Λύση 1ης άσκησης: $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{1/5}\right) = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{5}x^{-4/5} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}} + \frac{1}{5x^{4/5}} = \frac{5}{15x^{2/3}} + \frac{3}{15x^{4/5}} = \frac{5}{15x^{10/15}} + \frac{3}{15x^{12/15}} \\ &= \frac{5x^{2/15}}{15x^{10/15}x^{2/15}} + \frac{3}{15x^{12/15}} = \frac{5x^{2/15}}{15x^{12/15}} + \frac{3}{15x^{12/15}} = \frac{5x^{2/15}+3}{15x^{4/5}}. \end{aligned}$$

Λύση 2ης άσκησης: $y = \sin(x^3 + x)$

Θέτουμε $z = x^3 + x$ οπότε η y είναι σύνθετη συνάρτηση και γίνεται $y = sinz$. Παραγωγίζουμε ως προς x και έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d(\sin z)}{dz} \cdot \frac{d\left(x^3 + x\right)}{dx} = \cos z \cdot \left(3x^2 + 1\right) =$$

και αν αντικαταστήσουμε και το z θα έχουμε τελικά τη ζητούμενη παράγωγο

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1).$$

Λύση 3ης άσκησης: $y = \frac{e^x}{x^2}$

Υπολογίζουμε πρώτα την πρώτη παράγωγο:

$$y = \frac{e^x}{x^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(e^x\right)x^2 - e^x \frac{d}{dx}\left(x^2\right)}{x^4} = \frac{e^x x^2 - e^x 2x}{x^4}$$
$$= \frac{e^x(x-2)}{x^3}.$$

Άρα η ζητούμενη δεύτερη παράγωγος θα είναι:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x(x-2)}{x^3}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[e^x(x-2)]x^3 - e^x(x-2)\frac{d}{dx}(x^3)}{x^6}$$
$$= \frac{[e^x(x-2) + e^x]x^3 - e^x(x-2)3x^2}{x^6}$$
$$= \frac{e^x x(x-2) + e^x x - 3e^x(x-2)}{x^4}$$
$$= \frac{e^x(x^2 - 2x + x - 3x + 6)}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4}.$$

Λύση 4ης άσκησης: $3\left(x^2+y^2\right)^2 = 100xy$

Χρειαζόμαστε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ οπότε

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[3\left(x^2+y^2\right)^2\right] &= \frac{d}{dx}[100xy] \\
(2)3\left(x^2+y^2\right)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right) &= 100\left[(1)y+x\frac{dy}{dx}\right] \\
12x\left(x^2+y^2\right)+12y\left(x^2+y^2\right)\frac{dy}{dx} &= 100y+100x\frac{dy}{dx} \\
12y\left(x^2+y^2\right)\frac{dy}{dx}-100x\frac{dy}{dx} &= 100y-12x\left(x^2+y^2\right) \\
\left[12y\left(x^2+y^2\right)-100x\right]\frac{dy}{dx} &= 100y-12x\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow \\
\frac{dy}{dx} = \frac{100y-12x\left(x^2+y^2\right)}{-100x+12y\left(x^2+y^2\right)} &= \frac{25y-3x\left(x^2+y^2\right)}{-25x+3y\left(x^2+y^2\right)}
\end{aligned}
$$

Λύση 4ης άσκησης

Άρα η κλίση της καμπύλης στο σημείο $(3,1)$ είναι:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25(1) - 3(3)\left(3^2+1^2\right)}{-25(3)+3(1)\left(3^2+1^2\right)} = \frac{25-90}{-75+30} = \frac{-65}{-45} = \frac{13}{9}$$

Λύση 5ης άσκησης: $x^2 + y^2 = 25$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη ως προς x οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2y\frac{dy}{dx} &= -2x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

και στο σημείο $(-3, 4)$ η πρώτη παράγωγος θα είναι: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{-3}{4} = \dfrac{3}{4}$.
Ξανά παραγωγίζουμε την πρώτη παράγωγο πάλι ως προς x οπότε θα προκύψει:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{(1)y - (x)(dy/dx)}{y^2}$$

Αντικαθιστούμε την dy/dx και έχουμε:

Λύση 5ης άσκησης: $x^2 + y^2 = 25$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{(1)y - (x)(dy/dx)}{y^2} \\
&= -\frac{y - x(-x/y)}{y^2} \\
&= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} \\
&= -\frac{25}{y^3}.
\end{aligned}$$

Στο σημείο $(-3, 4)$ η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{25}{4^3} = -\frac{25}{64}.$$

Λύση 6ης άσκησης: $x^2\left(x^2+y^2\right)=y^2$

Κάνουμε τις πράξεις στην εξίσωση και παραγωγίζουμε με έμμεση παραγώγιση ως προς x οπότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x^4+x^2y^2-y^2 &= 0\\ 4x^3+2xy^2+x^2\left(2y\frac{dy}{dx}\right)-2y\frac{dy}{dx} &= 0\\ 2y\left(x^2-1\right)\frac{dy}{dx} &= -2x\left(2x^2+y^2\right)\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x\left(2x^2+y^2\right)}{y\left(1-x^2\right)}. \end{aligned}$$

Άρα στο σημείο $\left(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\right)$ η κλίση θα είναι:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\sqrt{2}/2)\left[2(1/2)+(1/2)\right]}{(\sqrt{2}/2)\left[1-(1/2)\right]}=\frac{3/2}{1/2}=3$$

και η εξίσωση της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο θα είναι:

Λύση 6ης άσκησης: $x^2\left(x^2+y^2\right)=y^2$

και η εξίσωση της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο θα είναι:

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=3\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$y=3x-\sqrt{2}.$$

Λύση 8ης άσκησης: i) $y = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}$

1) Πρώτα λογαριθμούμε:

$$\ln y = \ln x + 2\ln(1-x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

και κατόπιν με έμμεση παραγώγιση βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow \\
y' &= \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}\left[\frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right] \\
&= \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{4x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{x^2(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Λύση 8ης άσκησης: ii) $y = (3+2\sin x)^{\cos 3x}$

2) Πρώτα λογαριθμούμε και μετά παραγωγίζουμε:

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \cos 3x \ln(3+2\sin x) \Rightarrow \\
\frac{y'}{y} &= -\sin 3x \cdot 3 \cdot \ln(3+2\sin x) + \cos 3x \, \frac{(3+2\sin x)'}{3+2\sin x} \Rightarrow \\
\frac{y'}{y} &= -3\sin 3x \ln(3+2\sin x) + \cos 3x \, \frac{2\cos x}{3+2\sin x} \Rightarrow \\
y' &= -3y\sin 3x \ln(3+2\sin x) + y \cdot 2\cos x \cos 3x/(3+2\sin x) \Rightarrow \\
y' &= -3(3+2\sin x)^{\cos 3x} \sin 3x \ln(3+2\sin x) + \\
&\quad (3+2\sin x)^{\cos 3x} \cdot 2\cos x \cos 3x/(3+2\sin x) \\
&= -3(3+2\sin x)^{\cos 3x} \sin 3x \ln(3+2\sin x) + \\
&\quad (3+2\sin x)^{\cos 3x - 1} \cdot 2\cos x \cos 3x \\
&= (3+2\sin x)^{\cos 3x - 1} [-3(3+2\sin x) \sin 3x \ln(3+2\sin x) + \\
&\quad 2\cos x \cos 3x] = (3+2\sin x)^{\cos 3x - 1} [2\cos x \cos 3x - \\
&\quad 9\sin 3x \ln(3+2\sin x) - 6\sin x \ln(3+2\sin x) \sin 3x]
\end{aligned}
$$

Λύση 8ης άσκησης: iii) $y = x^3 e^{2x} \cos^2 x$

3) Πρώτα λογαριθμούμε,

$$\ln y = 3\ln x + 2x \ln e + 2\ln\cos x = 3\ln x + 2x + 2\ln\cos x$$

και μετά παραγωγίζουμε ως προς x,

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= 3\frac{1}{x} + 2 + 2\frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{3}{x} + 2 - \frac{2\sin x}{\cos x} \Rightarrow \\
y' &= y\left(\frac{3}{x} + 2 - \frac{2\sin x}{\cos x}\right) \Rightarrow \\
y' &= x^3 e^{2x}\cos^2 x\left(\frac{3}{x} + 2 - \frac{2\sin x}{\cos x}\right) = \\
&= x^2 e^{2x}\cos x(3\cos x + 2x\cos x - 2x\sin x)\,.
\end{aligned}$$

Λύση 9ης άσκησης: $x = \sqrt{t}$, $y = t - 1/\sqrt{t}$

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο (x_0, y_0):

$$y_0' = \frac{y - y_0}{x - x_0} \tag{1}$$

Όμως

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{2}$$

με

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}} \quad \text{και} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{άρα} \quad \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{t} + \frac{1}{t} \tag{3}$$

Για $t = 4$ είναι $x = 2$, $y = 7/2$ δηλαδή από (3) $dy/dx = 17/4$.
Άρα η ζητούμενη εξίσωση, λόγω της (1), θα είναι:

$$\frac{17}{4} = \frac{y - 7/2}{x - 2} \Rightarrow 17x - 4y = 20\,.$$