Εισαγωγή στον ολοκληρωτικό λογισμό.

Πρόβλημα 1: Να βρεθεί η θέση $x = S(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t αν είναι γνωστή η ταχύτητα του δηλαδή αν γνωρίζουμε ότι $v(t) = S'(t)$.

Πρόβλημα 2: Να βρεθεί ο πληθυσμός $N(t)$ μιας κοινωνίας βακτηριδίων τη χρονική στιγμή t αν είναι γνωστός ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού δηλαδή αν γνωρίζουμε την παράγωγο $N'(t)$.

Και στα δύο προβλήματα καλούμαστε να βρούμε μία άγνωστη συνάρτηση $F(x)$ για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$. Δηλαδή η λύση του προβλήματός μας απαιτεί να ακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία από την παραγώγιση.

Παράδειγμα:

Έστω ότι είναι γνωστή η παράγωγος μιας συνάρτησης, ξέρουμε δηλαδή ότι,

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 2x$$

και θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση $F(x)$ που έχει παράγωγο την $f(x)$.

Ποια είναι η συνάρτηση που έχει αυτή για παράγωγο;

$$F(x) = x^2 \quad \text{Είναι σωστό;;;}$$

$$F(x) = x^2 + c\,, \quad c: \text{ σταθερά}$$

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η $F(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ ως προς x.

Αόριστα ολοκληρώματα

- Αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός

Η διαδικασία εύρεσης της $F(x)$ από την $f(x)$ λέγεται ολοκλήρωση της $f(x)$ ως προς x και συμβολικά γράφουμε

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Η $F(x)$ ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της $f(x)$.

Για παράδειγμα,

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c, \quad \text{αφού} \quad (\sin x)' = \cos x.$$

Μερικά βασικά αόριστα ολοκληρώματα

1. $$\int dx = \int 1\, dx = x + c$$
2. $$\int a\, dx = a \int dx = ax + c$$
3. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$
4. $$\int x^n dx = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1,$$
5. $$\int e^x dx = e^x + c$$
6. $$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$
7. $$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

Ιδιότητες

1. $\int a\,f(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a \in R^*, \quad \int 0\,dx = c$
2. $\int (f(x))' dx = f(x) + c$
3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Παραδείγματα:

(α) $\int x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$

(β) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2x^{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$

(γ) $\int (3\cos x + 2e^x)\,dx = 3\int \cos x\,dx + 2\int e^x\,dx = 3\sin x + 2e^x + c$

(δ) $\int \cos 2x\,dx = \int \frac{1}{2}(\sin 2x)'\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 2x)'\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

- Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Από τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου δύο συναρτήσεων f και g έχουμε,

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \Rightarrow f\cdot g' = (f\cdot g)' - f'\cdot g \Rightarrow$$
$$\int \left(f\cdot g'\right)\, dx = \int (f\cdot g)'\, dx - \int \left(f'\cdot g\right)\, dx \Rightarrow$$
$$\int \left(f\cdot g'\right)\, dx = f\cdot g - \int \left(f'\cdot g\right)\, dx \tag{1}$$

Παραδείγματα:

$$\int x\cos x\, dx = \int x(\sin x)'\, dx \overset{(1)}{=} x\sin x - \int x'\sin x\, dx =$$
$$= x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + c.$$

Παραδείγματα:

$$\int x^2 e^x\,dx = \int x^2 \left(e^x\right)'\,dx = x^2e^x - \int \left(x^2\right)' e^x\,dx =$$
$$= x^2e^x - 2\int x\,e^x\,dx = x^2e^x - 2\int x\left(e^x\right)'\,dx =$$
$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int x' e^x\,dx\right) = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) =$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c.$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

- Μέθοδος αντικατάστασης

Αν έχουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$, τότε θα καλούμε την $g(x) = \omega$ οπότε $d\omega = g'(x)dx$ και συνεπώς το ολοκλήρωμα γράφεται,

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(\omega)\, d\omega \tag{2}$$

ελπίζοντας αυτό το δεύτερο ολοκλήρωμα να είναι απλούστερο του πρώτου.

Παραδείγματα:

$$\int 2\cos 2x\, dx \quad \text{θέτουμε } 2x = \omega \quad \text{οπότε } d\omega = 2dx$$

άρα το ολοκλήρωμα γίνεται,

$$\int 2\cos 2x\, dx = \int \cos 2x\, 2dx = \int \cos\omega\, d\omega = \sin\omega + c = \sin 2x + c.$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Παραδείγματα:

$$\int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx \quad \text{θέτουμε } x^4+1=\omega \quad \text{οπότε } d\omega=(x^4+1)'dx=4x^3\,dx$$

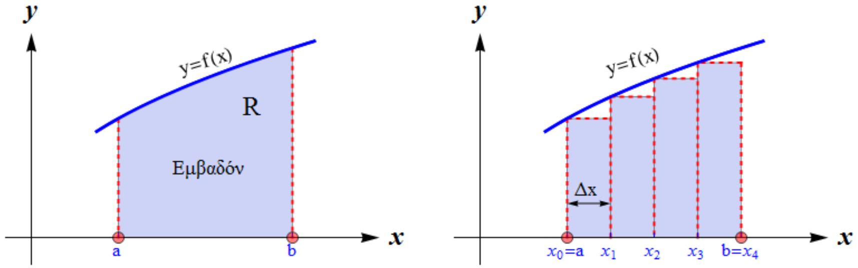
άρα το ολοκλήρωμα γίνεται,

$$\int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx=\frac{1}{4}\int 4x^3\sqrt{x^4+1}\,dx=\frac{1}{4}\int\sqrt{\omega}\,d\omega=\frac{1}{4}\int\omega^{1/2}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\omega^{3/2}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\omega^{3/2}+c=\frac{1}{6}\sqrt{\omega^3}+c=\frac{1}{6}\sqrt{(x^4+1)^3}+c.$$

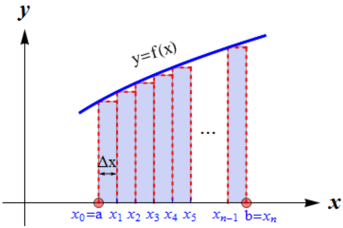
Ορισμένο ολοκλήρωμα

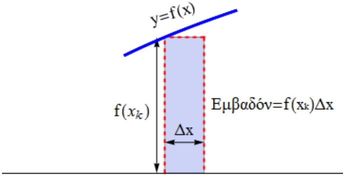
Έστω $y = f(x)$ μία συνεχής συνάρτηση θετικά ορισμένη, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και R το επίπεδο χωρίο που ορίζεται από την καμπύλη $f(x)$, τον οριζόντιο άξονα x και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ όπως φαίνεται αριστερά στο επόμενο σχήμα.



Για να προσεγγίσουμε το εμβαδόν της περιοχής R, μία ιδέα είναι, να χωρίσουμε την R σε ορθογώνια (όπως φαίνεται στο σχήμα επάνω δεξιά), να υπολογίσουμε το εμβαδόν σε κάθε ένα από αυτά και στο τέλος να τα προσθέσουμε.

Είναι φανερό ότι όσο πιο πολλά ορθογώνια θεωρήσουμε στη προσπάθεια μας να προσεγγίσουμε το εμβαδόν τόσο ακριβέστερη θα είναι η προσέγγιση μας.





Το άθροισμα των εμβαδών θα είναι $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$. Αν πάρουμε το όριο αυτού του αθροίσματος $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ θα το ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$.

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, θα το συμβολίζουμε,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

και αντίστοιχα η συνάρτηση $f(x)$ θα λέγεται ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$.

Ιδιότητες:

- Αν αλλάξουμε τα άκρα της ολοκλήρωσης τότε,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

- Αν τα άκρα της ολοκλήρωσης ταυτίζονται τότε,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Ιδιότητες:

- Αν f, g συνεχείς στο $[a, b]$ και $\lambda, \mu \in R$ τότε ισχύει,

$$\int_a^b [\lambda f(x) \pm \mu g(x)]\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx \pm \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

- Αν f συνεχής στο Δ και $a, b, c \in \Delta$ τότε,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

- Αν f συνεχής στο $[a, b]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε,

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Αν $f(x)$ μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ και F μία παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Το δεύτερο μέλος της πιο πάνω σχέσης συνήθως το γράφουμε συμβολικά,

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \overset{\text{ή}}{=} F(x)\big|_a^b\,.$$

Για συγκεκριμένες τιμές των a και b το ορισμένο ολοκλήρωμα δίνει αριθμητικό αποτέλεσμα σε αντίθεση με το αόριστο ολοκλήρωμα που το αποτέλεσμα του είναι συνάρτηση.

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

- Παραγοντική ολοκλήρωση.

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

- Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής.

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx, \quad \text{θέτουμε} \quad \omega = g(x), \quad \text{οπότε} \quad d\omega = g'(x)dx$$

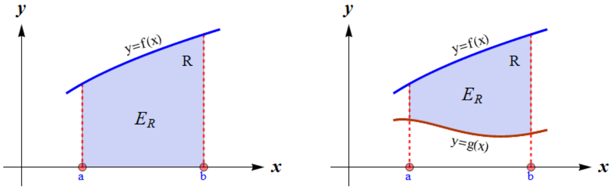
Προσοχή: Αλλάζουν και τα άκρα της ολοκλήρωσης (εκτός και αν σκοπεύουμε να ξαναγυρίσουμε στην αρχική μεταβλητή). Έτσι βρίσκουμε τις ποσότητες $\omega_1 = g(a)$ και $\omega_2 = g(b)$ οπότε,

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega)\,d\omega.$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Αν έχουμε μία συνεχή συνάρτηση $f(x)$ θετικά ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, b]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $E_R = \int_a^b f(x)\,dx$ δίνει το εμβαδόν E_R της επίπεδης περιοχής R που ορίζεται κάτω από την καμπύλη f, τον οριζόντιο άξονα x και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$.



Αν η περιοχή R ορίζεται από δύο συνεχείς συναρτήσεις θετικά ορισμένες με $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ (σχήμα επάνω δεξιά), τότε το εμβαδόν της R θα δίνεται από τη σχέση $E_R = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

Άσκηση

Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right)\, dx$.

Λύση:
Από τις ιδιότητες ολοκλήρωσης θα έχουμε,

$$\int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right)\, dx = \int_1^3 \left(-x^2\right)\, dx + \int_1^3 4x\, dx + \int_1^3 (-3)\, dx =$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + 4\frac{3^2}{2} - 3\cdot 3\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 4\frac{1^2}{2} - 3\cdot 1\right) =$$
$$= -\frac{26}{3} + 16 - 6 = \frac{4}{3}.$$

Άσκηση

Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$.

Λύση:
Από τις ιδιότητες ολοκλήρωσης θα έχουμε,

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Άσκηση: Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3\,dx$

Για να λύσουμε το ολοκλήρωμα θέτουμε $\omega = x^2+1$, οπότε $d\omega = \left(x^2+1\right)' dx \Rightarrow d\omega = 2x\,dx$. Υπολογίζουμε και τα άκρα της ολοκλήρωσης σύμφωνα με τη νέα μεταβλητή. Άρα, για $x=0$ έχουμε $\omega = 0^2+1 = 1$ και για $x=1$ αντίστοιχα έχουμε $\omega = 2$. Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται,

$$\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)^3 \overbrace{(2x)\,dx}^{d\omega} = \frac{1}{2}\int_1^2 \omega^3\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\omega^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}.$$

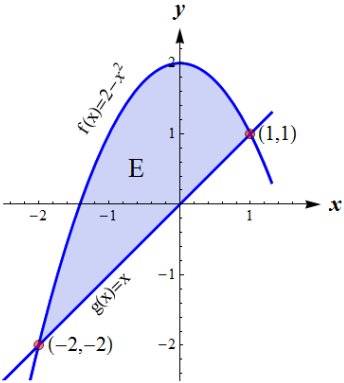
Αν γυρίσουμε στην αρχική μας μεταβλητή δεν χρειάζεται να αλλάξουμε τα άκρα της ολοκλήρωσης αφού,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\omega^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}.$$

Άσκηση

Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες $f(x) = 2 - x^2$ και $g(x) = x$.

Λύση:

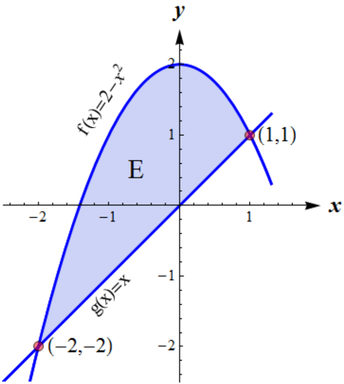


Το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα,

$$E = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Χρειάζεται να βρούμε τα άκρα της ολοκλήρωσης οπότε εξισώνουμε,
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - x - 2 = 0 \Rightarrow$
$(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2$ ή $x = 1$
άρα $a = -2$ και $b = 1$.

Άσκηση



Άρα,

$$
\begin{aligned}
E &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \\
&= \int_{-2}^{1} \left[\left(2 - x^2\right) - x\right] dx = \\
&= \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) dx = \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \\
&= \frac{9}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Ανάλυση κλάσματος $\frac{f(x)}{g(x)}$

- Ελέγχουμε το βαθμό του αριθμητή $f(x)$ να είναι μικρότερος του βαθμού του παρανομαστή $g(x)$ (αλλιώς κάνουμε την πολυωνυμική διαίρεση).
- Ελέγχουμε τη μορφή του παρανομαστή $g(x)$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. η $g(x) = 0$ έχει απλές πραγματικές ρίζες,
2. η $g(x) = 0$ έχει απλές και πολλαπλές πραγματικές ρίζες
3. ο παρανομαστής είναι της μορφής $g(x) = (x^2 + bx + c)^\nu$ με μιγαδικές ρίζες.

1η περίπτωση: η $g(x) = 0$ έχει απλές ρίζες

Απλή ρίζα σημαίνει ρίζα μία φορά.

Αν ρ_1, ρ_2, ... οι απλές ρίζες, τότε η $g(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$g(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)\cdots(x - \rho_{\nu-1})(x - \rho_\nu) = 0.$$

Σε αυτή τη περίπτωση το κλάσμα $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ πάντα αναλύεται στη μορφή

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - \rho_1)} + \frac{A_2}{(x - \rho_2)} + \cdots + \frac{A_{\nu-1}}{(x - \rho_{\nu-1})} + \frac{A_\nu}{(x - \rho_\nu)}.$$

2η περίπτωση: η $g(x) = 0$ έχει απλές και πολλαπλές ρίζες

Αν ρ_1, ρ_2, ... απλές και πολλαπλές ρίζες, τότε η $g(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$g(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)^{\kappa}\cdots(x-\rho_\mu)^{\lambda} = 0.$$

Σε αυτή τη περίπτωση το κλάσμα $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ πάντα αναλύεται στη μορφή

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-\rho_1)} + \frac{A_2}{(x-\rho_2)} + \frac{B_1}{(x-\rho_3)} + \frac{B_2}{(x-\rho_3)^2} + \cdots$$
$$+ \frac{B_\kappa}{(x-\rho_3)^\kappa} + \cdots + \frac{M_1}{(x-\rho_\mu)} + \frac{M_2}{(x-\rho_\mu)^2} + \cdots + \frac{M_\lambda}{(x-\rho_\mu)^\lambda}.$$

3η περίπτωση: η $g(x) = (x^2 + bx + c)^\nu$

όπου ο βαθμός του $f(x)$ είναι μικρότερος του 2ν και $b, c \in \Re$ καθώς και $b^2 - 4c < 0$.

Τότε το κλάσμα $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ αναλύεται στη μορφή:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_\nu x + B_\nu}{(x^2 + bx + c)^\nu}.$$

Παρατήρηση:

1) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-\rho_1)} + \frac{A_2}{(x-\rho_2)} + \cdots + \frac{A_{\nu-1}}{(x-\rho_{\nu-1})} + \frac{A_\nu}{(x-\rho_\nu)}.$$

2) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-\rho_1)} + \frac{A_2}{(x-\rho_2)} + \frac{B_1}{(x-\rho_3)} + \frac{B_2}{(x-\rho_3)^2} + \cdots + \frac{B_\kappa}{(x-\rho_3)^\kappa} + \cdots + \frac{M_1}{(x-\rho_\mu)} + \frac{M_2}{(x-\rho_\mu)^2} + \cdots + \frac{M_\lambda}{(x-\rho_\mu)^\lambda}.$$

3) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_\nu x + B_\nu}{(x^2+bx+c)^\nu}.$$

Το πλήθος των αγνώστων (αλλά προσδιοριστέων) συντελεστών A_i, B_i κ.λ.π. στο δεύτερο μέλος θα πρέπει να είναι το ίδιο με το βαθμό του πολυωνύμου $g(x)$ στον παρανομαστή του πρώτου μέλους.

Προσδιορισμός των συντελεστών A_1, A_2, ...

1ος τρόπος:

Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα στη μορφή των απλών κλασμάτων, απλοποιούμε, και εξισώνουμε συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων. Δηλαδή για παράδειγμα

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2} =$$

Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα στο δεύτερο μέλος

$$= \frac{A_1(x-2)}{(x-3)(x-2)} + \frac{A_2(x-3)}{(x-3)(x-2)} \Rightarrow \quad \text{απλοποιούμε}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1(x-2)}{(x-3)(x-2)} + \frac{A_2(x-3)}{(x-3)(x-2)} \Rightarrow$$

$$1 = A_1(x-2) + A_2(x-3) \qquad (1)$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων

Προσδιορισμός των συντελεστών A_1, A_2, ...

$$1 = A_1(x-2) + A_2(x-3) \Rightarrow$$
$$1 = A_1 x - 2A_1 + A_2 x - 3A_2 \Rightarrow 1 = (A_1 + A_2)x - (2A_1 + 3A_2)$$

άρα η εξίσωση των ομοιοβάθμιων όρων οδηγεί στο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + A_2 \\ 1 &= -(2A_1 + 3A_2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= 3A_1 + 3A_2 \\ 1 &= -2A_1 - 3A_2 \end{aligned} \overset{+}{\Rightarrow} A_1 = 1$$

άρα και $A_2 = -1$.

Συνεπώς το αρχικό κλάσμα αναλύεται στα απλούστερα κλάσματα

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

Προσδιορισμός των συντελεστών A_1, A_2, ...

2ος τρόπος: Αν στην εξίσωση (1)

$$1 = A_1(x-2) + A_2(x-3)$$

αντικαταστήσουμε όπου $x = 3$, τότε

$$1 = A_1(3-2) + A_2(3-3) \Rightarrow A_1 = 1.$$

Ομοίως αν βάλουμε $x = 2$, τότε

$$1 = A_1(2-2) + A_2(2-3) \Rightarrow A_2 = -1.$$

Συνεπώς πάλι το αρχικό κλάσμα αναλύεται στα απλούστερα κλάσματα

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

Άσκηση: Να αναλυθεί το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

Επειδή $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$ το κλάσμα γράφεται στη μορφή

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

1ος τρόπος:

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} &= \frac{A(x+1)^2}{x(x+1)^2} + \frac{B_1x(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{B_2x}{x(x+1)^2} \Rightarrow \\
5x^2+20x+6 &= A(x+1)^2 + B_1x(x+1) + B_2x = \\
&= Ax^2 + 2Ax + A + B_1x^2 + B_1x + B_2x = \\
&= (A+B_1)x^2 + (2A+B_2+B_1)x + A
\end{aligned}$$

Εξισώνουμε συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων οπότε προκύπτει

Άσκηση: Να αναλυθεί το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

$$5x^2 + 20x + 6 = (A + B_1)x^2 + (2A + B_2 + B_1)x + A$$

$$\begin{aligned} 5 &= A + B_1 \\ 20 &= 2A + B_2 + B_1 \\ 6 &= A \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 5 - 6 &= B_1 \\ 20 &= 2A + B_2 + B_1 \\ 6 &= A \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} B_1 &= -1 \\ B_2 &= 9 \\ A &= 6. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}$$

Άσκηση: Να αναλυθεί το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

2ος τρόπος:

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x+1)^2 + B_1 x(x+1) + B_2 x \qquad (3)$$

Για $x = 0$ παίρνουμε

$$6 = A(0+1)^2 + 0 + 0 \Rightarrow A = 6$$

για $x = -1$ αντίστοιχα παίρνουμε

$$5 - 20 + 6 = 0 + 0 - B_2 \Rightarrow B_2 = 9.$$

Για να βρούμε το B_1 χρησιμοποιούμε οποιαδήποτε βολική τιμή του x που θα μας διευκολύνει να βρούμε τον ζητούμενο συντελεστή. Έτσι για $x = 1$ από την (3) έχουμε

$$\begin{aligned} 5 + 20 + 6 &= A(1+1)^2 + B_1(1+1) + B_2 \Rightarrow 31 = 6 \cdot 4 + 2B_1 + 9 \Rightarrow \\ -2 &= 2B_1 \Rightarrow B_1 = -1. \end{aligned}$$