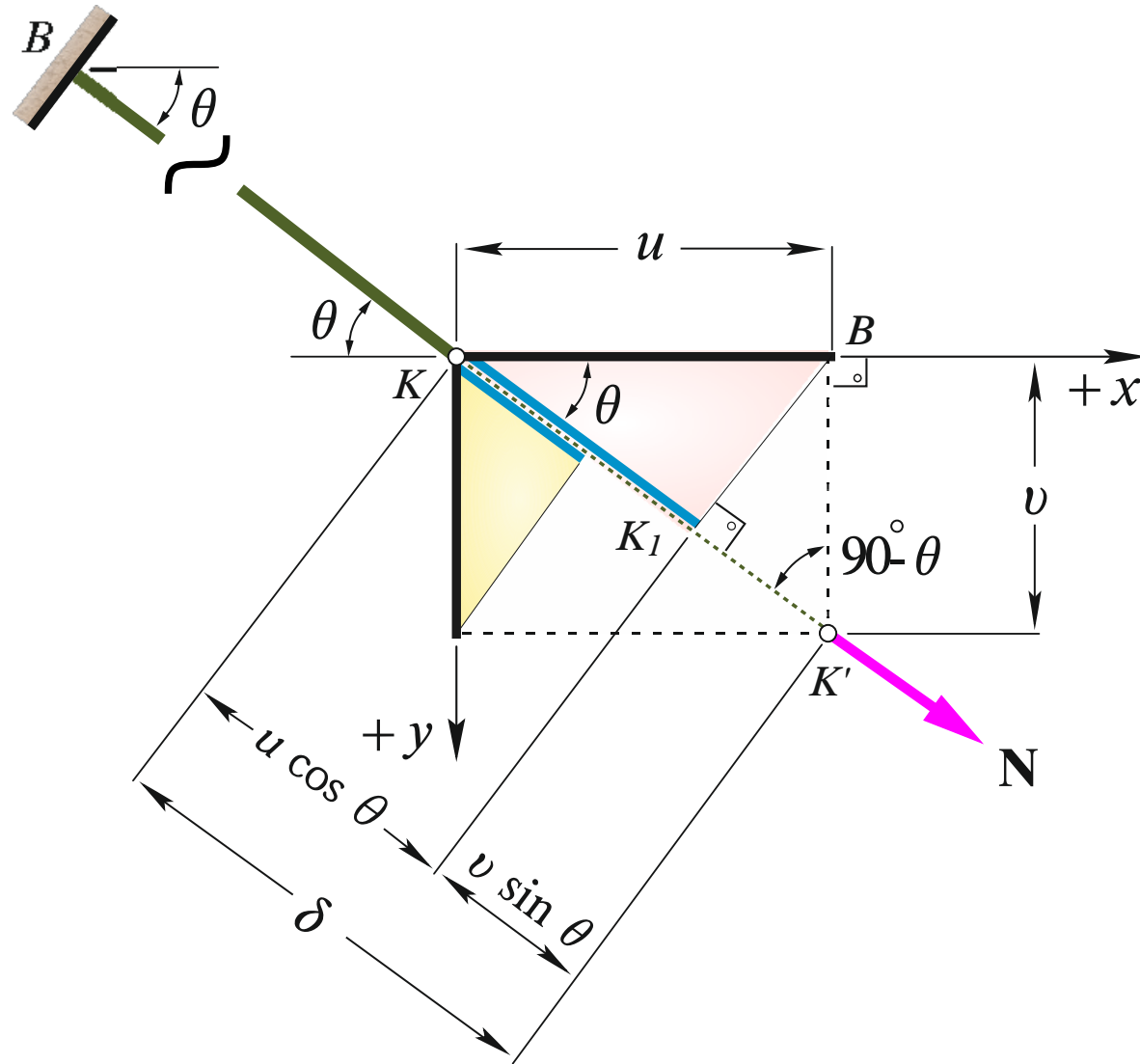
$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} \frac{P}{E \cdot A(x)} dx = \frac{P}{E} \int_0^{\ell} \frac{dx}{\pi \left[ r + \frac{x}{\ell}(R - r) \right]^2} = \frac{P\ell}{\pi E (R - r)} \int_0^{\ell} \frac{d \left[ r + \frac{x}{\ell}(R - r) \right]}{\left[ r + \frac{x}{\ell}(R - r) \right]^2} \Rightarrow$$

$$\Delta \ell = \frac{-P\ell}{\pi E (R - r) \cdot (-1)} \left[ r + \frac{x}{\ell}(R - r) \right]^{-1} \Big|_0^{\ell} = \frac{-P\ell}{\pi E (R - r)} \left[ \frac{1}{r + (R - r)} - \frac{1}{r} \right] \Rightarrow$$

Επιμήκυνση κόλυρου κώνου λόγω  $\mathbf{P}$ :  $\Delta \ell_{\mathbf{P}} = \frac{P\ell}{\pi E R r} = \frac{P\ell}{E \sqrt{A_R A_r}}$



## 2.10- ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ

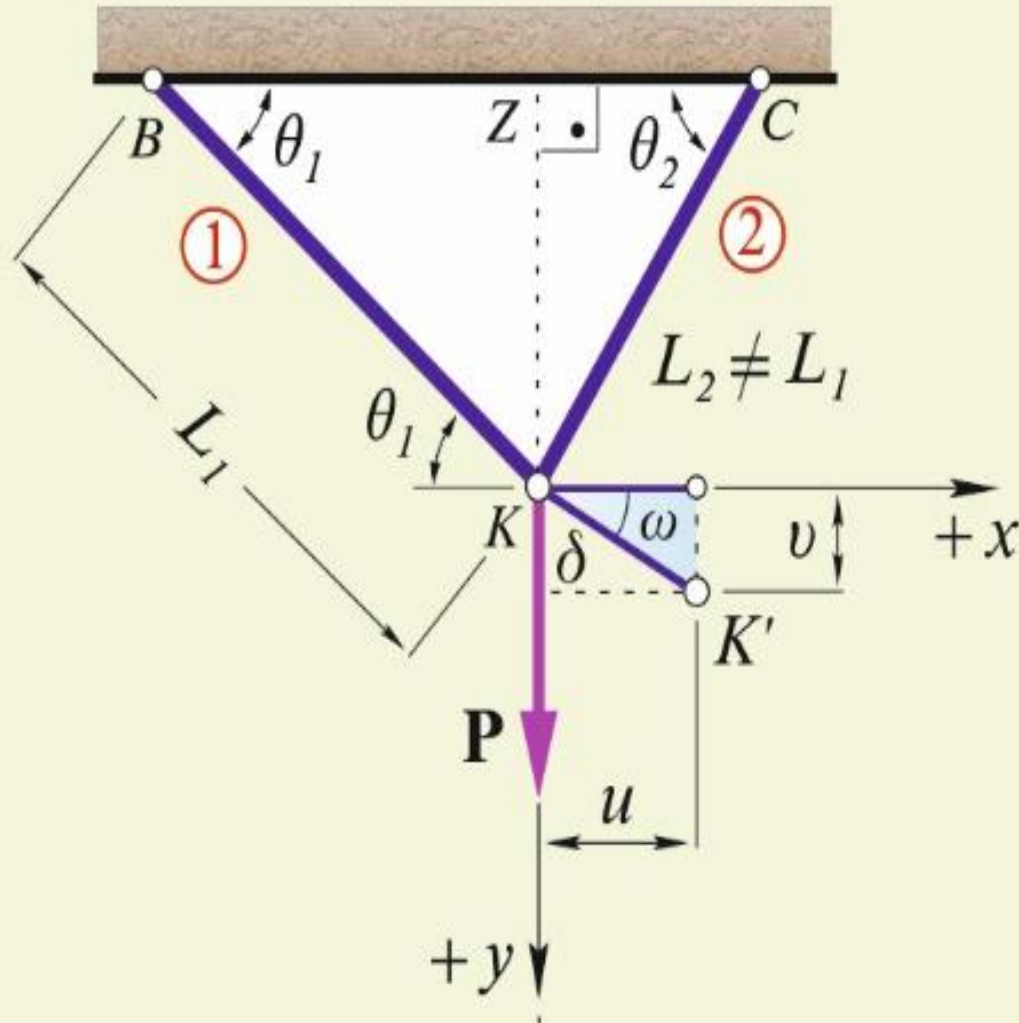


$K$  = αρχική θέση  
 $K'$  = τελική θέση

Μετατόπιση εφελκνόμενης ράβδου:  $\delta = u \cos \theta + v \sin \theta$  ,  $\delta = \sqrt{u^2 + v^2}$

# 12° Παράδειγμα

Στην ισοστατική ασύμμετρη κατασκευή του (Σχ. α), δίνονται η γωνία  $\theta_1$ , καθώς και τα  $(E_1, A_1, L_1)$ ,  $(E_2, A_2, L_2)$  και το  $P$ . Ζητούνται οι συνιστώσες της μετατόπισης.



$$(ZK) = L_1 \sin \theta_1 = L_2 \sin \theta_2 \Rightarrow$$

$$\underline{\sin \theta_2 = L_1 \sin \theta_1 / L_2}$$

*Εξισώσεις ισορροπίας:*

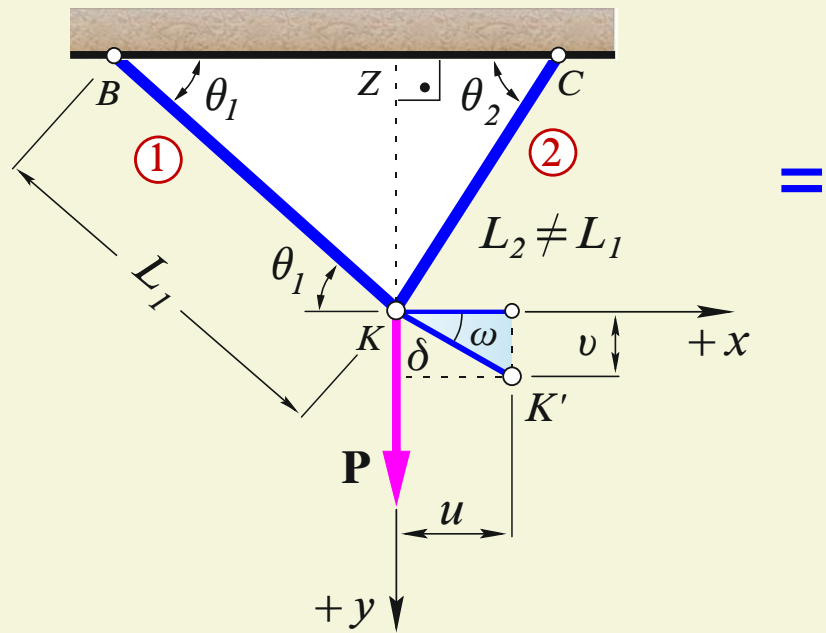
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad : \quad S_2 = S_1 \cos \theta_1 / \cos \theta_2$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad : \quad S_1 \sin \theta_1 + S_2 \sin \theta_2 - P = 0$$

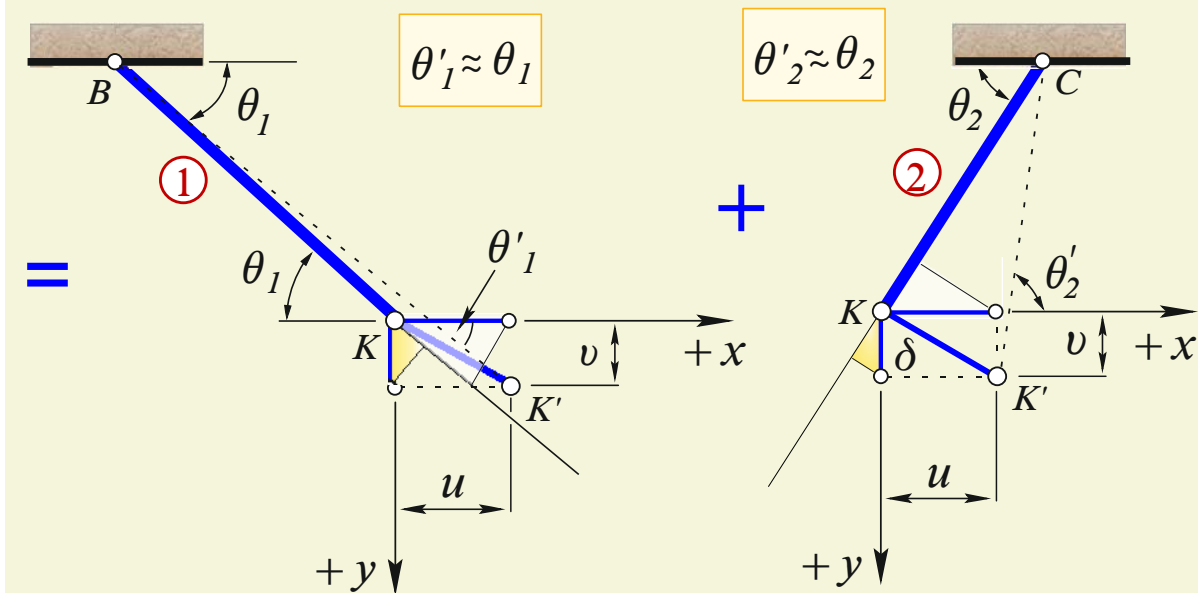
$$S_1 = \frac{\cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} P \quad , \quad S_2 = \frac{\cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} P$$

Σχ. α

# 12° Παράδειγμα



=



Μετατόπιση (ΚΚ') του κόμβου Κ:

$$\theta'_1 \approx \theta_1, \theta'_2 \approx \theta_2$$

①:  $\delta_1 = u \cos \theta_1 + v \sin \theta_1$

$$S_1 L_1 / E_1 A_1 = u \cos \theta_1 + v \sin \theta_1$$

②:  $\delta_2 = -u \cos \theta_2 + v \sin \theta_2$

$$S_2 L_2 / E_2 A_2 = -u \cos \theta_2 + v \sin \theta_2$$

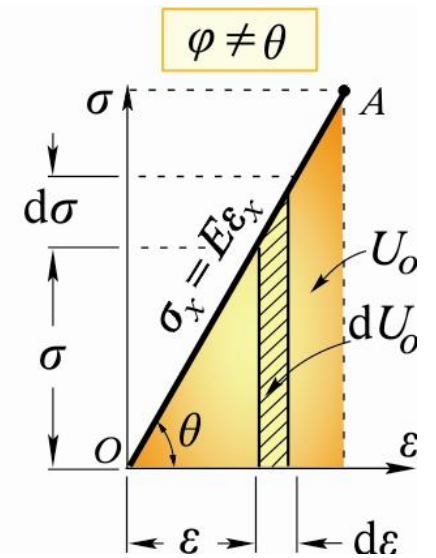
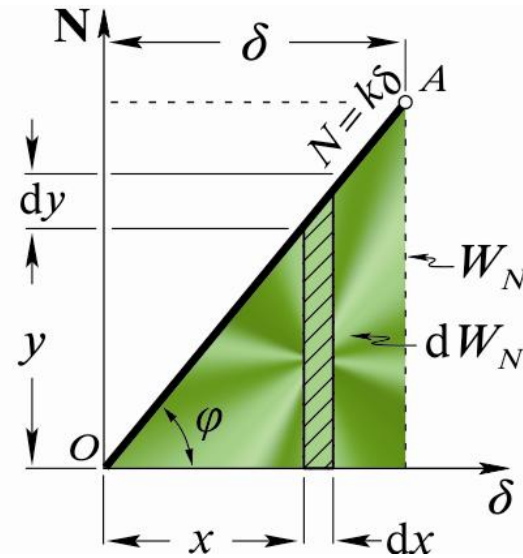
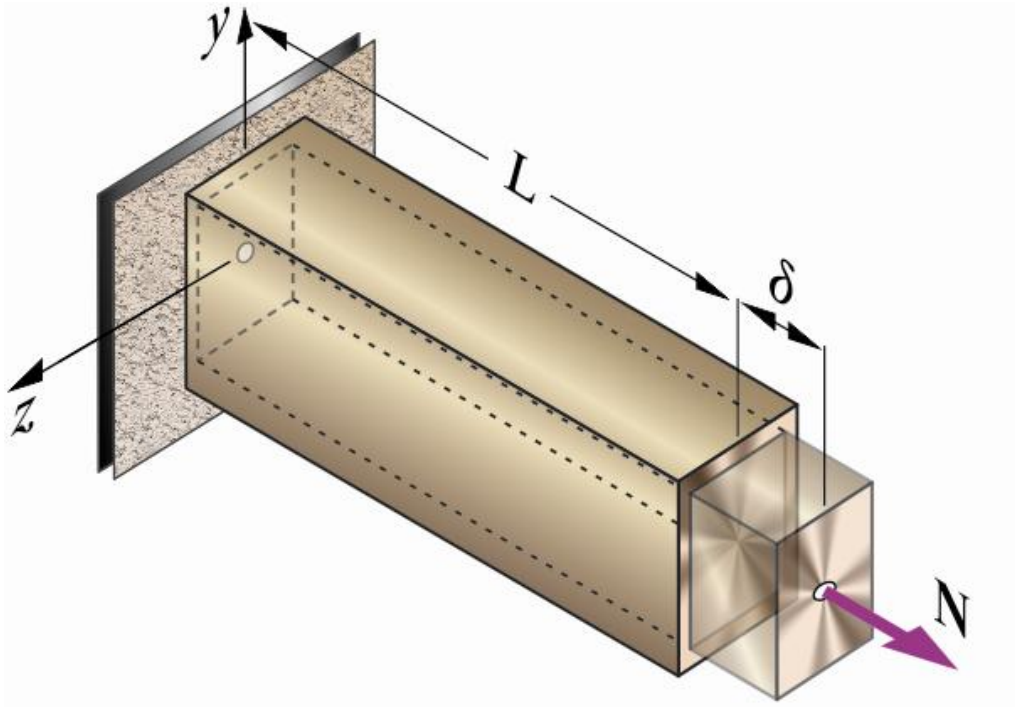
Μετατόπιση κόμβου ασύμμετρου δικτυώματος γωνιών  $\theta_1$  και  $\theta_2$ :

$$u = \frac{P}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \left[ \frac{L_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2}{E_1 A_1} - \frac{L_2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{E_2 A_2} \right]$$

$$v = \frac{P}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \left[ \frac{L_1 \cos^2 \theta_2}{E_1 A_1} + \frac{L_2 \cos^2 \theta_1}{E_2 A_2} \right]$$



## 2.11- ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΕΦΕΛΚΥΟΜΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΥ



Παραγόμενο έργο  $W$  για μετατόπιση  $\delta$ :

$$W = \int dW = \int_0^{\delta} N_1 \cdot d\delta_1$$

## 2.11- ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΕΦΕΛΚΥΟΜΕΝΗΣ ΡΑΒΔΟΥ

*Ενέργεια παραμόρφωσης πρισματικής ράβδου:*

$$U = \frac{N\delta}{2} = \frac{N^2 L}{2EA} = \frac{EA\delta^2}{2L}$$

*Ενέργεια παραμόρφωσης σύνθετης ράβδου:*

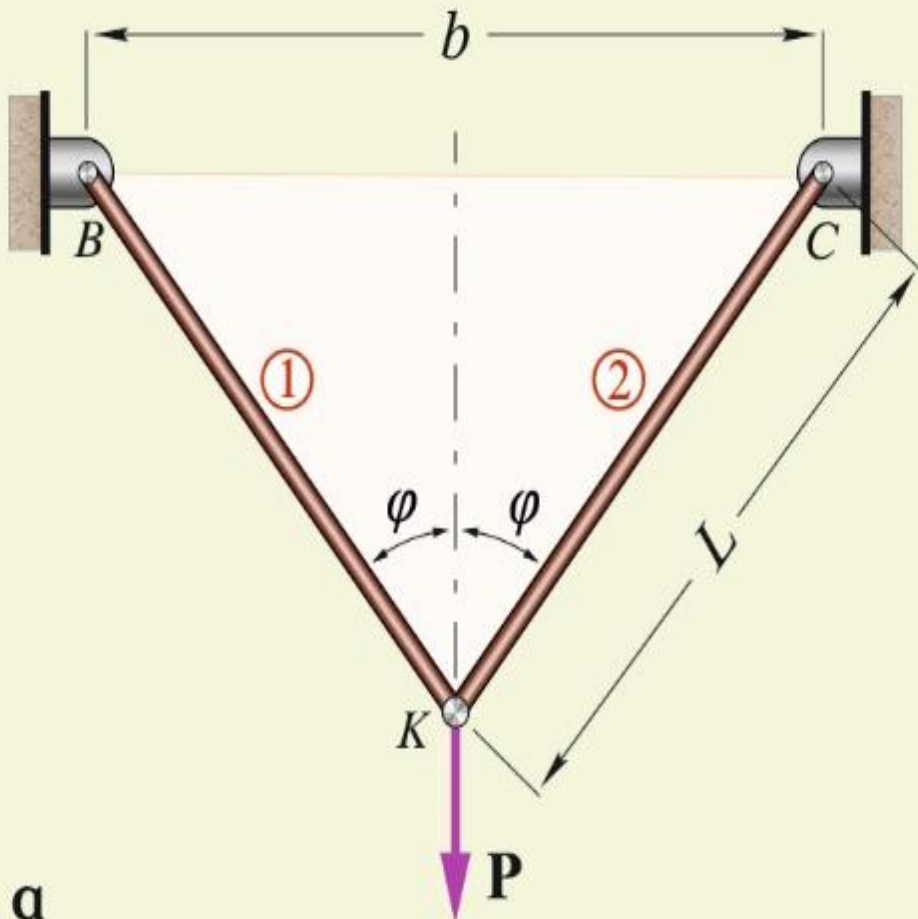
$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i}$$

Αν η αξονική δύναμη και η διατομή μεταβάλλονται, είναι  $N(x)$ ,  $A(x)$  τότε:

$$dU = \frac{[N(x)]^2}{2E \cdot A(x)} dx \quad , \quad U = \frac{1}{2E} \int_0^L \frac{[N(x)]^2}{A(x)} dx$$

## 16° Παράδειγμα "Υπολογισμός μετατόπισης κόμβου από την ενέργεια $U$ "

Το δικτύωμα του (Σχ. α), αποτελείται από δύο ίδιες (αβαρείς) ράβδους ① και ② (γνωστών  $E, A, L$ ) που ενώνονται αρθρωτά στο κόμβο  $K$  όπου ασκείται κατακόρυφη  $P$ . Ζητείται η κατακόρυφη μετατόπιση του  $K$ . Δίνεται η  $b$ .



Σχ. α

$$\uparrow \sum F_y = 0 : N_1 = N_2 = \frac{P}{2 \cos \varphi}$$

$$U = U_1 + U_2 = \frac{N_1^2 L}{2EA} + \frac{N_2^2 L}{2EA} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} U = \frac{P^2 L}{4EA \cos^2 \varphi}$$

$$W = \frac{P \delta_y}{2}, \quad \delta_y = (KK')$$

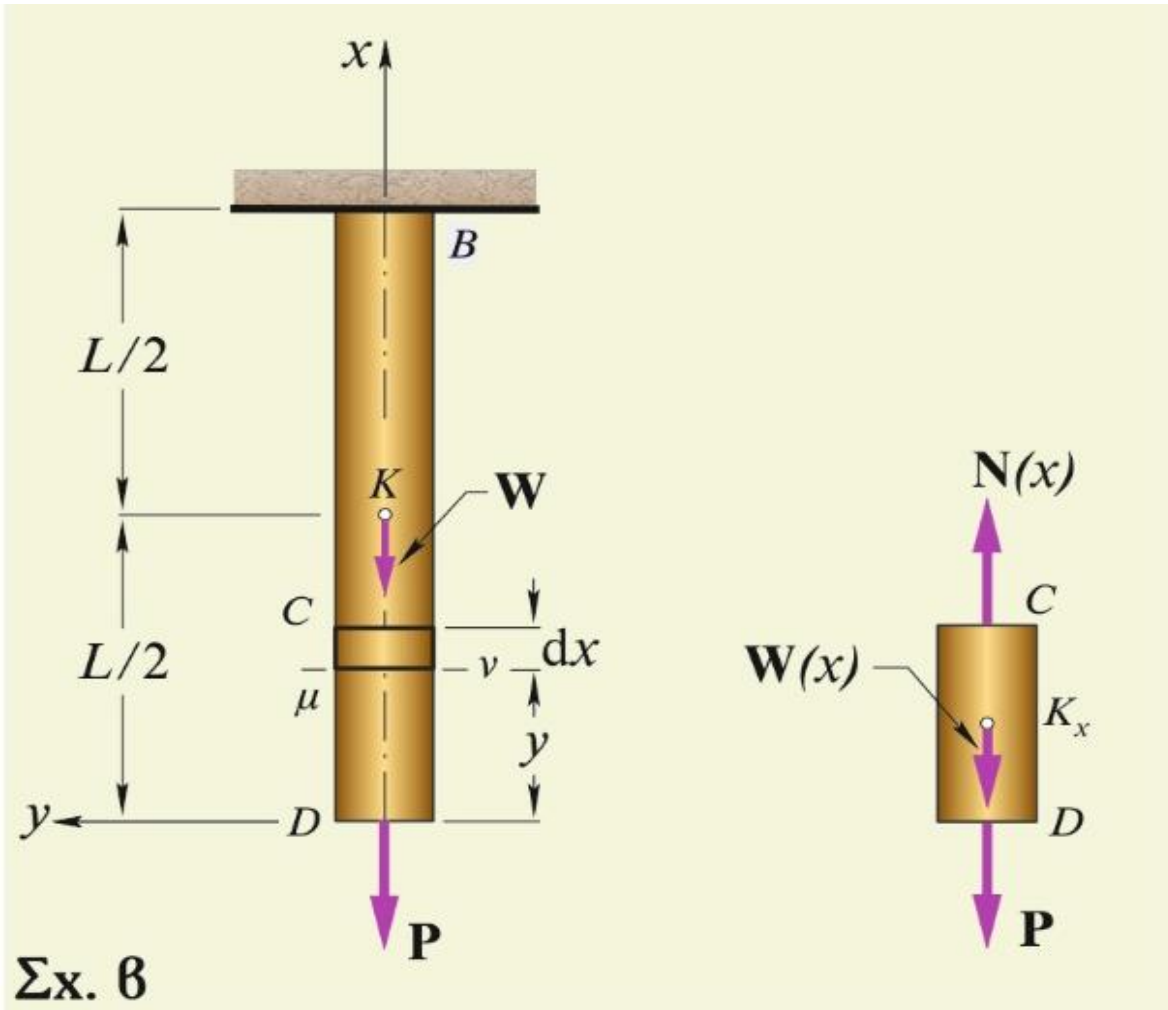
$$U = W \stackrel{(2),(3)}{\Rightarrow} \frac{P^2 L}{4EA \cos^2 \varphi} = \frac{P \delta_y}{2} \Rightarrow$$

$$\delta_y = \frac{P}{2EA \cos^2 \varphi} L, \quad \cos \varphi = \frac{b/2}{L}$$

# 17° Παράδειγμα

"Ενέργεια  $U$  σε συνύπαρξη ίδιου βάρους και  $P$ "

Ζητείται η ενέργεια  $U$  της πρισματικής ράβδου (γνωστών  $E, A, L$ ), αν επιπλέον του βάρους της, ασκείται στο ελεύθερο άκρο της γνωστή δύναμη  $P$  (Σχ. β).



$$N(x) = W(x) + P = \gamma Ax + P$$

$$U = \int_0^L \frac{[N(x)]^2}{2EA} dx =$$
$$dU = \frac{[N(x)]^2}{2EA} dx, \quad = \int_0^L \frac{(\gamma Ax + P)^2}{2EA} dx =$$
$$= \frac{\gamma^2 AL^3}{6E} + \frac{\gamma PL^2}{4E} + \frac{P^2 L}{2EA}$$

