# Ορισμός

## Ορισμός Μιγαδικού Αριθμού

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ στο οποίο:

- Κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ είναι της μορφής $\mathbf{a} + \mathbf{bi}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.
- Το στοιχείο $i$ ονομάζεται φανταστική μονάδα και ορίζεται από τη σχέση $\mathbf{i^2} = -\mathbf{1}$.

- Άρα σύμφωνα με τον ορισμό κάθε μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ είναι σύνθεση δύο αριθμών:

$$z = a + bi \begin{cases} a & \text{πραγματικός αριθμός} \\ bi & \text{φανταστικός αριθμός.} \end{cases}$$

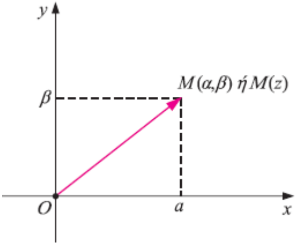
- Έστω ότι έχουμε τον μιγαδικό αριθμό $a + bi$.Τότε ο $a$ θα λέγεται **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού $z$ και θα συμβολίζεται με **Re**(**z**), ενώ ο $b$ θα λέγεται **φανταστικό μέρος** του $z$ και θα συμβολίζεται με **Im**(**z**).

# Μιγαδικοί αριθμοί

- Ένας μιγαδικός αριθμός $a + bi$ συμβολίζεται και με τη μορφή διατεταγμένου ζεύγους $(a, b)$.

Παραδείγματα μιγαδικών αριθμών: $3 + 5i$, $2 - 4i$, $-1 + 12i$, $2 + 0i$ (πραγματικός αριθμός), $0 + 6i$ (φανταστικός αριθμός).

Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών αριθμών.
Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο με ένα σημείο $M(a, b)$ ή $M(z)$.




- Το σημείο $M$ λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού $a + bi$.
- Το καρτεσιανό επίπεδο $xOy$ ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο**.
- Ο άξονας $xx'$ λέγεται **πραγματικός άξονας**, ενώ ο $yy'$ **φανταστικός άξονας**.
- Ο $z = a + bi$ παριστάνεται επίσης και από την διανυσματική ακτίνα $OM$.

**Ισότητα και πράξεις μεταξύ μιγαδικών.**

- Δύο μιγαδικοί αριθμοί $a + bi$ και $c + di$ είναι ίσοι αν και μόνο αν $a = c$ και $b = d$.

$$\boxed{a + bi = c + di \iff a = c \quad \text{και} \quad b = d}$$

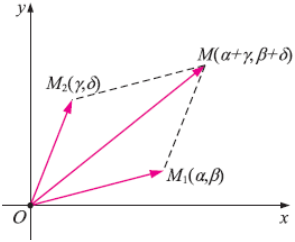
- Αν $a + bi = 0$ τότε,

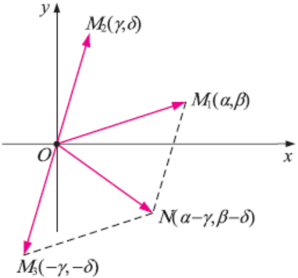
$$\boxed{a + bi = 0 \iff a = 0 \quad \text{και} \quad b = 0}$$

- Πρόσθεση και αφαίρεση μιγαδικών.

$$\boxed{(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i}$$

# Μιγαδικοί αριθμοί




- Αν $M_1(\alpha, \beta)$ και $M_2(\gamma, \delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το **άθροισμα** παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$. Δηλαδή $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.

- Αντί να κάνουμε την αφαίρεση $M_1 - M_2$ προσθέτουμε τα $M_1 + (-M_2)$ οπότε η **διαφορά** παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha - \gamma, \beta - \delta)$. Δηλαδή $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$.

# Μιγαδικοί αριθμοί

► Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών αριθμών $a+bi$ και $c+di$ έχουμε:

$$(a+bi)(c+di) = a(c+di) + bi(c+di) = ac + adi + bci + (bi)(di) =$$
$$= ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Άρα $\boxed{(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i}$

Παρατήρηση:
Αν πολλαπλασιάσουμε τους $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$.
Ο αριθμός $a-bi$ λέγεται **συζυγής** του $a+bi$ και συμβολίζεται με $\overline{a+bi}$.

Δηλαδή $\boxed{\overline{a+bi} = a - bi}$

Επειδή και $\overline{a-bi} = a+bi$ οι $a+bi$, $a-bi$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

# Μιγαδικοί αριθμοί

- Το **πηλίκο** δύο μιγαδικών αριθμών $\dfrac{a+bi}{c+di}$, όταν $c+di \neq 0$, μπορούμε να το εκφράσουμε με ένα νέο μιγαδικό αφού πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή με τον συζυγή του παρανομαστή έχουμε:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \\ = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Άρα $$\boxed{\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$$

## Μιγαδικοί αριθμοί

► Οι **δυνάμεις** στους μιγαδικούς ορίζονται όπως και στους πραγματικούς. Δηλαδή:

$z^1 = z, \quad z^2 = z \cdot z, \ldots, \quad z^n = z^{n-1} \cdot z$ με $n$ ακέραιο θετικό και $n > 1$.

Αν $z \neq 0$ τότε ορίζουμε,

$$z^0 = 1, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n} \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } n.$$

Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις της φανταστικής μονάδας $i$ ισχύει:

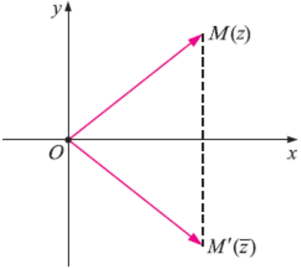
$$\boxed{i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i.}$$

Αν συνεχίστε να υπολογίζεται δυνάμεις του $i$ παρατηρείστε ότι τα αποτελέσματα επαναλαμβάνονται, δηλαδή: $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$ κ.λ.π.

# Μιγαδικοί αριθμοί

- **Ιδιότητες συζυγών $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$.**

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι συμμετρικές ως προς τον πραγματικό άξονα.




- Χωρίς απόδειξη θα χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες:

1. $z + \bar{z} = 2a$
2. $z - \bar{z} = 2bi$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ , $z_2 \neq 0$
6. $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ .

## Ασκήσεις

- Να γραφτεί ο μιγαδικός $z = (3+4i)i + i(1+i)$ στη μορφή $a+bi$.

  Λύση:

$$z = (3+4i)i + i(1+i) = 3i + 4i^2 + i + i^2 = 4i - 4 - 1 = \; -5 + 4i\,.$$

- Να γραφεί ο μιγαδικός αριθμός $\dfrac{1}{1+i}$ στη μορφή $a+bi$.

  Λύση:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) i\,.$$

- Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί $x$ και $y$, ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = (x+2y) - xi$, $z_2 = 1 + (2x-y)i$ να είναι συζυγείς.

  Λύση:

Πρέπει να ισχύει: $\left\{ \begin{array}{l} x+2y=1 \\ -x = -(2x-y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y=1 \\ x=y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1/3 \\ y=1/3\,. \end{array} \right.$

# Ασκήσεις

- Να γραφεί στη μορφή $a + bi$ ο αριθμός $z = 2i^3 + 3i^{13} + 4i^{37}$.
  Λύση:

Φτιάχνουμε δυνάμεις του $i^2$ αφού ξέρουμε ότι $i^2 = -1$.

$$
\begin{aligned}
z &= 2i^2 i + 3\left(i^2\right)^6 i + 4\left(i^2\right)^{18} i = 2(-1)i + 3(-1)^6 i + 4(-1)^{18} i = \\
&= -2i + 3i + 4i = 0 + 5i\,.
\end{aligned}
$$

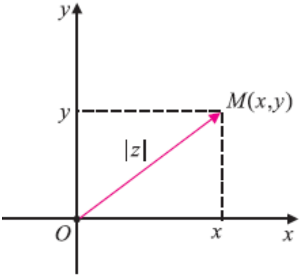
- Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + x + 1 = 0$.
  Λύση:

Από τον τύπο που δίνει τις ρίζες σε δευτεροβάθμια πολυωνυμική εξίσωση θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\rho_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)3}}{2} = \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{i^2\,3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad (\text{συζυγείς})\,.
\end{aligned}
$$

# Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο.




Ορίζουμε ως **μέτρο** ή **απόλυτη τιμή** ενός μιγαδικού $z$, και το συμβολίζουμε με $|z|$, την απόσταση του $M$ από την αρχή $O$, δηλαδή,

$$\boxed{|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Για παράδειγμα:

$$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

- Το μέτρο ενός μιγαδικού είναι μη αρνητικός αριθμός για κάθε $x$, $y \in \mathbb{R}$.

## Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Αν $z = x + yi$ τότε $\overline{z} = x - yi$ και $-z = -x - yi$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ιδιότητες,

$$\boxed{\begin{gathered} |z| = |\overline{z}| = |-z| \\ |z|^2 = z \cdot \overline{z} \\ |z^n| = |z|^n \end{gathered}}$$

Επίσης αν $z_1$ και $z_2$ δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε,

$$\boxed{\begin{gathered} |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{gathered}}$$

# Άσκηση

Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = \dfrac{\left(\sqrt{2}+i\right)^2}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^2 i}$.

Λύση:

Από τις ιδιότητες έχουμε

$$
\begin{aligned}
|z| &= \left|\frac{\left(\sqrt{2}+i\right)^2}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^2 i}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{2}+i\right)^2\right|}{\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)^2 i\right|} = \frac{\left|\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)\right|}{\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)^2\right| |i|} = \\
&= \frac{\left|\left(\sqrt{2}+i\right)\right| \left|\left(\sqrt{2}+i\right)\right|}{\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)^2\right| |i|} = \frac{\left|\sqrt{2}+i\right|^2}{\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)^2\right| |i|} = \frac{\left|\sqrt{2}+i\right|^2}{\left|1-i\sqrt{3}\right|^2 |i|} = \\
&= \frac{\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}\right)^2}{\left(\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)^2 \sqrt{0^2+1^2}} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{4}\right)^2 1} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$