Λύση 1ης άσκησης (1): $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i\right) i^3$

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i\right) i^3 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i\right) i^2 i = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i\right) (-i) =$$
$$= -\frac{3}{4}i + \frac{1}{2}i^2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i\,.$$

Λύση 1ης άσκησης (2): $z = \frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-i} + \frac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}+i}$

$$z = \frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-i} + \frac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}+i} = \frac{\left(\sqrt{5}+i\right)^2 + \left(\sqrt{5}-i\right)^2}{\left(\sqrt{5}-i\right)\left(\sqrt{5}+i\right)} =$$

$$= \frac{5+i^2+2\sqrt{5}\,i+5+i^2-2\sqrt{5}\,i}{5+1} = \frac{10-2}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} + 0i\,.$$

Λύση 2ης άσκησης (1): $z = \frac{\sqrt{3}}{1+i\sqrt{2}}$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{1+i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(1-i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{6}}{1-i\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i^2(\sqrt{2})^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{6}}{1+2} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}i.$$

άρα το μέτρο του θα είναι,

$$|z| = \left|\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}+\frac{6}{9}} = 1.$$

ή

$$|z| = \left|\frac{\sqrt{3}}{1+i\sqrt{2}}\right| = \frac{|\sqrt{3}|}{|1+i\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1\,.$$

Λύση 2ης άσκησης (2): $z = 1 - \cos x + i \sin x$

$$\begin{aligned} |z| &= |(1-\cos x) + i\sin x| = \sqrt{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x} = \\ &= \sqrt{1 - 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{2 - 2\cos x} \qquad (1) \end{aligned}$$

όμως $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, οπότε

$$(1) = \sqrt{2 - 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)} = \sqrt{4\sin^2 \frac{x}{2}} = 2\left|\sin \frac{x}{2}\right| .$$

Λύση 3ης άσκησης: $z_1 = \dfrac{3z}{1+|z|^2}$ και $z_2 = \dfrac{3\overline{z}}{1+|z|^2}$

Αν $z = a + bi$, θα έχουμε,

$$z_1 = \frac{3z}{1+|z|^2} = \frac{3(a+bi)}{1+\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} = \frac{3a+3bi}{1+a^2+b^2} = \frac{3a}{1+a^2+b^2} + \frac{3b}{1+a^2+b^2}i$$

ομοίως

$$z_2 = \frac{3\overline{z}}{1+|z|^2} = \frac{3(a-bi)}{1+\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} = \frac{3a}{1+a^2+b^2} - \frac{3b}{1+a^2+b^2}i \text{ άρα } \overline{z}_1 = z_2.$$

ή

$$z_1 = \frac{3z}{1+|z|^2} = \frac{3z}{1+z\overline{z}} \Rightarrow \overline{z}_1 = \left(\overline{\frac{3z}{1+z\overline{z}}}\right) = \frac{\overline{3z}}{\overline{1+z\overline{z}}} = \frac{3\overline{z}}{1+\overline{z}\,\overline{\overline{z}}} =$$

$$= \frac{3\overline{z}}{1+\overline{z}\,z} = \frac{3\overline{z}}{1+|z|^2} = z_2\,.$$

Λύση 4ης άσκησης: $(a+bi)^2 = \dfrac{1+7i}{1-i}$

Έχουμε,

$$
\begin{aligned}
&(a+bi)^2 = \frac{1+7i}{1-i} \Leftrightarrow a^2 + 2ab\,i - b^2 = \frac{(1+7i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Leftrightarrow \\
&(a^2-b^2) + 2ab\,i = \frac{1+i+7i-7}{2} \Leftrightarrow \\
&(a^2-b^2) + 2ab\,i = \frac{1-7}{2} + \frac{1+7}{2} i \Leftrightarrow \\
&(a^2-b^2) + 2ab\,i = -3+4i
\end{aligned}
$$

Για να ισχύει η πιο πάνω ισότητα θα πρέπει:

$$
\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ a = \dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{b^2} - b^2 = -3 \\ a = \dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow
$$

Λύση 4ης άσκησης: $(a+bi)^2 = \dfrac{1+7i}{1-i}$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{b^2} - b^2 = -3 \\ a = \dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 3b^2 - 4 = 0 \\ a = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση, ως διτετράγωνη, έχει ρίζες $b^2 = 4$ και $b^2 = -1$.Απορρίπτουμε την δεύτερη (αφού ζητάμε πραγματικούς a και b) οπότε,

$$\begin{cases} b^2 = 4 \\ a = \dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm 2 \\ a = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a = 1 \\ b = 2 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} a = -1 \\ b = -2 \end{pmatrix} \right. .$$

Απορρίπτουμε τις ετερόσημες λύσεις αφού $ab = 2 > 0$.

Λύση 10ης άσκησης (1): $x^2 - 2x + 5 = 0$

Ως δευτεροβάθμια πολυωνυμική εξίσωση οι λύσεις της δίνονται από τη σχέση:

$$\rho_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες μιγαδικές συζυγείς:

$$\rho_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{2}{2} + \dfrac{4i}{2} = 1 + 2i \\[2ex] \dfrac{2}{2} - \dfrac{4i}{2} = 1 - 2i\,. \end{cases}$$