

Κεφάλαιο 1

ΟΡΘΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ, ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Ένα από τα βασικότερα αντικείμενα στο επάγγελμα του μηχανικού είναι η λεγόμενη **διαστασιολόγηση** ή **σχεδιασμός** δομικών στοιχείων έτσι ώστε να ικανοποιούνται συγκεκριμένες απαιτήσεις με κριτήριο συνήθως το κόστος (και σπανιότερα το βάρος). Για παράδειγμα, ο μηχανικός καλείται να αποφασίσει για τις διαστάσεις μιας δοκού (π.χ. πλάτος και ύψος διατομής) ή για το πάχος μιας πλάκας ώστε τα στοιχεία αυτά να παραλαμβάνουν τα φορτία για τα οποία έχουν μελετηθεί *χωρίς να αστοχήσουν* αλλά και *χωρίς να παραμορφωθούν σημαντικά*. Επίσης καλείται να υπολογίσει το φορτίο που μπορεί να παραλάβει ένα υποστύλωμα προτού *λυγίσει*, ή, όπως θα μάθουμε στο τέλος του παρόντος συγγράμματος, προτού βρεθεί σε κατάσταση *αστάθειας*.

Αντικείμενο των μαθημάτων *μηχανικής των υλικών*, ή *αντοχής των υλικών*, όπως παραδοσιακά ονομαζόταν στο παρελθόν, αποτελεί η **παρουσίαση αναλυτικών μεθόδων προσδιορισμού της αντοχής, της παραμόρφωσης και της ευστάθειας δομικών στοιχείων που παραλαμβάνουν φορτία**. Η μηχανική των υλικών αποτελεί παλαιό πεδίο της επιστήμης, το οποίο ξεκίνησε να τίθεται σε ορθολογιστική βάση και να περιγράφεται μέσω μαθηματικών σχέσεων από τις αρχές του 17^{ου} αιώνα μέσω των εργασιών του Γαλιλαίου. Ο Γαλιλαίος μελέτησε τη συμπεριφορά δομικών στοιχείων σε εφελκυσμό, θλίψη, ακόμα και κάμψη, με σκοπό την κατασκευή πλοίων για το Ιταλικό ναυτικό. Έκτοτε πολλοί διακεκριμένοι επιστήμονες συνέβαλαν στην περαιτέρω ανάπτυξη του πεδίου, με γνωστότερους τους Γάλλους ερευνητές Coulomb, Poisson, Navier, St. Venant και Cauchy, οι οποίοι στις αρχές του 19^{ου} αιώνα διετύπωσαν θεωρήματα και μεθόδους που αποτελούν σήμερα της βάσεις της μηχανικής. Σήμερα η μηχανική των υλικών αποτελεί κύριο πεδίο μελέτης για όλες τις κατηγορίες μηχανικών: πολιτικών, μηχανολόγων, αεροναυπηγών, ναυπηγών, ηλεκτρολόγων, ηλεκτρονικών, εμβιομηχανικών κλπ.

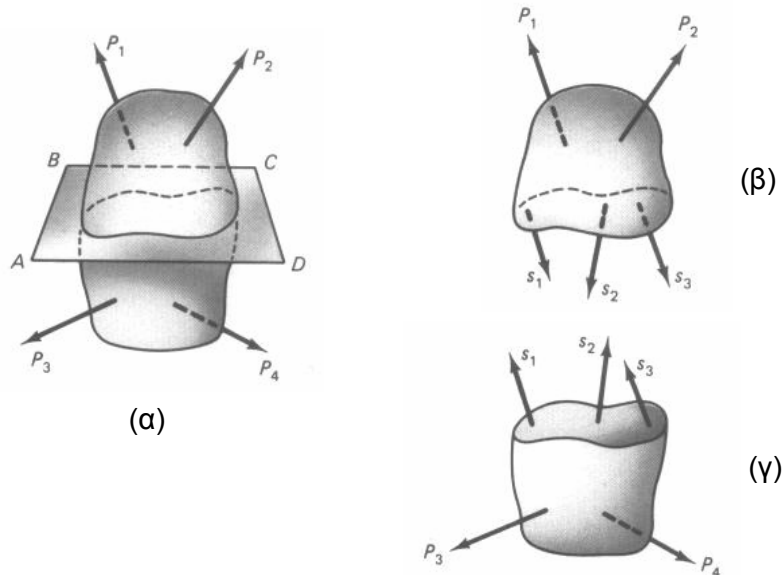
Η συμπεριφορά δομικών στοιχείων υπό φόρτιση εξαρτάται αφενός από θεμελιώδεις νόμους της μηχανικής, αφετέρου από τα μηχανικά χαρακτηριστικά των υλικών των στοιχείων, όπως αυτά προκύπτουν βάσει εργαστηριακών δοκιμών. Στις δοκιμές αυτές τα υλικά καταπονούνται συνήθως με γνωστές δυνάμεις, ενώ παράλληλα καταγράφεται η

απόκρισή τους σε όρους παραμορφώσεων, ανάπτυξης ρωγμών ή άλλων μορφών αστοχίας. Αυτό που ενδιαφέρει στα πλαίσια του παρόντος συγγράμματος είναι κυρίως το πρώτο τμήμα, δηλαδή η μαθηματική διατύπωση και κατανόηση των βασικών αρχών της μηχανικής, χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε πειραματικές μεθόδους και τεχνικές.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τρεις βασικές ενότητες: (α) γενικές αρχές και ορισμοί για τις τάσεις, (β) απλές περιπτώσεις καταπόνησης και (γ) η εφαρμογή απλών κριτηρίων σχεδιασμού δομικών στοιχείων με βάση την αντοχή.

1.2 Η μέθοδος των τομών

Ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα της μηχανικής είναι η μελέτη της φύσης των δυνάμεων που αναπτύσσονται στο εσωτερικό στερεών σωμάτων ως αποτέλεσμα της δράσης εξωτερικών φορτίων. Για το σκοπό αυτό γίνεται ένα “σχέδιο” του καταπονούμενου σώματος, πάνω στο οποίο δείχνονται όλες οι ασκούμενες δυνάμεις αλλά και οι αντιδράσεις στις στηρίξεις. Το σχέδιο αυτό είναι γνωστό ως **διάγραμμα ελευθέρου σώματος**. Επισημαίνεται ότι σε ένα τέτοιο διάγραμμα, όπως π.χ. αυτό του Σχ. 1.1α, οι δυνάμεις ικανοποιούν τις **συνθήκες στατικής ισορροπίας** και το σώμα ισορροπεί.



Σχ. 1.1 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος και τομή σε στερεό σώμα.

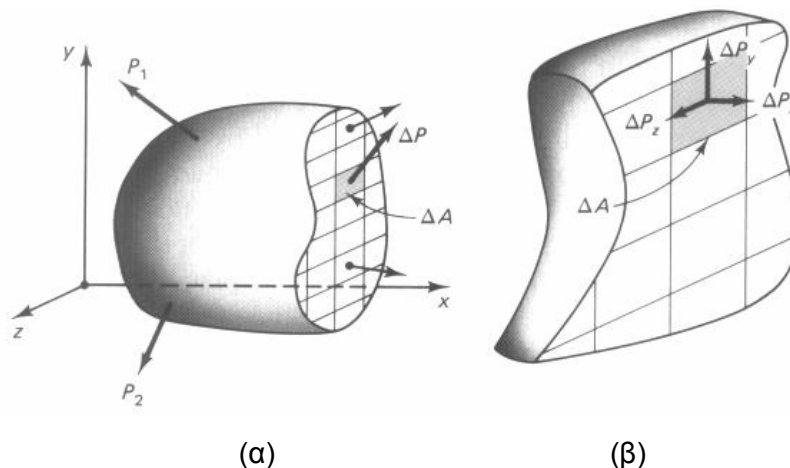
Ακολούθως φανταζόμαστε μία **υποθετική τομή** (επίπεδο ABCD στο Σχ. 1.1α), η οποία χωρίζει το σώμα σε δύο ξεχωριστά τμήματα, Σχ. 1.1β,γ. Δεδομένου ότι το αρχικό σώμα ήταν σε κατάσταση ισορροπίας, ομοίως ισχύει και για οποιοδήποτε από τα

υποσύνολά του. Για να καταστεί τούτο δυνατό χρειάζεται η παρουσία εσωτερικών δυνάμεων στη θέση της τομής, έτσι ώστε **οι εξωτερικές δυνάμεις στη μία πλευρά της τομής να εξισορροπούνται από τις εσωτερικές δυνάμεις στην τομή**. Η μέθοδος αυτή, γνωστή ως **μέθοδος των τομών**, επιτρέπει την εύρεση των εσωτερικών δυνάμεων για οποιαδήποτε θέση της φανταστικής τομής.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι κινούμενα σώματα (π.χ. ένα κτίριο κατά τη διάρκεια ενός σεισμού) βρίσκονται σε κατάσταση **δυναμικής ισορροπίας**, η οποία είναι όμως ουσιαστικά ισοδύναμη με την στατική ισορροπία, αρκεί να εφαρμοσθεί στο κέντρο μάζας του σώματος μία δύναμη F ίση με την επιτάχυνσή του, a , επί τη μάζα του, m , και με φορά αντίθετη προς αυτή της επιτάχυνσης. Η διατύπωση αυτή, που αποτελεί την **αρχή του d' Alembert**, επιτρέπει τη γενίκευση της εφαρμογής της μεθόδου των τομών τόσο σε στατικά όσο και σε δυναμικά προβλήματα.

1.3 Ορισμός της τάσης

Οι εσωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε “πολύ μικρές” επιφάνειες ΔA μίας τομής έχουν μέγεθος και φορά που γενικά ποικίλλει, ανάλογα με τη θέση της μικρής αυτής επιφάνειας. Τις δυνάμεις αυτές μπορούμε να θεωρήσουμε ως διανύσματα (ΔP στο Σχ. 1.2α), που μπορούν να αναλυθούν **κάθετα στο επίπεδο της τομής** (ΔP_x) αλλά και **πάνω σε αυτό**. Το διάνυσμα επί του επιπέδου αναλύεται περαιτέρω στους άξονες y και z ενός τρισσορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων, δίνοντας τις δυνάμεις ΔP_y και ΔP_z (Σχ. 1.2β).



Σχ. 1.2 (α) Εσωτερικές δυνάμεις σε τομή ελεύθερου σώματος και (β) μεγέθυνση με τις συνιστώσες της δύναμης ΔP .

Θεωρώντας την επιφάνεια ΔA απειροστά μικρή καταλήγουμε στον ορισμό της **τάσης σε σημείο** της τομής, ως εξής:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \quad (1.1\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A} \quad (1.1\beta)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A} \quad (1.1\gamma)$$

Η τάση κάθετα στο επίπεδο της τομής (στη διεύθυνση του άξονα x) ονομάζεται **ορθή τάση** και συμβολίζεται με το γράμμα σ (ο δείκτης δηλώνει τη διεύθυνση), ενώ οι τάση **πάνω στο επίπεδο της τομής** ονομάζεται **διατμητική τάση** και συμβολίζεται με το γράμμα τ . Βάσει της ανάλυσης της διατμητικής τάσης στους άξονες y και z , οι δείκτες του τ δηλώνουν: ο πρώτος τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο πάνω στο οποίο ασκείται η διατμητική τάση (άξονας x) και ο δεύτερος τη διεύθυνση του διανύσματος της διατμητικής τάσης (y ή z). Τέλος, ορθές τάσεις που προκαλούν μήκυνση, δηλαδή **εφελκυσμό**, του στερεού στη διεύθυνση που ασκούνται ονομάζονται **εφελκυστικές**, ενώ αυτές που προκαλούν βράχυνση, δηλαδή **θλίψη**, ονομάζονται **θλιπτικές**.

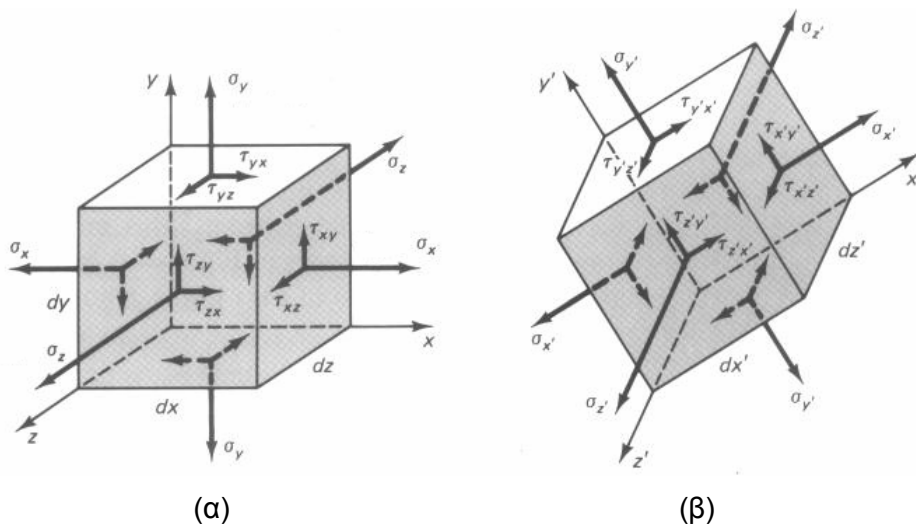
Αυτό που αξίζει να γίνει κατανοητό, πέρα από τη μαθηματική διατύπωση της τάσης, είναι η φυσική σημασία της: **η τάση σε κάθε σημείο ενός στερεού σώματος καθορίζει τον βαθμό καταπόνησης του υλικού**, δηλαδή “το πόσο αλλά και το πώς πονάει” το υλικό στο εν λόγω σημείο.

Έχοντας ορίσει την τάση ως “δύναμη δια επιφάνεια”, ως **μονάδα τάσης** στο διεθνές σύστημα SI ορίζεται το N/m^2 , γνωστό και ως Pa (Pascal). Συνήθως όμως στην πράξη χρησιμοποιείται το **MPa** (megapascal, $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$), το οποίο ισούται με 1 MN/m^2 , ή, ισοδύναμα, με 1 N/mm^2 .

Τέλος επισημαίνεται ότι **το γινόμενο τάσης επί επιφάνεια στην οποία ασκείται δίνει δύναμη**. Σε μια υποθετική τομή, το διανυσματικό άθροισμα όλων αυτών των δυνάμεων, δηλαδή οι συνισταμένες των τάσεων, αποτελεί αυτό που συχνά ονομάζουμε **εσωτερικά εντατικά μεγέθη** (αξονική δύναμη, τέμνουσα δύναμη, ροπή κάμψης κλπ). Στη μηχανική των υλικών συνήθως πρώτα προσδιορίζονται τα μεγέθη αυτά (βάσει ισορροπίας) και ακολούθως, μέσω μαθηματικών σχέσεων, υπολογίζονται οι τάσεις.

1.4 Ο τανυστής των τάσεων

Αν πλέον της υποθετικής τομής του Σχ. 1.2 θεωρήσουμε ακόμα ένα επίπεδο μέσω του στερεού σώματος σε απειροστή απόσταση dx από το αρχικό, απομονώνουμε μία στοιχειώδη “φέτα” του υλικού. Κατόπιν, θεωρώντας δύο ακόμα ζεύγη επιπέδων κάθετα στα αρχικά αλλά και μεταξύ τους, απομονώνουμε έναν στοιχειώδη κύβο του υλικού, ο οποίος δείχνεται στο Σχ. 1.3α μαζί με τις ορθές και διατμητικές τάσεις που αντιστοιχούν σε κάθε επίπεδο. Στις *κοντινές πλευρές* του κύβου (δηλαδή στις πιο απομακρυσμένες από το σύστημα αξόνων) οι τάσεις θεωρούνται θετικές όταν η φορά τους συμπίπτει με αυτή του συστήματος αξόνων. Αντίθετα, στις απέναντι πλευρές του κύβου, προς το σύστημα αξόνων, οι θετικές τάσεις ασκούνται, λόγω ισορροπίας, με φορά αντίθετη αυτής των αξόνων.



Σχ. 1.3 (α) Ορθές και διατμητικές τάσεις σε στοιχειώδες τμήμα του στερεού σώματος με επίπεδα κάθετα στο σύστημα αξόνων $x-y-z$ (οι εικονιζόμενες τάσεις είναι θετικές). (β) Ορθές και διατμητικές τάσεις σε στοιχειώδες τμήμα του στερεού σώματος με επίπεδα κάθετα σε άλλο σύστημα αξόνων, το οποίο έχει στραφεί ως προς το $x-y-z$.

Σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του στερεού σώματος οι τάσεις μπορούν να δειχθούν ως προς οποιοδήποτε σύστημα αξόνων, $x' - y' - z'$, το οποίο έχει στραφεί σε σχέση με το αρχικό $x - y - z$ (Σχ. 1.3β). Οι νέες αυτές τάσεις είναι εν γένει διαφορετικές από αυτές του συστήματος $x - y - z$, και ο υπολογισμός τους ονομάζεται *μετασχηματισμός τάσεων* (Κεφ. 4).

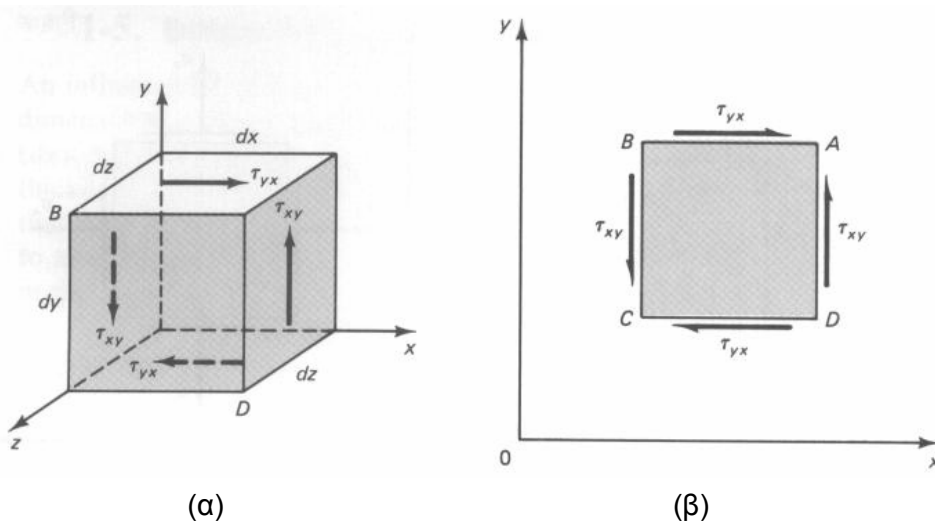
Η εντατική κατάσταση (δηλαδή το σύνολο των τάσεων) σε ένα σημείο ενός στερεού σώματος περιγράφεται πλήρως αν είναι γνωστές οι τρεις τάσεις στα τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα που ορίζονται από το σύστημα αξόνων στο εν λόγω σημείο. Στο Σχ. 1.3α οι τάσεις αυτές είναι σ_x , τ_{xy} και τ_{xz} , τ_{yx} , σ_y και τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy} και σ_z , οι οποίες μπορούν να γραφούν στην παρακάτω μητρική μορφή, γνωστή ως **τανυστής τάσεων**.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το μητρώο (1.2) είναι **συμμετρικό**, δηλαδή $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Αυτό προκύπτει από την ισορροπία του στοιχειώδους τμήματος του Σχ. 1.3α, που θεωρείται με πλευρές dx , dy και dz . Στο τμήμα αυτό, που δείχνεται και πάλι στο Σχ. 1.4α (και για διευκόλυνση σε δύο διαστάσεις στο Σχ. 1.4β) διατυπώνουμε την εξίσωση ισορροπίας ροπών ως προς άξονα z (στο Σχ. 1.4 δείχνονται μόνο οι τάσεις που συμμετέχουν στην εξίσωση ισορροπίας ροπών):

$$M_C = 0 \Rightarrow \tau_{yx}(dx dz)dy - \tau_{xy}(dy dz)dx = 0 \Rightarrow \tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (1.3)$$

Με το ίδιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ και $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

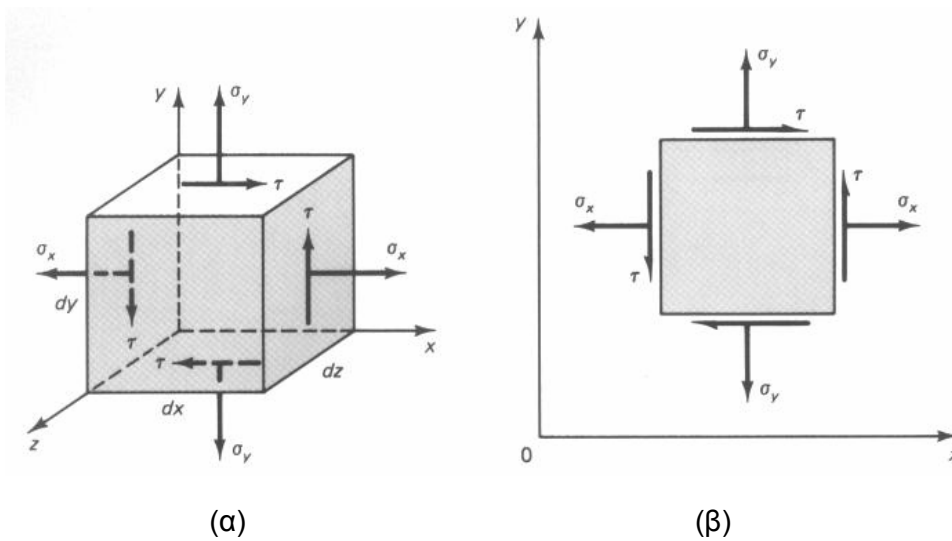


Σχ. 1.4 Οι (διατμητικές) τάσεις που συμμετέχουν στην εξίσωση ισορροπίας ροπών ως προς σημείο C.

Η εξ. (1.3) είναι εξαιρετικά σημαντική: δείχνει αφενός ότι οι διατμητικές τάσεις σε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα είναι ίσες, αφετέρου ότι για την ικανοποίηση της ισορροπίας ροπών ως προς άξονα z χρειάζονται και τα δύο ζεύγη διατμητικών τάσεων. Στο Σχ. 1.4β τα ζεύγη τάσεων είναι τέτοια ώστε η φορά των διανυσμάτων να συγκλίνει σε δύο διαμετρικά αντίθετες γωνίες (πάνω δεξιά και κάτω αριστερά).

Στην αρκετά συνηθισμένη περίπτωση που οι τάσεις αναπτύσσονται μόνο πάνω σε ένα επίπεδο, όπως π.χ. στο Σχ. 1.5, λέμε ότι το υλικό βρίσκεται σε **επίπεδη εντατική**

κατάσταση. Για απλότητα ορισμένες φορές παραλείπουμε τους δείκτες στις διατμητικές τάσεις, τις οποίες συμβολίζουμε πλέον με τ .



Σχ. 1.5 Επίπεδη εντατική κατάσταση.

Σε μητρική μορφή η επίπεδη εντατική κατάσταση περιγράφεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Εδώ αξίζει να αναφερθεί, όπως θα δούμε και σε άλλες ενότητες, ότι με κατάλληλη επιλογή του συστήματος συντεταγμένων θα μπορούσαμε να καταλήξουμε σε στοιχειώδες τμήμα του υλικού στο οποίο θα ασκούσαν μόνο ορθές τάσεις, ενώ οι διατμητικές θα ήταν μηδέν. Η αντίστοιχη μητρική μορφή είναι

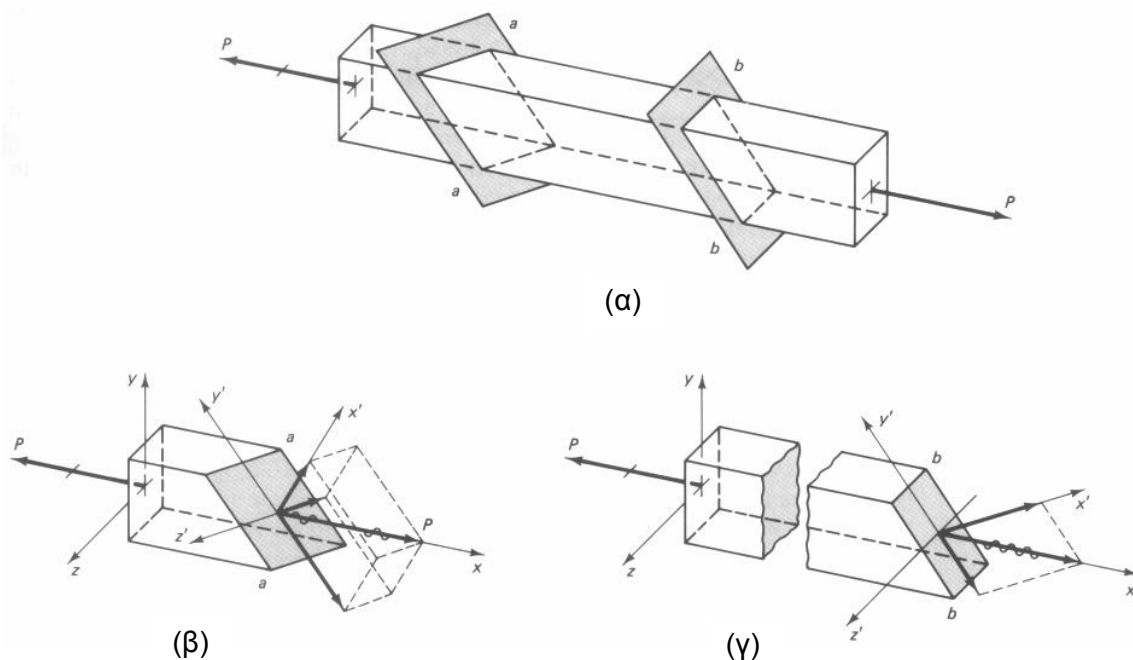
$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

και η συγκεκριμένη εντατική κατάσταση ονομάζεται **τριαξονική** (οι τάσεις σε τρεις άξονες αρκούν για να δώσουν την πλήρη εικόνα καταπόνησης). Για την επίπεδη εντατική κατάσταση $\sigma_3 = 0$, οπότε η αντίστοιχη εντατική κατάσταση ονομάζεται **διαξονική**. Απλό παράδειγμα διαξονικής εντατικής κατάστασης αποτελεί η καταπόνηση ενός λεπτού ελάσματος σε δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις. Τέλος, για αξονικά φορτιζόμενα δομικά στοιχεία (π.χ. ράβδοι ενός δικτυώματος) εκτός από την σ_3 μηδενίζεται και η σ_2 ,

αφήνοντας ως μόνη μη μηδενική τάση την σ_1 . Αυτή η εντατική κατάσταση ονομάζεται **μονοαξονική**.

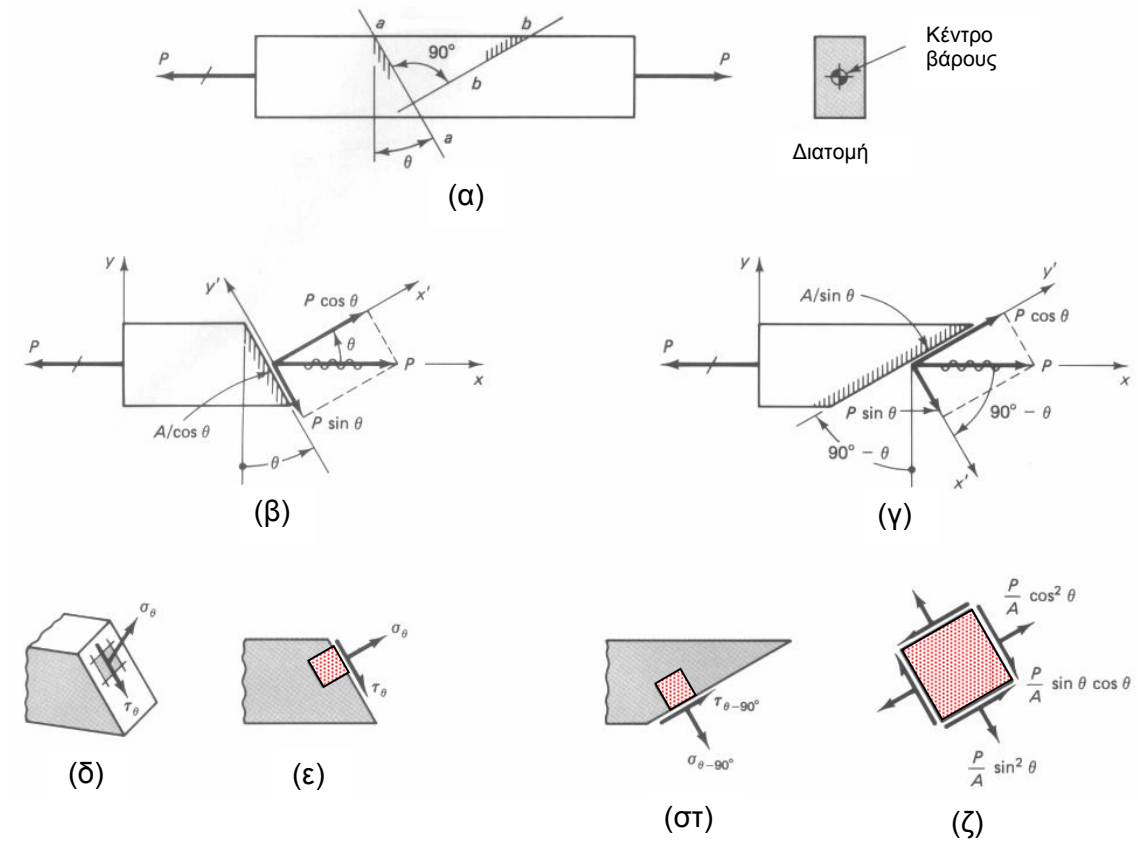
1.5 Τάσεις σε δομικά στοιχεία υπό αξονική καταπόνηση

Στην παρούσα ενότητα θα υπολογίσουμε τις τάσεις που αναπτύσσονται σε μία τυχούσα διατομή ενός δομικού στοιχείου σε μονοαξονική φόρτιση, δηλαδή στοιχείου τύπου *ράβδου*. Θεωρούμε την πρισματική (δηλαδή με σταθερή διατομή κατά μήκος, εμβαδού A) ράβδο του Σχ. 1.6α, στο δεξιό άκρο της οποίας ασκείται δύναμη P με σημείο εφαρμογής το κέντρο βάρους της διατομής. Αποτέλεσμα της δύναμης είναι η ίσου μεγέθους και αντίθετης φοράς αντίδραση στο αριστερό άκρο, που για λόγους καλύτερης κατανόησης θα σημειώνεται από $\delta\omega$ και πέρα με μία μικρή γραμμή που τέμνει το διάνυσμα της αντίδρασης λοξά. Στα Σχ. 1.6β-γ δίνονται τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος στοιχείων της ράβδου από το αριστερό άκρο μέχρι δύο τυχούσες τομές, $a-a$ και $b-b$, πάνω στις οποίες σημειώνεται η δύναμη P (με κυματιστή γραμμή) που απαιτείται για την ισορροπία των στοιχείων, καθώς και οι συνιστώσες αυτής σε σύστημα αξόνων $x' - y' - z'$. Ας σημειώσουμε ότι για την περίπτωση τομής σε επίπεδο κάθετο στο επίπεδο $x - y$ (Σχ. 1.6γ) η δύναμη P αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μία εξ αυτών κάθετη στην τομή και άλλη μία πάνω στο επίπεδο της τομής.



Σχ. 1.6 Τομές σε αξονικά φορτιζόμενη πρισματική ράβδο και εσωτερικές δυνάμεις.

Αν τα επίπεδα των τομών $a-a$ και $b-b$ είναι κάθετα μεταξύ τους (αλλά και κάθετα στο επίπεδο $x-y$), όπως δείχνεται στο Σχ. 1.7α, η εσωτερική δύναμη P σε κάθε μία από αυτές αναλύεται σε $P \cos \theta$ και $P \sin \theta$ (Σχ. 1.7β-γ), όπου θ η γωνία (θετική αν είναι αριστερόστροφη) μεταξύ του άξονα y (κάθετος στον άξονα της ράβδου) και της τομής $a-a$.



Σχ. 1.7 Κάθετες τομές σε πρισματική ράβδο και τάσεις.

Το εμβαδόν της κεκλιμένης διατομής της ράβδου στη θέση $a-a$ ισούται με $A / \cos \theta$, συνεπώς η ορθή τάση σ_θ και η διατμητική τάση τ_θ (Σχ. 1.7δ-ε) δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\sigma_\theta = \frac{P \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta \quad (1.6)$$

$$\tau_\theta = -\frac{P \sin \theta}{A / \cos \theta} = -\frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta \quad (1.7)$$

Το αρνητικό πρόσημο στην εξ. (1.7) εξηγείται βάσει του ορισμού που δόθηκε παραπάνω για την διατμητική τάση, παρατηρώντας δηλαδή ότι η διατμητική δύναμη $P \sin \theta$, άρα και η διατμητική τάση, έχει φορά αντίθετη στην θετική του άξονα y' .

Οι εξ. (1.6)-(1.7) δείχνουν ότι οι ορθές και διατμητικές τάσεις σε κάθε διατομή της ράβδου εξαρτώνται από τη γωνία θ . Η ορθή τάση σ_θ γίνεται μέγιστη για $\theta = 0^\circ$, δηλαδή όταν η τομή γίνεται κάθετα στον άξονα της ράβδου. Η αντίστοιχη διατμητική τάση είναι μηδέν. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη ορθή τάση σ_{\max} σε ράβδο υπό μονοαξονική καταπόνηση είναι

$$\sigma_{\max} = \sigma_x = \frac{P}{A} \quad (1.8)$$

όπου P η ασκούμενη δύναμη και A το εμβαδόν της διατομής της ράβδου.

Η εύρεση της μέγιστης διατμητικής τάσης τ_{\max} στη ράβδο γίνεται παραγωγίζοντας την εξ. (1.7) ως προς θ και θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν, οπότε προκύπτει

$$\tan \theta = \pm 1 \quad (1.9)$$

που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η τ_{\max} εμφανίζεται σε επίπεδα που σχηματίζουν γωνία $+45^\circ$ ή -45° με τον άξονα της ράβδου. Επειδή δε το πρόσημο στην διατμητική τάση δεν παίζει κάποιο ρόλο, δηλαδή στερείται φυσικής σημασίας, μπορούμε να γράψουμε

$$\tau_{\max} = \frac{P}{2A} = \frac{\sigma_x}{2} \quad (1.10)$$

Συνεπώς, η μέγιστη διατμητική τάση σε μονοαξονικά καταπονούμενη ράβδο ισούται με το μισό της μέγιστης ορθής τάσης.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και για την τομή $b-b$ αρκεί να τεθεί στις παραπάνω σχέσεις όπου θ η γωνία $-(90^\circ - \theta)$ (βλ. Σχ. 1.7γ), δηλαδή $\theta - 90^\circ$. Οι τάσεις που προκύπτουν είναι

$$\sigma_{\theta-90^\circ} = \frac{P \sin \theta}{A / \sin \theta} = \frac{P}{A} \sin^2 \theta \quad (1.11)$$

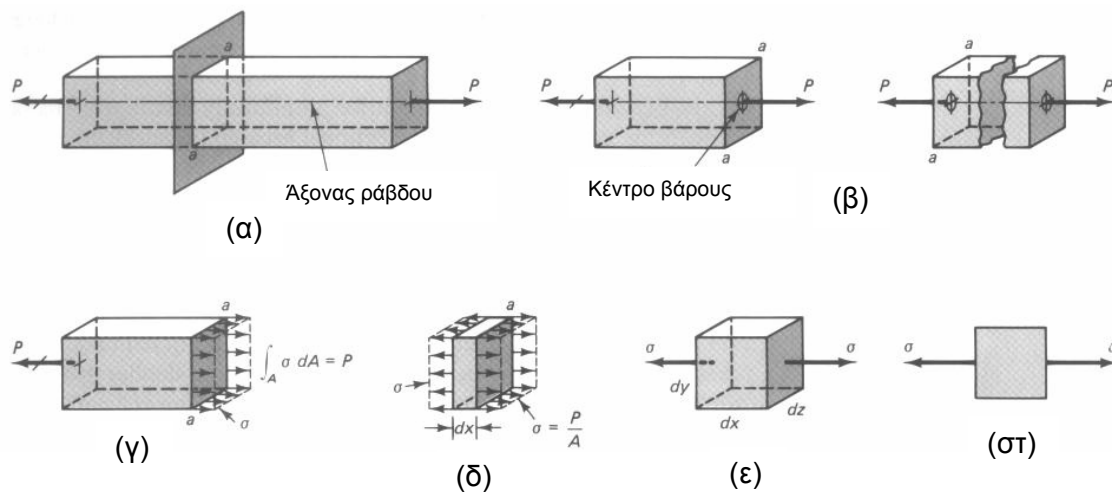
$$\tau_{\theta-90^\circ} = \frac{P \cos \theta}{A / \sin \theta} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta \quad (1.12)$$

Εδώ παρατηρούμε ότι η διατμητική τάση έχει φορά την θετική του άξονα y' (Σχ. 1.7στ), γεγονός που επιβεβαιώνεται και από το θετικό πρόσημο στο αποτέλεσμα της εξ. (1.12).

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα για τις τομές $a-a$ και $b-b$ στο απειροστά μικρό στοιχείο του Σχ. 1.7ζ παρατηρούμε ότι οι ορθές τάσεις σε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα είναι άνισες, ενώ οι αντίστοιχες διατμητικές είναι ίσες [σε απόλυτη συμφωνία με την εξ. (1.3)].

Όπως ήδη αναφέρθηκε, στην περίπτωση τομής σε επίπεδο κάθετο στον άξονα x (Σχ. 1.8α), οι τάσεις που αναπτύσσονται είναι μόνο ορθές, με μέγεθος $\sigma = P/A$

(μπορούμε πλέον να παραλείψουμε τον δείκτη x , δεδομένου ότι αναφερόμαστε πάντα σε ορθές τάσεις παράλληλα στον άξονα της ράβδου). Σε κάθε διατομή κατά μήκος της ράβδου οι τάσεις αυτές είναι ίσες, λόγω ισορροπίας των αντιστοίχων ελευθέρων σωμάτων, και λαμβάνονται ως ομοιόμορφα κατανομημένες σε οποιοδήποτε σημείο της διατομής (Σχ. 1.8γ). Έτσι αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο στοιχείο της ράβδου μήκους dx μεταξύ δύο τομών κάθετα στον άξονα x , θα διαπιστώσουμε ότι οι τάσεις στις δύο όψεις του στοιχείου αυτού είναι ίσες (και ομοιόμορφα κατανομημένες), όπως δείχνεται στο Σχ. 1.8δ. Αυτή η μονοαξονική εντατική κατάσταση μπορεί να παρασταθεί και με τη βοήθεια ενός απειροστά μικρού κυβίσκου (Σχ. 1.8ε), ή ακόμα απλούστερα, με το στοιχείο του Σχ. 1.8στ.



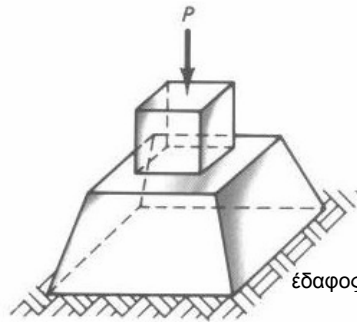
Σχ. 1.8 Διαδοχικά βήματα για τον προσδιορισμό της μέγιστης ορθής τάσης σε ράβδο.

Η σχέση $\sigma = P/A$ εφαρμόζεται αυστηρά σε πρισματικές ράβδους, αλλά κατά καλή προσέγγιση και σε ράβδους στις οποίες η διατομή μεταβάλλεται κατά μήκος του άξονα x σχετικά ομαλά. Έντονες αλλαγές στη γεωμετρία της διατομής (π.χ. ξαφνική μείωση του εμβαδού της διατομής) προκαλούν “ανωμαλίες” στις τάσεις, οι οποίες θα αναπτυχθούν σε επόμενη ενότητα.

Τα παραπάνω ισχύουν ανεξαρτήτως του προσήμου της δύναμης P , η οποία μπορεί να προκαλεί μήκυνση ή βράχυνση της ράβδου, οπότε οι τάσεις σ θα είναι **εφελκυστικές** ή **θλιπτικές**, αντίστοιχα. Στην δεύτερη περίπτωση βέβαια θα πρέπει να εξασφαλίζεται ότι στην ράβδο δεν εμφανίζονται φαινόμενα λυγισμού (μεγάλες πλευρικές παραμορφώσεις, όπως π.χ. θα γινόταν αν φορτίζαμε σε θλίψη ένα λεπτό σύρμα μεγάλου μήκους). Τέτοια φαινόμενα θα περιγραφούν στο Κεφ. 11.

Σε ορισμένες περιπτώσεις έχουμε την δημιουργία θλιπτικών τάσεων λόγω της μεταφοράς αξονικής δύναμης από ένα στοιχείο σε κάποιο άλλο, όπως δείχνεται στο παράδειγμα του Σχ. 1.9. Στο παράδειγμα αυτό η δύναμη P που ασκείται στο πάνω

στοιχείο (κύβος) προκαλεί θλιπτικές τάσεις μεταξύ του στοιχείου αυτού και του ακριβώς από κάτω πρίσματος, καθώς επίσης μεταξύ της κάτω επιφάνειας του πρίσματος και του εδάφους. Οι τάσεις αυτές, που ονομάζονται και **τάσεις επαφής**, υπολογίζονται από τη σχέση $\sigma = P/A$, όπου A το εμβαδόν της μικρότερης εκ των δύο επιφανειών επαφής μεταξύ δύο στοιχείων.

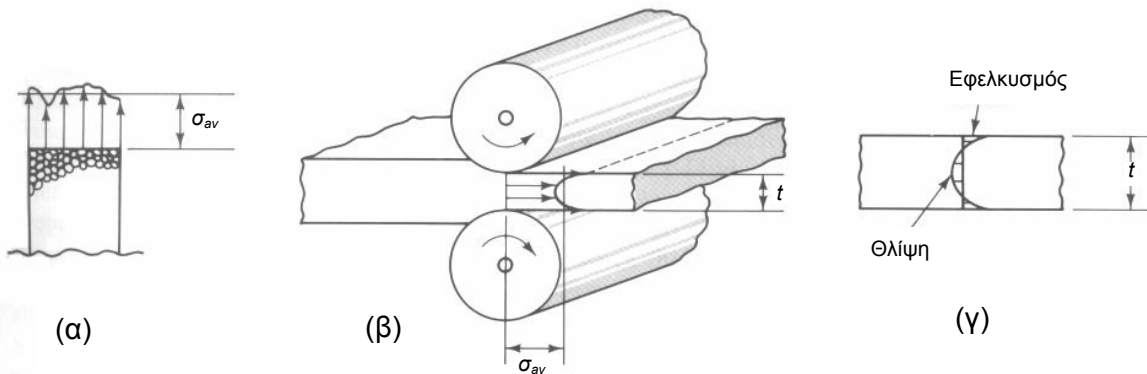


Σχ. 1.9 Η δύναμη μεταφέρεται από τον κύβο στο κάτω πρίσμα και μέσω αυτού στο έδαφος.

Επίσης πρέπει να τονίσουμε ότι η ισχύς της σχέσης $\sigma = P/A$ προϋποθέτει εξιδανικευμένα υλικά, στα οποία κάθε στοιχειώδες τμήμα της μικροδομής (π.χ. “κόκκος”) συνεισφέρει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο στην ανάληψη της δύναμης P . Τα υλικά αυτά ονομάζονται **ομοιογενή** και στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν. Τα πραγματικά υλικά χαρακτηρίζονται από ανομοιογένεια (π.χ. το σκυρόδεμα περιέχει αδρανή διαφόρων μεγεθών και τσιμεντοπολτό με περίπλοκο σύστημα πόρων, το ξύλο είναι ινώδες κλπ), με αποτέλεσμα κάποιες περιοχές σε αυτά να καταπονούνται περισσότερο από άλλες (Σχ. 1.10α). “Βλέποντας” όμως το υλικό κάπως μακροσκοπικά, δηλαδή όχι σε επίπεδο “κόκκου” αλλά θεωρώντας σχετικά μεγάλες περιοχές του, η σχέση $\sigma = P/A$ εξακολουθεί να ισχύει με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια για τον υπολογισμό της μέσης τάσης στις περιοχές αυτές.

Εξίσου σημαντικό να αναφερθεί είναι ότι οι παραπάνω εξισώσεις για τον προσδιορισμό τάσεων προϋποθέτουν υλικά εξ αρχής αφόρτιστα. Στην πραγματικότητα, σε ορισμένα υλικά οι τάσεις προϋπάρχουν λόγω της μεθόδου παραγωγής τους. Στο παράδειγμα του Σχ. 1.10β βλέπουμε κάπως ποιοτικά τις εφελκυστικές τάσεις που αναπτύσσονται σε χαλύβδινα ελάσματα κατά τη φάση θερμής εξέλασης, ενώ δηλαδή αυτά ελκύνονται μεταξύ ζεύγους κυλίνδρων προκειμένου να μειωθεί το πάχος τους. Η διαδικασία αυτή (έλκυση του ελάσματος από την δεξιά πλευρά του Σχ. 1.10β) προκαλεί εφελκυστικές τάσεις με τιμές μεγαλύτερες προς τις εξωτερικές επιφάνειες συγκριτικά με το εσωτερικό. Οι τάσεις αυτές έχουν μέση τιμή σ_{av} , ίση με τη δύναμη έλκυσης δια την επιφάνεια του ελάσματος (πλάτος επί πάχος t). Αμέσως μετά το σταμάτημα της λειτουργίας των κυλίνδρων η τάση σ_{av} αναιρείται, δηλαδή αφαιρείται από τις τάσεις που

αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της εξέλασης, οπότε προκύπτει η εντατική κατάσταση του Σχ. 1.10γ, με εφελκυστικές τάσεις στις εξωτερικές επιφάνειες και θλιπτικές στο εσωτερικό. Οι τάσεις αυτές, που ονομάζονται **παραμένουσες τάσεις**, βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή το άθροισμά τους σε οποιαδήποτε διατομή του ελάσματος είναι μηδέν. Στις περιπτώσεις που είναι σημαντικές θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και να προστίθενται στις τάσεις λόγω φόρτισης του υλικού.



Σχ. 1.10 (α) Ανομοιομόμορφη κατανομή τάσεων λόγω ανομοιογενούς δομής του υλικού. (β) Ανομοιομόμορφη κατανομή τάσεων κατά την έννοια του πάχους σε χαλύβδινο έλασμα κατά τη διάρκεια εξέλασης και (γ) παραμένουσες τάσεις.

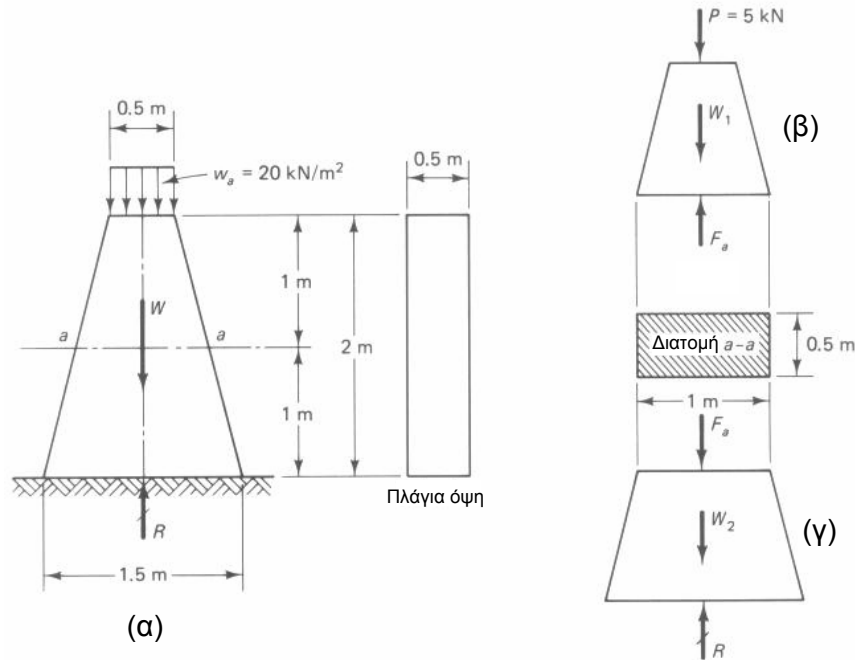
Παράδειγμα 1.1

Θεωρούμε ότι το στοιχείο θεμελίωσης του Σχ. 1.11α φέρει στην κορυφή ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο 20 kN/m^2 . Αν το υλικό του στοιχείου θεμελίωσης είναι σκυρόδεμα με βάρος 25 kN/m^3 , να υπολογιστεί η τάση στο σκυρόδεμα σε ύψος 1 m από το έδαφος.

Το συνολικό βάρος του στοιχείου είναι $W = [(0.5+1.5)/2] \times 0.5 \times 2 \times 25 = 25 \text{ kN}$ και η συνολική δύναμη στην κορυφή του είναι $P = 20 \times 0.5 \times 0.5 = 5 \text{ kN}$. Η αντίδραση R στη βάση του στοιχείου θεμελίωσης υπολογίζεται βάσει ισορροπίας δυνάμεων στην διεύθυνση y : $\sum F_y = 0 \Rightarrow R = W + P = 30 \text{ kN}$.

Ο προσδιορισμός της τάσης στην διατομή $a-a$ (1 m από τη βάση) γίνεται βάσει του διαγράμματος ελεύθερου σώματος οποιουδήποτε εκ των δύο στοιχείων πάνω και κάτω από τη στάθμη αυτή. Θεωρώντας το πάνω τμήμα ως ελεύθερο σώμα (Σχ. 1.11β), το βάρος του τμήματος αυτού είναι $W_1 = (0.5+1) \times 0.5 \times 1 \times 25 / 2 = 9.4 \text{ kN}$ και βάσει ισορροπίας κατακόρυφων δυνάμεων είναι $F_a = P + W_1 = 14.4 \text{ kN}$. Συνεπώς η (ορθή) τάση σε οποιοδήποτε σημείο της διατομής $a-a$ είναι $\sigma_a = F_a / A = 14.4 / (0.5 \times 1) = 28.8 \text{ kN/m}^2$. Η δύναμη F_a έχει φορά προς την διατομή, συνεπώς η υπολογισθείσα τάση είναι θλιπτική.

Αν θεωρήσουμε το κάτω τμήμα του στοιχείου θεμελίωσης ως ελεύθερο σώμα (Σχ. 1.11γ), το βάρος του τμήματος αυτού είναι $W_2=(1+1.5) \times 0.5 \times 1 \times 25/2 = 15.6 \text{ kN}$, οπότε βάσει ισορροπίας κατακόρυφων δυνάμεων είναι και πάλι $F_a = R - W_2 = 14.4 \text{ kN}$. Ο υπολογισμός της τάσης γίνεται όπως και παραπάνω.



Σχ. 1.11 Φορτιζόμενο στοιχείο θεμελίωσης και διαγράμματα ελεύθερου σώματος πάνω και κάτω από την διατομή *a-a*.

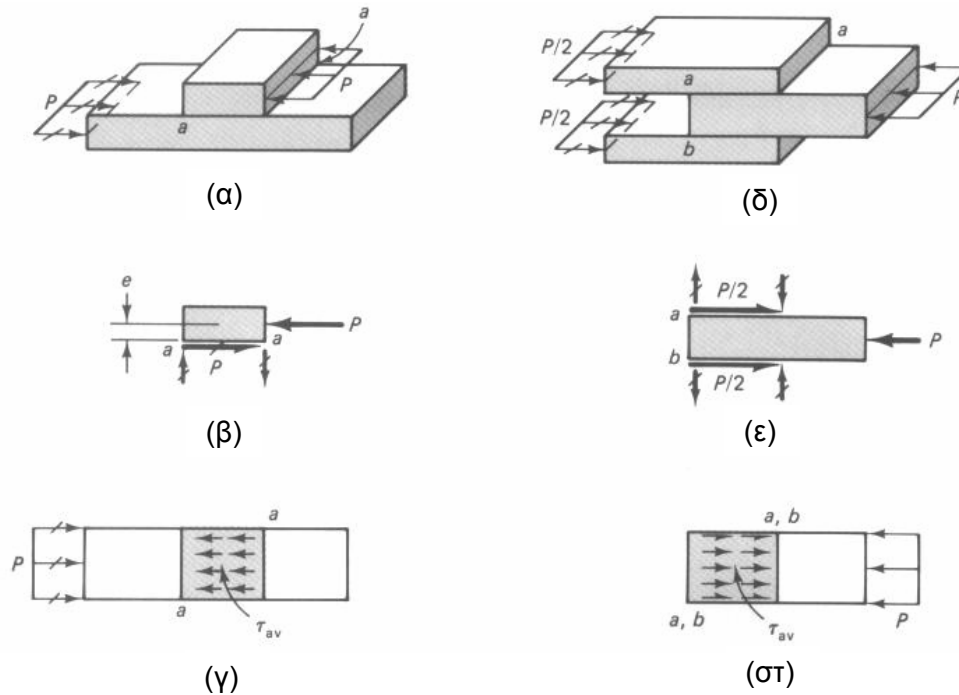
1.6 Προσεγγιστικός υπολογισμός διατμητικών τάσεων σε συνδέσεις

Σε πολλές περιπτώσεις αξονικές δυνάμεις σε δομικά στοιχεία έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων σε διεπιφάνειες ή σε στοιχεία τύπου κοχλία ή βλήτρου. Στις περιπτώσεις αυτές ο ακριβής υπολογισμός των διατμητικών τάσεων είναι σχετικά περίπλοκος, αλλά, κατά προσέγγιση, η μέση διατμητική τάση μπορεί να υπολογιστεί διαιρώντας τη συνολική τέμνουσα δύναμη V σε μία επιφάνεια με το εμβαδόν της, δηλαδή

$$\tau_{av} = \frac{V}{A} \tag{1.13}$$

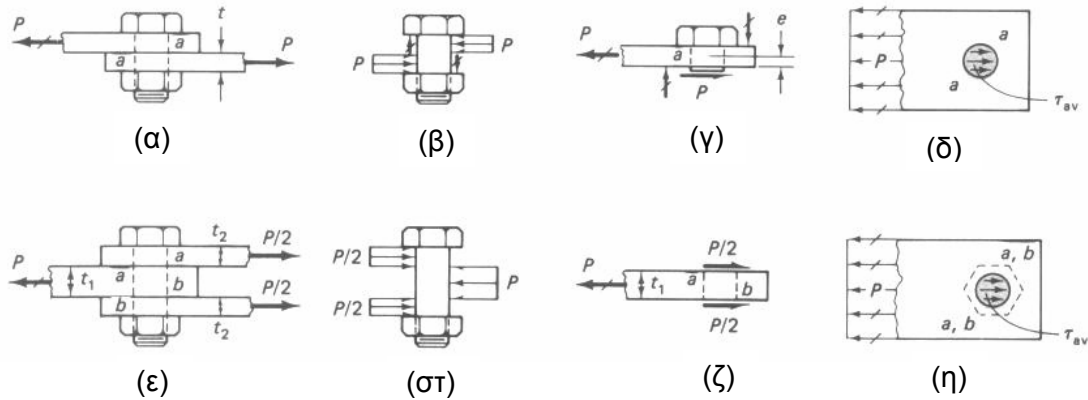
Στο παράδειγμα του Σχ. 1.12α θεωρούμε ένα μικρό τεμάχιο ενός υλικού “κολλημένο” πάνω σε κάποιο μεγαλύτερο. Η οριζόντια φόρτιση του μικρού τεμαχίου με δύναμη P προκαλεί συνολική τέμνουσα δύναμη στη διεπιφάνεια μεταξύ των δύο τεμαχίων ίση με P , καθώς και ένα ζεύγος μικρών δυνάμεων, που συνήθως είναι αμελητέες, έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων και ροπών στο ελεύθερο σώμα του Σχ.

1.12β. Διαιρώντας την τέμνουσα δύναμη στη διεπιφάνεια με το εμβαδόν της υπολογίζεται η μέση διατμητική τάση τ_{av} , που φαίνεται παραστατικά στο Σχ. 1.12γ. Αντίστοιχη είναι και η κατάσταση στο Σχ. 1.12δ-στ, το οποίο δείχνει τη μεταφορά δύναμης P από το φορτιζόμενο τεμάχιο (στη μέση) στα πάνω και κάτω από αυτό μέσω διάτμησης στις διεπιφάνειες.



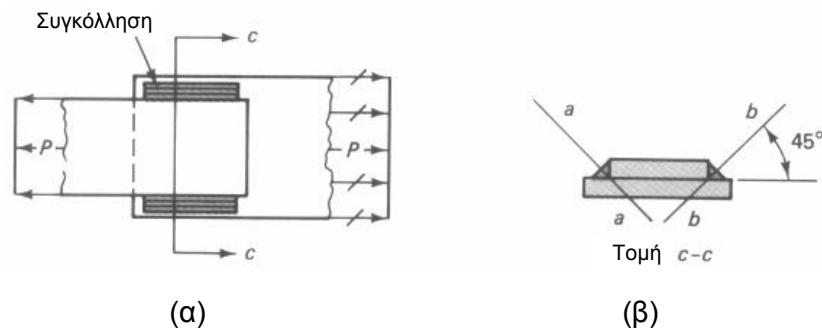
Σχ. 1.12 Συνθήκες φόρτισης σε κολλημένα τεμάχια υλικών και διατμητικές τάσεις στις διεπιφάνειες.

Παραδείγματα συνδέσεων μεταξύ ελασμάτων με κοχλίες αντί για “κόλλα” δίνονται στα Σχ. 1.13α-δ και 1.13ε-η, τα οποία δείχνουν τη σύνδεση δύο και τριών ελασμάτων, αντίστοιχα. Αν θεωρήσουμε τους κοχλίες σχετικά “χαλαρούς”, έτσι ώστε η δύναμη από έλασμα σε έλασμα να μεταφέρεται μέσω τάσεων επαφής και ακολούθως μέσω διατμητικών τάσεων στους κοχλίες, και όχι μέσω τριβής μεταξύ των ελασμάτων (κάτι που θα γινόταν αν οι κοχλίες ήταν αρκετά “σφιγμένοι”), μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη μέση διατμητική τάση τ_{av} σε κάθε κοχλία διαιρώντας τη δύναμη σε κάθε διεπιφάνεια (P στη σύνδεση του Σχ. 1.12α και $P/2$ στη σύνδεση του Σχ. 1.13ε) με το εμβαδόν της διατομής του κοχλία.



Σχ. 1.13 Συνθήκες φόρτισης σε ελάσματα συνδεδεμένα με κοχλίες, τάσεις επαφής και διατμητικές τάσεις στους κοχλίες. (α) Μονότμητος κοχλίας (απλή διάτμηση), (β) δίτμητος κοχλίας (διπλή διάτμηση).

Μία ακόμα περίπτωση σύνδεσης τεμαχίων είναι η συγκόλληση (στα μέταλλα), που και αυτή έχει ως κύριο χαρακτηριστικό την μεταφορά των αξονικών δυνάμεων από το ένα μέταλλο στο άλλο μέσω διάτμησης στο υλικό της συγκόλλησης (Σχ. 1.14).



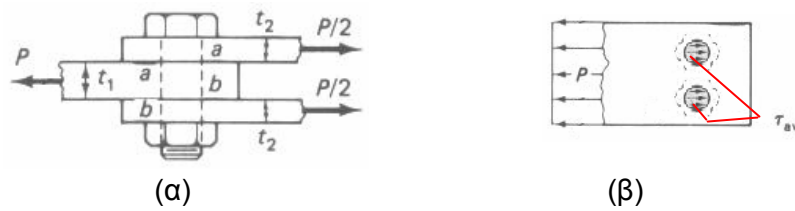
Σχ. 1.14 Φόρτιση συγκολλημένων μεταλλικών ελασμάτων με αποτέλεσμα την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων στα επίπεδα *a-a* και *b-b* της συγκόλλησης.

Παράδειγμα 1.2

Τρία χαλύβδινα ελάσματα συνδέονται μεταξύ τους με δύο κοχλίες όπως φαίνεται στο Σχ. 1.15α. Οι κοχλίες έχουν διάμετρο 20 mm και το συνολικό φορτίο που μεταφέρει η σύνδεση είναι $P = 100 \text{ kN}$. Να υπολογιστεί η μέση διατμητική τάση στους κοχλίες.

Από το Σχ. 1.13ζ η δύναμη που μεταφέρεται στους δύο κοχλίες είναι $100/2 = 50 \text{ kN}$. Υποθέτοντας συμμετρία η δύναμη αυτή κατανέμεται εξ ίσου σε κάθε κοχλία, επομένως η μέση διατμητική τάση σε κάθε κοχλία είναι

$$\tau_{av} = \frac{50 \times 10^3}{2 \times \pi(20)^2 / 4} = 79.62 \text{ MPa}$$



Σχ. 1.15 Φόρτιση ζεύγους δίτημων κοχλιών.

1.7 Εισαγωγή στον σχεδιασμό δομικών στοιχείων με βάση την αντοχή

1.7.1 Γενικά

Βασικός στόχος του υπολογισμού των τάσεων σε δομικά στοιχεία είναι η σύγκριση αυτών (εκεί όπου είναι μέγιστες) με τις αντοχές των υλικών, οι οποίες προσδιορίζονται βάσει πειραμάτων επί δοκιμίων (αντιπροσωπευτικά δείγματα του υλικού) στο εργαστήριο. Ως απλό παράδειγμα πειράματος αναφέρουμε την **δοκιμή εφελκυσμού** σε μέταλλα, η οποία συνίσταται στην εφαρμογή σταδιακά αυξανόμενης αξονικής δύναμης επί ράβδων κυκλικής διατομής μέχρι το υλικό της ράβδου να αστοχήσει (δηλαδή η ράβδος να “σπάσει” σε δύο τμήματα), Σχ. 1.16. Διαιρώντας τη μέγιστη δύναμη που απαιτείται για να προκληθεί αστοχία της ράβδου με το εμβαδόν της (κυκλικής) διατομής προσδιορίζουμε την εφελκυστική αντοχή του υλικού. Ενδεικτικές τιμές εφελκυστικής αντοχής για κοινά υλικά είναι π.χ. 650 MPa για τον χάλυβα οπλισμού σκυροδέματος, 3 MPa για το σκυρόδεμα, 30 MPa για το ξύλο.



(α)



(β)

Σχ. 1.16 (α) Μηχανή εφελκυσμού και (β) δοκίμια χάλυβα πριν τη φόρτιση και μετά την αστοχία.

Στις περιπτώσεις που η καταπόνηση ενός δομικού στοιχείου είναι **επαναλαμβανόμενη**, ώστε το υλικό να φορτίζεται, να αποφορτίζεται, να επαναφορτίζεται, να αποφορτίζεται εκ νέου κ.ο.κ. (π.χ. το σκυρόδεμα στα υποστυλώματα ενός κτιρίου κατά τη διάρκεια ενός σεισμού, ο χάλυβας στα “καλώδια” ανάρτησης του καταστρώματος μιας γέφυρας λόγω κυκλοφορίας οχημάτων), μας ενδιαφέρει η αντοχή του υλικού για τον συγκεκριμένο τρόπο φόρτισης, ο οποίος ονομάζεται **κόπωση**.

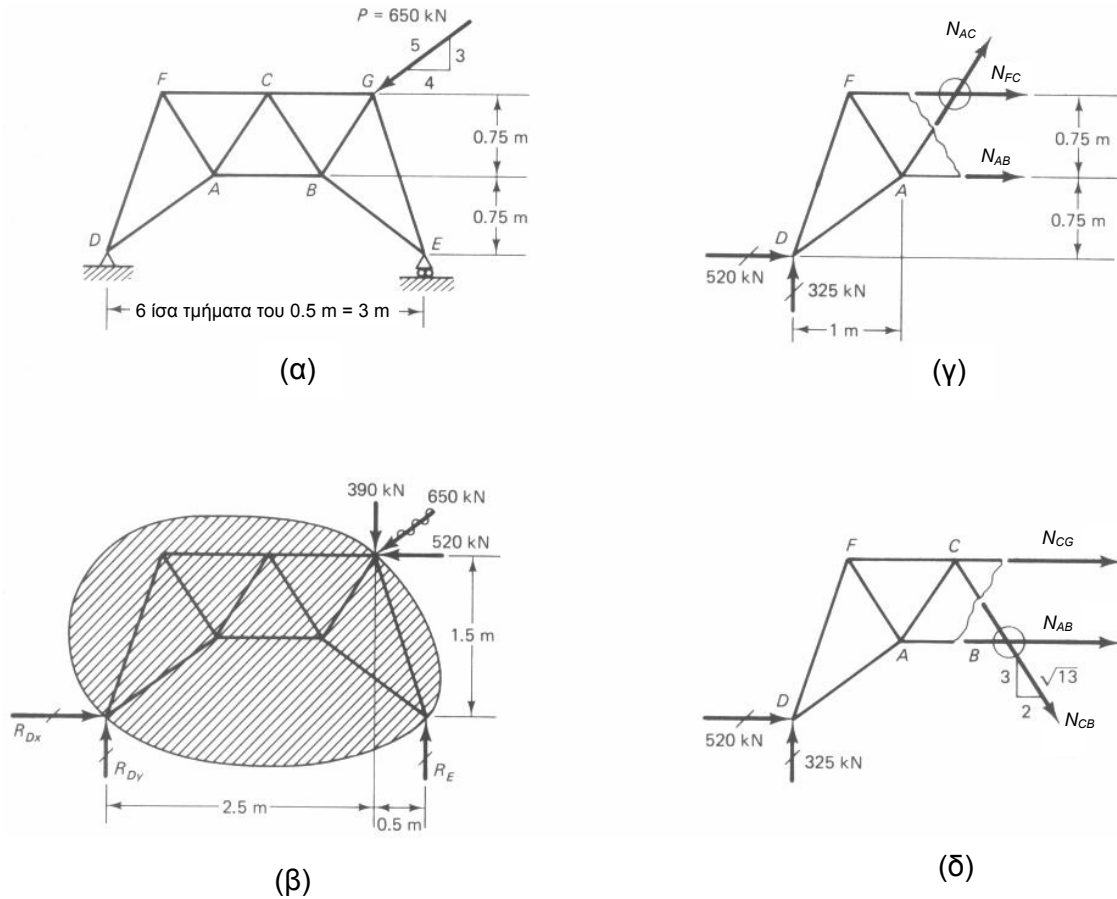
Οι δυνάμεις που ασκούνται στα δομικά στοιχεία αλλά και οι αντοχές των υλικών αποτελούν παραμέτρους που δύσκολα προσδιορίζονται επακριβώς και γενικά χαρακτηρίζονται από σημαντική αβεβαιότητα. Η αβεβαιότητα αυτή μπορεί να ληφθεί υπόψη είτε βάσει του λεγόμενου **προσδιορισμικού σχεδιασμού** (deterministic design), που κυριαρχούσε στη μελέτη δομικών έργων μέχρι πριν από μερικές δεκαετίες, είτε βάσει του λεγόμενου **πιθανοτικού σχεδιασμού** (probabilistic design), που υιοθετείται στη μελέτη των κατασκευών σήμερα. Η λεπτομερής παρουσίαση των δύο αυτών προσεγγίσεων του προβλήματος ξεφεύγει βεβαίως από τον στόχο του παρόντος συγγράμματος, αλλά για λόγους πληρότητας στις ακόλουθες δύο ενότητες θα παρουσιάσουμε τη βασική φιλοσοφία της κάθε μιας με τον απλούστερο δυνατό τρόπο.

1.7.2 Προσδιορισμικός σχεδιασμός αξονικά καταπονούμενων στοιχείων

Ο προσδιορισμικός σχεδιασμός ενός αξονικά φορτιζόμενου στοιχείου γίνεται υπολογίζοντας αρχικά την εσωτερική αξονική δύναμη N και ακολούθως την μέγιστη ορθή τάση, σ_{\max} , διαιρώντας την N με την ελάχιστη δυνατή διατομή (για στοιχεία μεταβλητής διατομής). Η τάση αυτή συγκρίνεται με την λεγόμενη **επιτρεπόμενη τάση** για το υλικό, $\sigma_{\epsilon\pi}$, η οποία στην πραγματικότητα αποτελεί μία εξαιρετικά συντηρητική προσέγγιση της αντοχής του υλικού. Ο λόγος της αντοχής του υλικού προς την επιτρεπόμενη τάση ονομάζεται **συντελεστής ασφάλειας** ($\Sigma.A.$). Αν $\sigma_{\max} < \sigma_{\epsilon\pi}$ ο σχεδιασμός του μέλους θεωρείται αποδεκτός, ενώ για $\sigma_{\max} \geq \sigma_{\epsilon\pi}$ θεωρείται ότι έχει επέλθει αστοχία.

Παράδειγμα 1.3

Για το δικτύωμα του Σχ. 1.17α να επιλεγούν οι ράβδοι FC και CB (δηλαδή να υπολογιστεί το απαιτούμενο εμβαδόν διατομής για την κάθε μία, A_{FC} και A_{CB}) θεωρώντας την επιτρεπόμενη ορθή τάση στο υλικό των ράβδων ίση με 140 MPa (ισοδύναμα θα μπορούσε να δίνεται η αντοχή του υλικού, έστω 280 MPa, και ο συντελεστής ασφάλειας, έστω 2).



Σχ. 1.17 Σχεδιασμός μελών δικτυώματος.

Αν ζητούμενο του προβλήματος ήταν ο σχεδιασμός όλων των ράβδων του δικτυώματος (δηλαδή η επιλογή της κατάλληλης διατομής για κάθε μία από αυτές), θα έπρεπε να γίνει πρώτα η **στατική επίλυση** του φορέα, δηλαδή ο προσδιορισμός των αξονικών δυνάμεων σε κάθε ράβδο (π.χ. με την μέθοδο των κόμβων). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου ενδιαφέρει ο σχεδιασμός μικρού αριθμού ράβδων, μπορεί να εφαρμοσθεί για συντομία η μέθοδος των τομών. Αρχικά προσδιορίζονται οι αντιδράσεις (Σχ. 1.17β), βάσει ισορροπίας δυνάμεων και ροπών:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Dx} - 520 = 0 \Rightarrow R_{Dx} = 520 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow R_{Dy} \times 3 - 390 \times 0.5 - 520 \times 1.5 = 0 \Rightarrow R_{Dy} = 325 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -R_E \times 3 - 520 \times 1.5 + 390 \times 2.5 = 0 \Rightarrow R_E = 65 \text{ kN}$$

[Επαλήθευση: $\sum F_y = 325 - 390 + 65 = 0$]

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του Σχ. 1.17γ είναι:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N_{FC} \times 0.75 + 325 \times 1 - 520 \times 0.75 = 0 \Rightarrow N_{FC} = +86.7 \text{ kN}$$

$$A_{FC} = N_{FC} / \sigma_{\varepsilon\pi} = 86.7 \times 10^3 / 140 = 620 \text{ mm}^2$$

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του Σχ. 1.17δ είναι:

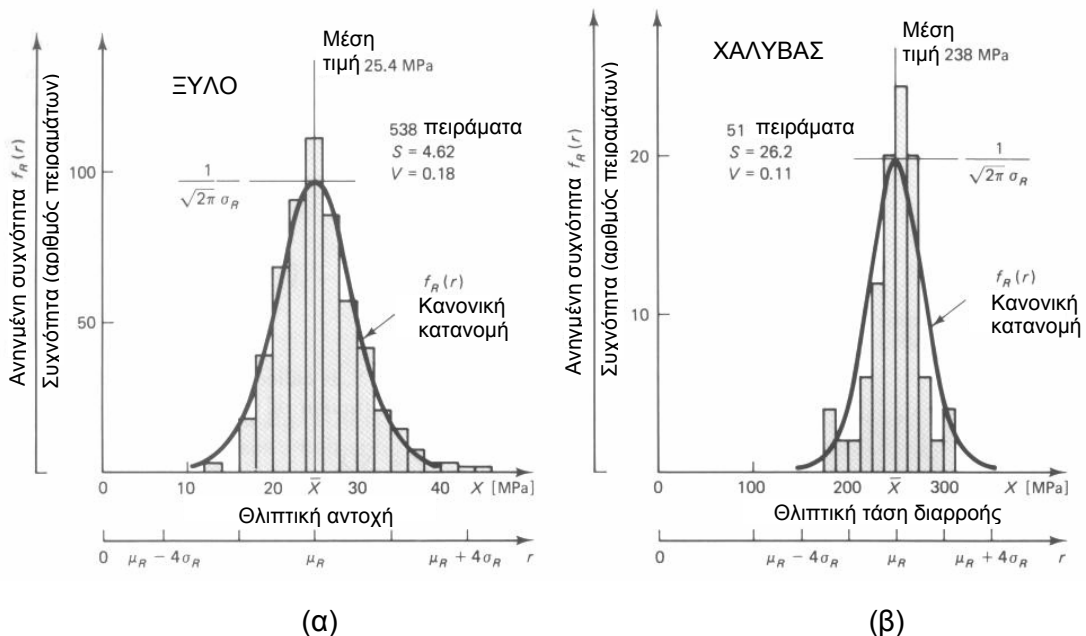
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -(N_{CB})_y + 325 = 0 \Rightarrow (N_{CB})_y = +325 \text{ kN}$$

$$N_{CB} = \sqrt{13}(N_{CB})_y / 3 = +391 \text{ kN}$$

$$A_{CB} = N_{CB} / \sigma_{\varepsilon\pi} = 391 \times 10^3 / 140 = 2790 \text{ mm}^2$$

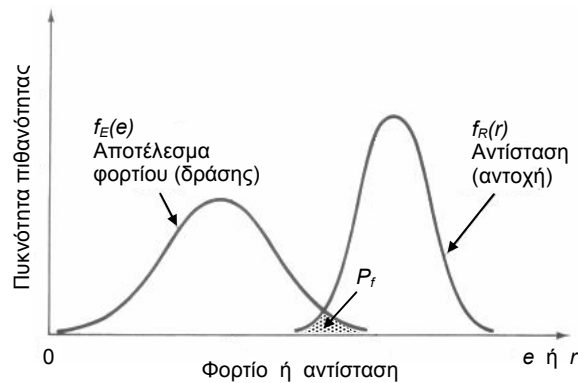
1.7.3 Πιθανοτικός σχεδιασμός

Για να γίνουν κατανοητές οι βασικές αρχές του πιθανοτικού σχεδιασμού, θεωρούμε ως παράδειγμα τα πειραματικά αποτελέσματα για τη θλιπτική αντοχή δύο διαφορετικών υλικών, του ξύλου και του χάλυβα, όπως δίνονται στο Σχ. 1.18. Το πλάτος κάθε “ράβδου” στα ιστογράμματα αντιστοιχεί σε ένα μικρό εύρος αντοχής ενός “πληθυσμού” 538 συνολικά δοκιμών ξύλου και 51 δοκιμών χάλυβα, ενώ οι εσωτερικοί κατακόρυφοι άξονες του Σχ. 1.18 δίνουν τον αριθμό δοκιμών για κάθε εύρος αντοχής. Για κάθε υλικό θεωρούμε ότι οι πειραματικά μετρημένες τιμές αντοχής έχουν μέση τιμή \bar{X} , τυπική απόκλιση S και διασπορά $V = S / \bar{X}$.



Σχ. 1.18 Ιστογράμματα θλιπτικής αντοχής (α) για ξύλο και (β) για χάλυβα.

Ακολούθως, θεωρώντας ότι η θλιπτική αντοχή κάθε υλικού αποτελεί τυχαία μεταβλητή (έστω με σύμβολο R , από τον όρο *resistance*) με **κανονική πιθανοτική κατανομή** (κατανομή Gauss), κάτι που ισχύει με καλή προσέγγιση για τις αντοχές των περισσότερων υλικών, τα πραγματικά ιστογράμματα αντικαθίστανται από καμπύλες, γνωστές από την Θεωρία Πιθανοτήτων ως **συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας**, $f_R(r)$. Ουσιαστικά, κάθε τέτοια καμπύλη δίνει την “πιθανότητα να λάβει η αντοχή του υλικού συγκεκριμένη τιμή”. Αυτό που έχει ενδιαφέρον να επισημάνουμε, συγκρίνοντας τα Σχ. 1.18α και 1.18β, είναι ότι οι καμπύλες για τα δύο υλικά έχουν την ίδια μορφή αλλά διαφορετικά χαρακτηριστικά μεγέθη, δηλαδή διαφορετική μέση τιμή μ_R και τυπική απόκλιση σ_R .



Σχ. 1.19 Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για τις δύο τυχαίες μεταβλητές (φορτίο και αντίσταση, ή τάση και αντοχή).

Αν εκτός από την αντοχή κάθε υλικού θεωρήσουμε ότι και τα εξωτερικά φορτία (οι **δράσεις**) είναι τυχαίες μεταβλητές (ακόμα και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διατομών, π.χ. το εμβαδόν της επιφάνειας, είναι τυχαίες μεταβλητές), το **αποτέλεσμα των δράσεων** αυτών, δηλαδή π.χ. η ορθή τάση σε ένα αξονικά φορτιζόμενο στοιχείο, θα είναι και αυτό μία τυχαία μεταβλητή (με σύμβολο E), με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_E(e)$. Παραθέτοντας τις δύο καμπύλες πυκνότητας πιθανότητας, $f_R(r)$ και $f_E(e)$, στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 1.19) και με βάση την θεώρηση ότι “το υλικό αστοχεί αν η τάση ξεπεράσει την αντοχή”, βλέπουμε ότι η περιοχή τομής των δύο συναρτήσεων (σκιασμένο τμήμα στο Σχ. 1.19) δίνει την **πιθανότητα αστοχίας** (P_f) του δομικού στοιχείου για την συγκεκριμένη καταπόνηση. Έτσι λοιπόν γίνεται σαφές ότι όχι μόνο η μέση τιμή της αντοχής ενός υλικού αλλά, γενικότερα, η μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για την αντοχή αυτή παίζει καθοριστικό ρόλο για τον σχεδιασμό του δομικού στοιχείου. Στον πιθανοτικό σχεδιασμό η διαστασιολόγηση των δομικών

στοιχείων γίνεται έτσι ώστε να **πιθανότητα αστοχίας**, P_f , να **λαμβάνει συγκεκριμένη τιμή**.