

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρωτεύοντα τόξα αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.		
Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού	Πεδίο τιμών
$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \operatorname{arccsc} x$	$x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 1$	$\pi/2 < y \leq \pi \quad \text{ή} \quad 0 < y < \pi/2$
$y = \operatorname{arcsec} x$	$x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 1$	$-\pi/2 \leq y < 0 \quad \text{ή} \quad 0 < y \leq \pi/2$
$y = \arctan x$	$-\infty < x < \infty$	$-\pi/2 < y < \pi/2$
$y = \operatorname{arccot} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$

Τριγωνομετρικές σχέσεις

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \tan^2 \theta + 1 &= \sec^2 \theta \\ \cot^2 \theta + 1 &= \csc^2 \theta. \end{aligned}$$

Αντίθετα τόξα:

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta, & \cos(-\theta) &= \cos \theta, & \tan(-\theta) &= -\tan \theta, \\ \cot(-\theta) &= -\cot \theta, & \sec(-\theta) &= \sec \theta, & \csc(-\theta) &= -\csc \theta. \end{aligned}$$

Συμπληρωματικά τόξα:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) &= \cos \theta, & \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) &= \mp \sin \theta, & \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) &= \mp \cot \theta, \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) &= \mp \tan \theta, & \sec\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) &= \mp \csc \theta, & \csc\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) &= \sec \theta. \end{aligned}$$

Παραπληρωματικά τόξα:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \theta) &= \sin \theta, & \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta, & \tan(\pi - \theta) &= -\tan \theta, \\ \cot(\pi - \theta) &= -\cot \theta, & \sec(\pi - \theta) &= -\sec \theta, & \csc(\pi - \theta) &= \csc \theta, \\ \sin(\pi + \theta) &= -\sin \theta, & \cos(\pi + \theta) &= -\cos \theta, & \tan(\pi + \theta) &= \tan \theta, \\ \cot(\pi + \theta) &= \cot \theta, & \sec(\pi + \theta) &= -\sec \theta, & \csc(\pi + \theta) &= -\csc \theta. \end{aligned}$$

Άθροισμα - διαφορά τόξων:

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}, \\ \cot(a \pm b) &= \frac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}. \end{aligned}$$

Απλά - διπλάσια τόξα:

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta, & \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1, \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, & \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, & \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}. \end{aligned}$$

Ημίτονο, συνημίτονο αλφ εφραπτομένη:

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}.$$

Πολλαπλασία τόξα:

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta, \\ \cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \\ \tan 3\theta &= \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}, \\ \sin 4\theta &= 4 \sin \theta \cos^3 \theta - 8 \sin^3 \theta \cos \theta, \\ \cos 4\theta &= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1, \\ \tan 4\theta &= \frac{4 \tan \theta - 4 \tan^3 \theta}{1 - 6 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta}. \end{aligned}$$

Δυνάμεις συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta &= \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta, \\ \cos^3 \theta &= \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta, \\ \sin^4 \theta &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta, \\ \cos^4 \theta &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta. \end{aligned}$$

Πράξεις μεταξύ τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2} \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \end{aligned}$$

Συνάρτηση	Παράγωγος
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x = \sin x / \cos x$	$1 / \cos^2 x$
$\cot x = \cos x / \sin x$	$-1 / \sin^2 x$
$\sec x = 1 / \cos x$	$\sec x \tan x$
$\csc x = 1 / \sin x$	$-\csc x \cot x$
$\arcsin x \quad \text{ή} \quad \sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x < 1$
$\arccos x \quad \text{ή} \quad \cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x < 1$
$\arctan x \quad \text{ή} \quad \tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x \quad \text{ή} \quad \cot^{-1} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x \quad \text{ή} \quad \sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\operatorname{arcsc} x \quad \text{ή} \quad \csc^{-1} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh x$
$\tanh x = \sinh x / \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$1 / \cosh^2 x$
$\operatorname{coth} x = \cosh x / \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$-1 / \sinh^2 x$
$\operatorname{sech} x = 1 / \cosh x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\operatorname{csch} x = 1 / \sinh x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	$-\operatorname{csch} x \operatorname{coth} x$
$\operatorname{arsinh} x \quad \text{ή} \quad \sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arcosh} x \quad \text{ή} \quad \cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\operatorname{arctanh} x \quad \text{ή} \quad \tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad x < 1$
$\operatorname{arcoth} x \quad \text{ή} \quad \coth^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad x > 1$
$\operatorname{arcsech} x \quad \text{ή} \quad \operatorname{sech}^{-1} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1$
$\operatorname{arcsch} x \quad \text{ή} \quad \operatorname{csch}^{-1} x$	$-\frac{1}{ x \sqrt{1+x^2}}, \quad x \neq 0$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

Σχέσεις σε αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} \arcsin(-\theta) &= -\arcsin \theta, & \arccos(-\theta) &= \pi - \arccos \theta, \\ \arctan(-\theta) &= -\arctan \theta, & \operatorname{arccot}(-\theta) &= \pi - \operatorname{arccot} \theta, \\ \operatorname{arcsec}(-\theta) &= \pi - \operatorname{arcsec} \theta, & \operatorname{arcsc}(-\theta) &= -\operatorname{arcsc} \theta, \\ \arcsin \theta + \arccos \theta &= \frac{\pi}{2}, & \arctan \theta + \operatorname{arccot} \theta &= \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{arcsec} \theta &= \arcsin(1/\theta), & \operatorname{arcsec} \theta &= \arccos(1/\theta), & \operatorname{arccot} \theta &= \frac{\pi}{2} - \arctan(\theta). \end{aligned}$$

Διωνυμικό Ανάπτυγμα - Σειρά:

$$(x+y)^n = x^n \left[1 + n \left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \dots \right].$$

Ανάπτυγμα Taylor:

- Αν η f έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το a , τότε για κάθε φυσικό αριθμό n και για κάθε x στο εν λόγω διάστημα θα ισχύει

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}.$$

όπου,

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

για κάποιο c_{n+1} στο διάστημα (a, x) .

- Αν στο τύπο του Taylor αντικαταστήσουμε το a με μηδέν, αν το μηδέν είναι σημείο του διαστήματος $[a, b]$, τότε έχουμε τη μορφή

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

με το c σημείο μεταξύ του 0 και του x . Ο τύπος αυτός λέγεται τύπος του Maclaurin.

Μέθοδος N-R:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Υπολογισμός όγκου στερεού από περιστροφή:

• Περιστροφή γύρω από τον x -άξονα.

1) Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής και θετική στο $[a, b]$ διάστημα. Όταν ο άξονας περιστροφής είναι τμήμα του συνόρου του επιπέδου τόπου R , τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του R γύρω από τον x -άξονα, δίνεται από τη σχέση $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$.

2) Όταν η περιοχή που περιστρέφεται ορίζεται από δύο καμπύλες $f(x), g(x)$ με $f(x) > g(x)$ σε ένα διάστημα $[a, b]$, τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον x -άξονα, δίνεται από τη σχέση $V = \int_a^b \pi ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$.

• Περιστροφή γύρω από τον y -άξονα.

1) Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής και θετική στο $[a, b]$ διάστημα. Αν η περιστροφή είναι γύρω από τον y -άξονα τότε ο όγκος δίνεται από τη σχέση $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$.

2) Όταν η περιοχή που περιστρέφεται ορίζεται από δύο καμπύλες $f(x), g(x)$ με $f(x) > g(x)$ σε ένα διάστημα $[a, b]$, τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον y -άξονα, δίνεται από τη σχέση $V = \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)] dx$.

Υπολογισμός εμβαδού επιφάνειας στερεού από περιστροφή:

Έστω η συνεχής συνάρτηση $y = f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$.

1) Αν η $y = f(x)$ περιστραφεί γύρω από τον x -άξονα, τότε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται, δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.

2) Αν $x = g(y), c \leq y \leq d$ περιστραφεί γύρω από τον y -άξονα, τότε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται, δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$.

3) Αν η καμπύλη δίνεται σε παραμετρική μορφή $x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$ οπότε $dx = \dot{x}(t)dt, dy = \dot{y}(t)dt$, οι πιο πάνω τύποι του εμβαδού γίνονται $E = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$.

$$E = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

4) Αν η καμπύλη δίνεται σε πολική μορφή $r = r(\phi)$, με $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ τότε $x(\phi) = r(\phi) \cos \phi, y(\phi) = r(\phi) \sin \phi$ (δηλαδή πάλι έχουμε παραμετρικές εξισώσεις με παράμετρο ϕ), οπότε $dx/d\phi = r'(\phi) \cos \phi - r(\phi) \sin \phi$ και $dy/d\phi = r'(\phi) \sin \phi + r(\phi) \cos \phi$ και οι τύποι του εμβαδού γίνονται $E = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |r(\phi) \sin \phi| \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)} d\phi = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |y(\phi)| \sqrt{x'^2(\phi) + y'^2(\phi)} d\phi$,

$$E = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |r(\phi) \cos \phi| \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)} d\phi = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |x(\phi)| \sqrt{x'^2(\phi) + y'^2(\phi)} d\phi.$$

Μήκος καμπύλης:

• Έστω $y = f(x)$ μία επίπεδη καμπύλη ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Το μήκος της καμπύλης δίνεται από τη σχέση: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

• Αν η καμπύλη δίνεται σε παραμετρική μορφή $x = g(t), y = h(t)$, τότε η σχέση που δίνει το μήκος της καμπύλης γίνεται: $L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$, όπου t_a, t_b είναι η τιμή του t στη θέση a και b αντίστοιχα.

• Τέλος αν η καμπύλη δίνεται σε πολική μορφή $r = r(\theta)$ και $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, τότε το μήκος δίνεται από τη σχέση: $L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$.

Γραφικές παραστάσεις Τριγωνομετρικών Συνάρτησεων:

