Διαφορικό

Ορισμός Διαφορικού

Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$. Το γινόμενο $f'(x) \cdot \Delta x$ θα το ονομάζουμε **Διαφορικό** της συνάρτησης και θα το συμβολίζουμε με dy, δηλαδή

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \tag{1}$$

όπου Δx μικρή μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

Ειδικά για την ανεξάρτητη μεταβλητή x, από τον ορισμό (1), θα έχουμε ότι το διαφορικό της είναι

$$dx = f'(x) \cdot \Delta x = x' \cdot \Delta x = \Delta x$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε για κάθε συνάρτηση $y = f(x)$

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Διαφορικό

Παρατήρηση:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Παρατηρήστε από την παραπάνω σχέση ότι η μεταβολή dy είναι εξαρτημένη τόσο από το x όσο και από το dx (Δx).

Διαφορικό

Παράδειγμα: Να βρεθεί το διαφορικό της συνάρτησης $y = x^3$.

Σύμφωνα με τον ορισμό θα έχουμε,

$$dy = f'(x) \cdot dx = \left(x^3\right)' \cdot dx \Rightarrow dy = 3x^2 \cdot dx$$

Υπολογισμός Διαφορικού

Από τη σχέση

$$dy = f'(x)\,dx$$

είναι φανερό ότι διαφόριση, ουσιαστικά, σημαίνει παραγώγιση.

Κανόνες διαφόρισης

$$\begin{aligned}
dc &= 0\\
dx &= \Delta x\\
d(c\cdot f) &= c\cdot df\\
d(f\pm g) &= df \pm dg\\
d(f\cdot g) &= df\cdot g + f\cdot dg\\
d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\cdot df - f\cdot dg}{g^2}\,, g\neq 0\\
df(g) &= f'(g)\cdot dg\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Ορισμός Παραγοντικού

Ορισμός

Θα ονομάζουμε παραγοντικό ενός φυσικού αριθμού k και θα το συμβολίζουμε $k!$ το γινόμενο

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$$

Ορίζουμε επίσης ως

$$0! = 1$$

Έτσι για παράδειγμα

$$\begin{aligned} 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\ 12! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 11 \cdot 12 = 479001600 \end{aligned}$$

Ορισμός Παραγοντικού

Παρατήρηση:

$$
\begin{aligned}
4! &= \frac{5!}{5} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{5} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24\\
3! &= \frac{4!}{4} = 6\\
2! &= \frac{3!}{3} = 2\\
1! &= \frac{2!}{2} = 1\\
0! &= \frac{1!}{1} = 1
\end{aligned}
$$

Ορισμός Παραγοντικού

- Υπάρχει παραγοντικό μη ακεραίου θετικού αριθμού;
  Δηλαδή υπάρχει $\left(\frac{1}{2}!\right)$;
- Υπάρχει και ισούται με,

$$k! = \Gamma(k+1)$$

όπου με το Ελληνικό γράμμα Γ συμβολίζουμε την συνάρτηση Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt\,.$$

Άρα αν ζητάμε το $\left(\frac{1}{2}!\right)$ θα έχουμε

$$\frac{1}{2}! = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \int_0^\infty t^{\left(\frac{1}{2}+1\right)-1} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

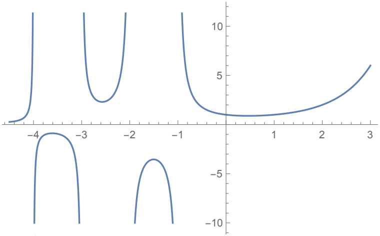
Ορισμός Παραγοντικού

Επίσης αν ζητάμε το $\left(-\frac{1}{2}\right)!$ θα έχουμε

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \int_0^{\infty} t^{\left(-\frac{1}{2}+1\right)-1} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}$$

Ή αν θέλουμε το παραγοντικό μιγαδικού αριθμού

$$(3+5i)! = \Gamma\left(3+5i+1\right) = \int_0^{\infty} t^{(3+5i+1)-1} e^{-t} dt \simeq 0.149655 + 0.314603i$$



Γραφική παράσταση της συνάρτησης του παραγοντικού ορισμένη για κάθε πραγματικό αριθμό (εκτός τους ακεραίους αρνητικούς).

Ανάπτυγμα Taylor.

Θεώρημα

Αν η f έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το a, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n και για κάθε x στο εν λόγω διάστημα θα ισχύει

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + R_{n+1}\,,$$

όπου R_{n+1} λέγεται υπόλοιπο Lagrange και ισούται με

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,,$$

για κάποιο c_{n+1} στο διάστημα (a, x).

Ανάπτυγμα Taylor.

Παρατήρηση:

Αν στο τύπο του Taylor αντικαταστήσουμε το a με μηδέν τότε προκύπτει η σχέση:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

με το c σημείο μεταξύ του 0 και του x. Ο τύπος αυτός λέγεται τύπος του Maclaurin.

Άσκηση: Να δοθεί το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το μηδέν της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, μέχρι όρους 8ης τάξης.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

$$f(x) = \cos x = \cos(0) + x\left[\cos(x)'\right]_{x=0} + \frac{x^2}{2}\left[\cos(x)''\right]_{x=0} + \cdots +$$

$$+\frac{x^8}{8!}\left[\cos(x)^{(8)}\right]_{x=0} = \cos(0) + x\left[-\sin(x)\right]_{x=0} + \frac{x^2}{2}\left[-\cos(x)\right]_{x=0} + \cdots +$$

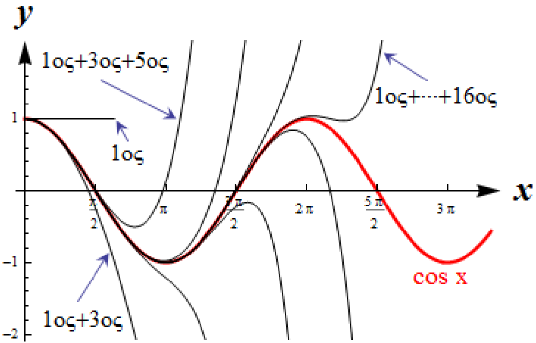
$$+\frac{x^8}{8!}\left[\cos(x)\right]_{x=0} = 1 + x(0) + \frac{x^2}{2}(-1) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(1) + \cdots + \frac{x^8}{8!}(1) \Rightarrow$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}.$$

π.χ. $\cos[0.3] = 1 - \frac{(0.3)^2}{2} + \frac{(0.3)^4}{4!} - \frac{(0.3)^6}{6!} + \frac{(0.3)^8}{8!} = 0.955336$

Γεωμετρική εικόνα του αναπτύγματος $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{16}}{16!} + \cdots$$



Άσκηση: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ με χρήση σειράς Maclaurin.

Σημειώνουμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $\int e^{-x^2} dx$ δεν μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις.
Γνωρίζουμε ότι

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad \forall x \in \Re$$

Αντικαθιστούμε το x με $-x^2$ και η σειρά γίνεται

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 + \frac{-x^2}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots \end{aligned}$$

Άρα το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί

Άσκηση:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots\right) dx$$
$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots$$

και αν κρατήσουμε τους 4 πρώτους όρους από την παραπάνω σχέση θα έχουμε την αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq 0.74$$

Άσκηση: Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ με χρήση της σειράς Maclaurin.

Γνωρίζουμε ότι

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad \forall x \in \Re$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$