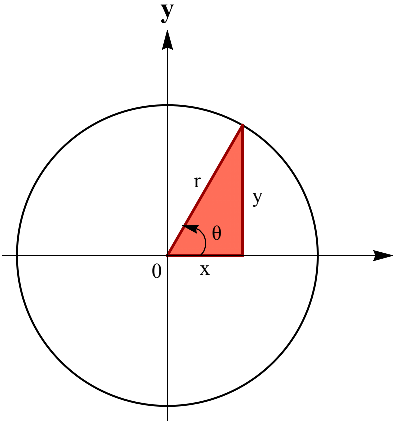
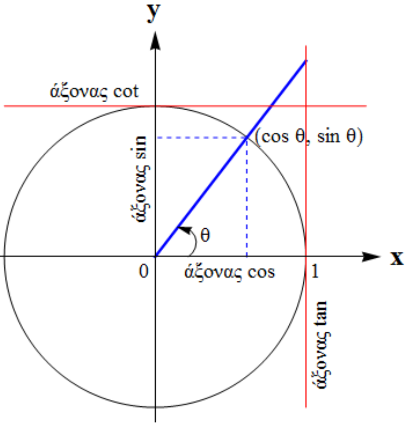
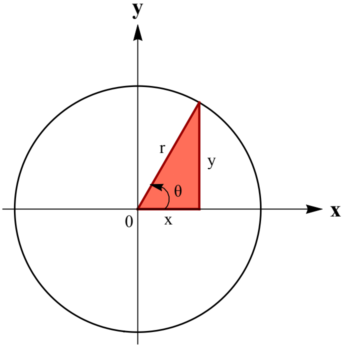
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις





Όλα τα τόξα στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις θα θεωρούνται σε ακτίνια.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

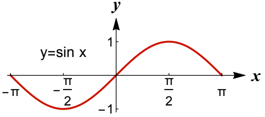


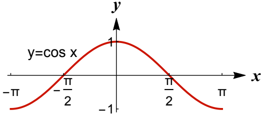
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

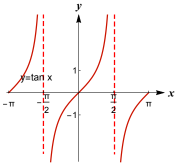
- Ημίτονο: $\sin\theta = \frac{y}{r}$
- Συνημίτονο: $\cos\theta = \frac{x}{r}$
- Εφαπτομένη: $\tan\theta = \frac{y}{x}$
- Συνεφαπτομένη: $\cot\theta = \frac{x}{y}$
- Τέμνουσα: $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$
- Συντέμνουσα: $\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$

Γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

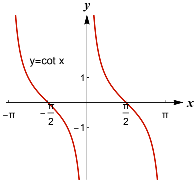
	Ημίτονο	Συνημίτονο	Εφαπτομένη
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$

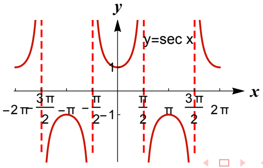


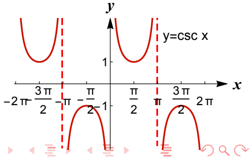




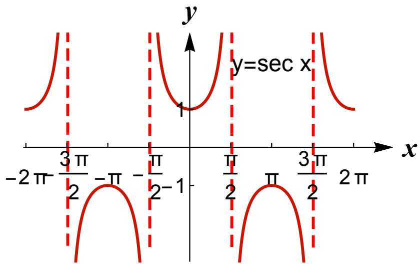
	Συνεφαπτομένη	Τέμνουσα	Συντέμνουσα
$f(x)$	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$







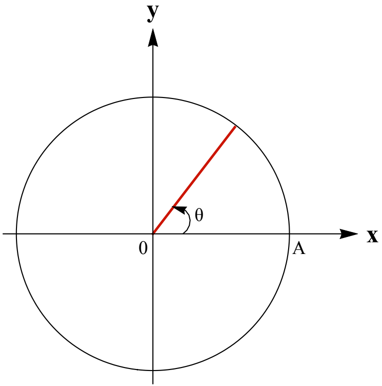
Γραφικές παραστάσεις $\sec x$ και $\csc x$



Πεδίο ορισμού sec: $\Re - \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots\}$, Πεδίο τιμών sec: $y \leq -1, y \geq 1$, Πεδίο ορισμού csc: $\Re - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$, Πεδίο τιμών csc: $y \leq -1, y \geq 1$.

Άσκηση

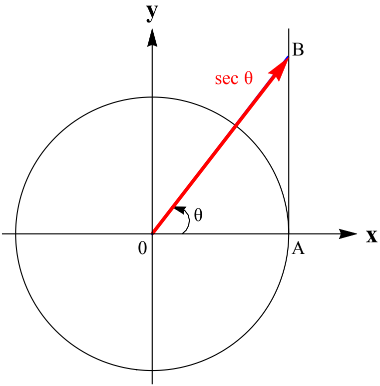
Να υπολογισθεί γεωμετρικά η τέμνουσα πάνω στον μοναδιαίο τριγωνομετρικό κύκλο.



$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{OB} \Longrightarrow OB = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta.$$

Άσκηση

Να υπολογισθεί γεωμετρικά η τέμνουσα πάνω στον μοναδιαίο τριγωνομετρικό κύκλο.

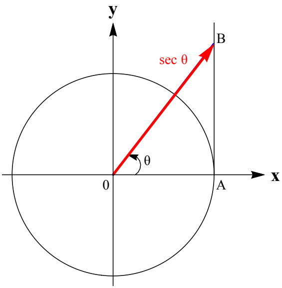


$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{OB} \Longrightarrow OB = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta.$$

Άσκηση

Να αποδειχθεί η τριγωνομετρική ταυτότητα $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$.

1ος τρόπος:



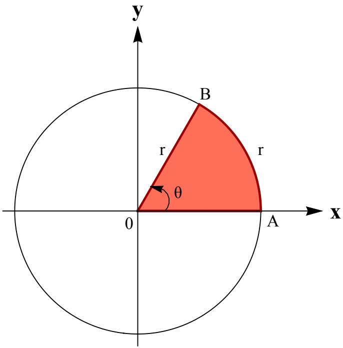
$$OB^2 = OA^2 + AB^2 \Longrightarrow \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta.$$

2ος τρόπος:

$$\sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta.$$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Οι παράγωγοι των τριγωνομετρικών συναρτήσεων υπάρχουν για κάθε τόξο με την προϋπόθεση όμως οι γωνίες να είναι εκφρασμένες σε ακτίνια. Υπενθυμίζουμε ότι ακτίνιο είναι η επίκεντρη γωνία θ που βλέπει τόξο με μήκος AB ίσο με την ακτίνα r. Γνωρίζουμε επίσης ότι $2\pi = 360^o$.



$$1 \text{ ακτίνιο} = \frac{180^o}{\pi} = 57.2958^o \ldots$$

Σχέσεις που συνδέουν τις διαφορετικές εκφράσεις τόξων:

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Deg(ree)-Grad(e)-Rad(ian)

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x,$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x, \quad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x.$$

Σχέσεις απλών και πολλαπλασίων τόξων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\ \cos\theta$ $\qquad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\qquad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
- $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ $\qquad \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$
- $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$
- $\sin\theta = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$
- $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ $\qquad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Σχέσεις αθροισμάτων και διαφορών τόξων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta \pm \sin\beta\ \cos\alpha$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \mp \sin\alpha\ \sin\beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha\ \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\ \tan\beta}$
- $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha\ \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Έστω η τριγωνομετρική συνάρτηση $x = \sin y$.
- Ποιο είναι το τόξο y που το ημίτονο του κάνει x;

Ορισμός αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης

Δεδομένης της συνάρτησης $x = \sin y$, ορίζουμε σαν αντίστροφη τριγωνομετρική συνάρτηση την συνάρτηση $y = \arcsin x$ και την διαβάζουμε τόξο του ημιτόνου x ή αντίστροφη συνάρτηση του ημιτόνου x. Δηλαδή ισχύει:

$$x = \sin y \iff y = \arcsin x$$

Παρατήρηση 1: Αν f μία συνάρτηση, γράφουμε f^{-1} την αντίστροφη της. Ομοίως και τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις μπορούμε να τις συμβολίσουμε π.χ. $y = \sin^{-1} x$.
Παρατήρηση 2: Προσοχή στο συμβολισμό $(\sin x)^{-1}$ που σημαίνει το αντίστροφο του ημιτόνου.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γωνία που το ημίτονο της είναι $\sqrt{2}/2$.

Λύση:

$$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff y = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$$

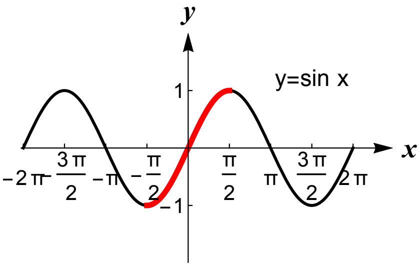
Υπολογίζουμε (με τη βοήθεια αριθμομηχανής, ή σχετικών πινάκων ή γεωμετρικών σχέσεων στον τριγωνομετρικό κύκλο),

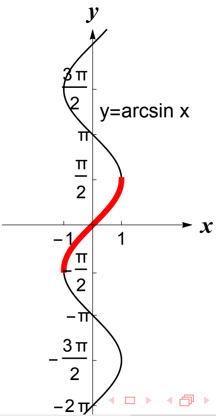
$$y = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \iff y = \frac{\pi}{4}$$

δηλαδή η ζητούμενη γωνία είναι 45 μοίρες.

Αντίστροφη τριγωνομετρική συνάρτηση του sin

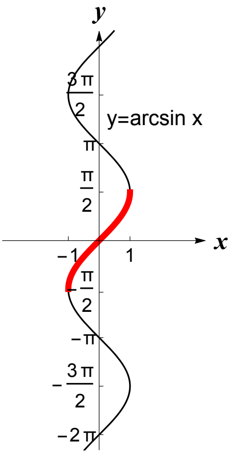
Έστω η συνάρτηση $y = \sin x$.





Πρωτεύον τόξο

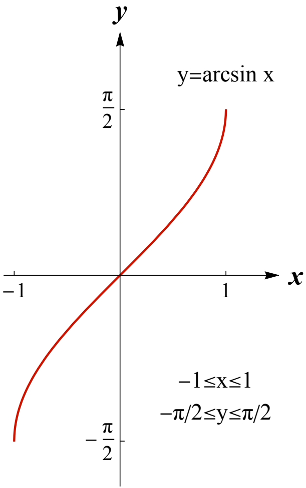
Αντίστροφη τριγωνομετρική συνάρτηση του sin

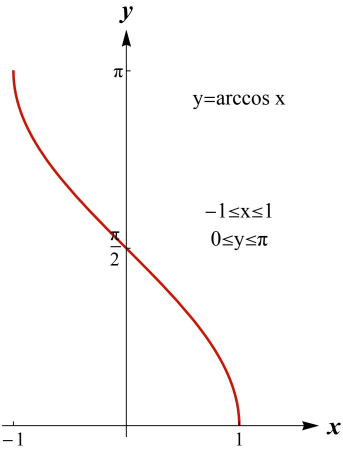


Πεδίο ορισμού: $-1 \leq x \leq 1$

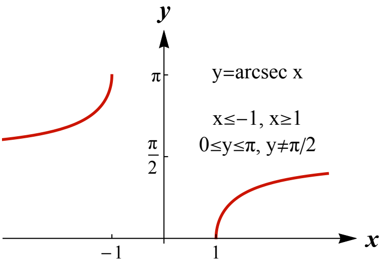
Πεδίο τιμών: $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

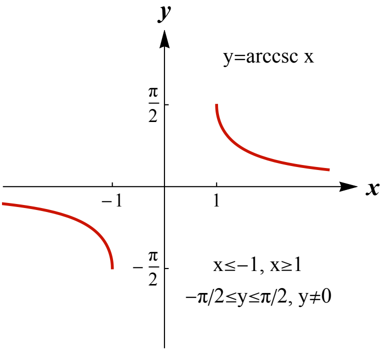
Γραφικές παραστάσεις αντίστροφων τριγ. συναρτήσεων



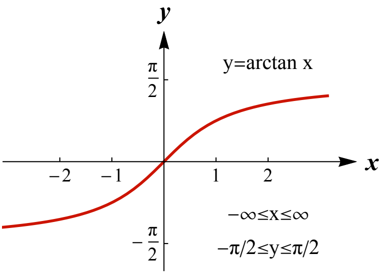


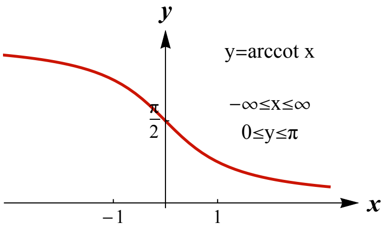
Γραφικές παραστάσεις αντίστροφων τριγ. συναρτήσεων





Γραφικές παραστάσεις αντίστροφων τριγ. συναρτήσεων



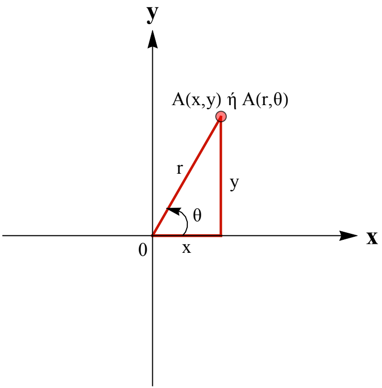


Πρωτεύοντα τόξα αντίστροφων τριγων. συναρτήσεων

Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού	Πεδίο τιμών
$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \mathrm{arcsec} x$	$x \leq -1$ ή $x \geq 1$	$\pi/2 < y \leq \pi$ ή $0 \leq y < \pi/2$
$y = \mathrm{arccsc} x$	$x \leq -1$ ή $x \geq 1$	$-\pi/2 \leq y < 0$ ή $0 < y \leq \pi/2$
$y = \arctan x$	$-\infty < x < \infty$	$-\pi/2 < y < \pi/2$
$y = \mathrm{arccot} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$

Εφαρμογή αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης

Πολικές συντεταγμένες. Θέση ενός σημείου A στο επίπεδο:



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \quad \text{ή}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\theta = \arctan(y/x),\ x > 0,\ y \geq 0$$

Το A ορίζεται μονοσήμαντα;

Θεώρημα: Κριτήριο 1ης παραγώγου

Έστω $f(x)$ μία συνεχής συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους στο A.

• Βρίσκουμε (αν έχει) κρίσιμα σημεία x_0 λύνοντας την εξίσωση $f'(x) = 0$
• Υπολογίζουμε το πρόσημο της $f'(x)$ αριστερά και δεξιά της κρίσιμης τιμής x_0
• Τότε:
Η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 αν η $f' > 0$ αριστερά του x_0 και αρνητική δεξιά
Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 αν η $f' < 0$ αριστερά του x_0 και θετική δεξιά
Η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο x_0 αν η f' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0.

Θεώρημα: Κριτήριο 2ης παραγώγου

Έστω $f(x)$ μία συνεχής συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους στο A και x_0 κάποια κρίσιμα σημεία της.

• H f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 αν $f''(x_0) < 0$
• H f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 αν $f''(x_0) > 0$.
• Αν $f''(x_0) = 0$ τότε για να αποφανθούμε για το είδος του ακρότατου (αν υπάρχει) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της 1ης παραγώγου.

Άσκηση: Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης, δηλαδή

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2\left(1 - x^2\right) = 0$$

Η λύση της πιο πάνω εξίσωσης δίνει τις ρίζες (κρίσιμα σημεία) $x = -1, 0(\text{διπλή}), 1$. Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο και ελέγχουμε το πρόσημο της στα κρίσιμα σημεία. Άρα,

$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30\left(-2x^3 + x\right)$$

οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} f''(-1) &= 30 > 0 \ \text{ άρα τοπικό ελάχιστο:} \quad f_{min} = f(-1) = -2 \\ f''(1) &= -30 < 0 \ \text{ άρα τοπικό μέγιστο:} \quad f_{max} = f(1) = 2 \\ f''(0) &= 0 \ \text{ άρα δεν μπορούμε αποφανθούμε} \end{aligned}$$

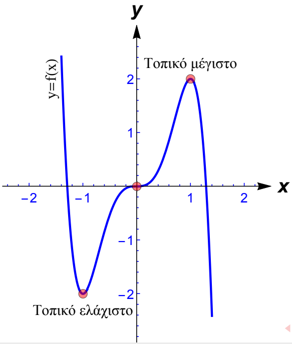
οπότε:

Άσκηση: συνέχεια...

θα ελέγξουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου αριστερά και δεξιά του τελευταίου κρίσιμου σημείου (0,0), δηλαδή

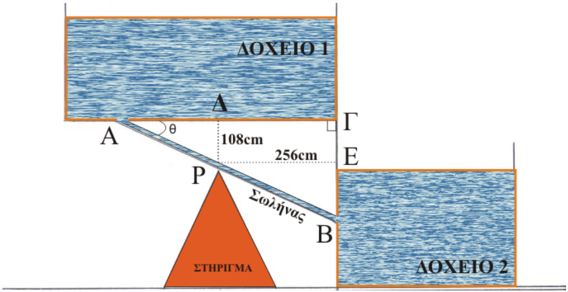
$$f'(0^-) > 0 \quad \text{και} \quad f'(0^+) > 0$$

δηλαδή δεν αλλάζει πρόσημο και συνεπώς από το πρώτο κριτήριο βγάζουμε το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει ακρότατο στο κρίσιμο σημείο (0,0).

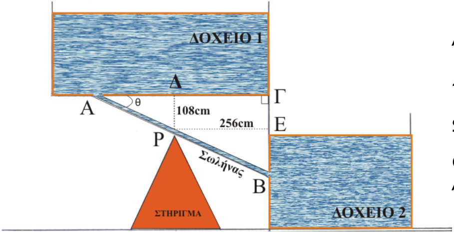


Άσκηση

Θέλουμε να μεταφέρουμε ένα υγρό από το δοχείο 1 στο δοχείο 2 μέσω ενός σωλήνα AB που στηρίζεται στην κορυφή P μιας τριγωνικής βάσης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η απόσταση του P από την οριζόντια βάση του δοχείου 1 είναι PΔ=108 cm ενώ η απόσταση του P από την αριστερή κάθετη πλευρά του δοχείου 2 είναι PE=256 cm. Βρείτε το σωλήνα AB με το μικρότερο μήκος που ενώνει την βάση του δοχείου 1 με την αριστερή κάθετη πλευρά του δοχείου 2.



Άσκηση



Έστω s το ζητούμενο μήκος και θ η γωνία με τον ορίζοντα. Έχουμε
$\sin\theta = 108/AP \Rightarrow AP = 108/\sin\theta$ και
$\cos\theta = 256/BP \Rightarrow BP = 256/\cos\theta$.
Όμως $s = AP + PB =$

$$= 108\csc\theta + 256\sec\theta \qquad (1)$$

$$\frac{ds}{d\theta} = -108\csc\theta\cot\theta + 256\sec\theta\tan\theta = \frac{-108\cos^3\theta + 256\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = 0 \Rightarrow -108\cos^3\theta + 256\sin^3\theta = 0 \Rightarrow \tan^3\theta = 27/64 \Rightarrow \tan\theta = 3/4$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan 3/4 \quad \text{και συνεπώς} \quad s \overset{(1)}{=} 108(5/3) + 256(5/4) = 500cm.$$

Άσκηση

Για να ελέγξουμε αν στη θέση $\theta = \arctan 3/4$ υπάρχει πράγματι ακρότατο θα κάνουμε χρήση του δεύτερου θεωρήματος για τα μέγιστα και ελάχιστα. Άρα βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $s(\theta)$ που είναι:

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} = 108\left(\csc^3(\theta) + \cot^2(\theta)\csc(\theta)\right) + 256\left(\sec^3(\theta) + \tan^2(\theta)\sec(\theta)\right)$$

και συνεπώς τώρα θα ελέγξουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου στη θέση $\theta = \arctan 3/4$

$$\left.\frac{d^2 s}{d\theta^2}\right|_{\theta=\arctan 3/4} = 1500 > 0$$

άρα η συνάρτηση $s(\theta)$ έχει ελάχιστο σε αυτή τη θέση.

Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Αποδεικνύεται εύκολα ότι (για παράδειγμα):

$$\frac{d}{dx}\arcsin\theta \stackrel{\text{ή}}{=} \frac{d}{dx}\sin^{-1}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\frac{d\theta}{dx}\,, \quad |\theta| < 1$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\theta = \frac{1}{1+\theta^2}\frac{d\theta}{dx}$$

Ποια η σημασία αυτών των σχέσεων;

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\,d\theta = \arcsin\theta + C$$

$$\int \frac{1}{1+\theta^2}\,d\theta = \arctan\theta + C$$

Άσκηση

- Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $y = x^2 \arctan x$.

Λύση:
Σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου έχουμε:

$$\frac{d}{dx}(x^2 \arctan x) = 2x \arctan x + x^2 \frac{d}{dx}(\arctan x) =$$

$$\left(\frac{d}{dx}\tan^{-1}\theta = \frac{1}{1+\theta^2}\frac{d\theta}{dx}\right)$$

$$2x \arctan x + x^2 \frac{1}{1+x^2} = 2x \arctan x + \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Υπερβολικές συναρτήσεις

Ορίζονται μέσω των εκθετικών συναρτήσεων

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{Υπερβολικό ημίτονο του } x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{Υπερβολικό συνημίτονο του } x$$

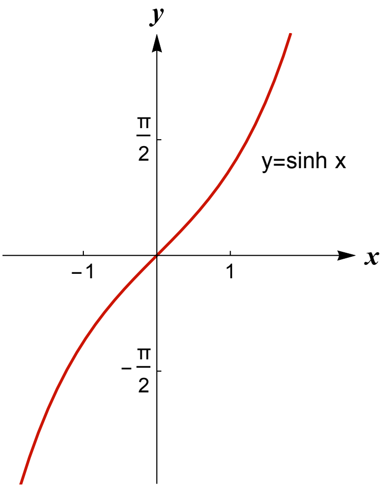
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{Υπερβολική εφαπτομένη του } x$$

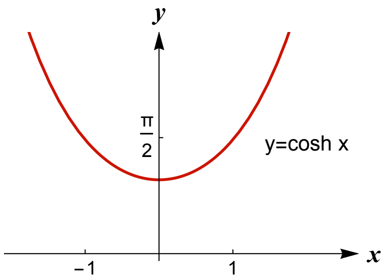
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{Υπερβολική συνεφαπτομένη του } x$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{Υπερβολική τέμνουσα του } x$$

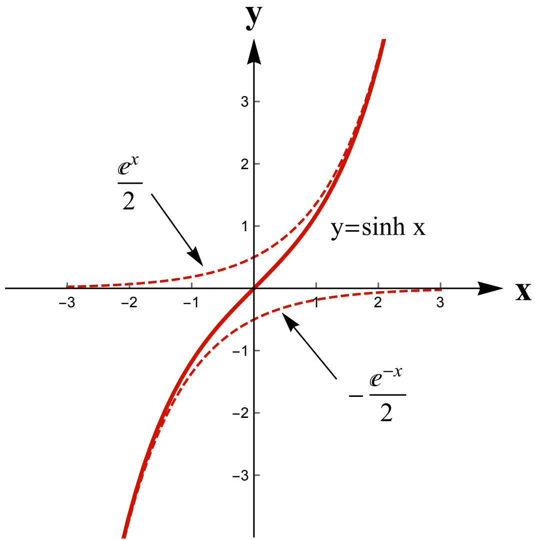
$$\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{Υπερβολική συντέμνουσα του } x.$$

Γραφικές παραστάσεις υπερβολικών συναρτήσεων





Γραφικές παραστάσεις υπερβολικών συναρτήσεων



Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$x = \sinh y \iff y = \sinh^{-1} x$$

Παράγωγοι αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων.

$$\frac{d\left(\sinh^{-1}\theta\right)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d\left(\tanh^{-1}\theta\right)}{dx} = \frac{1}{1-\theta^2}\frac{d\theta}{dx}, \quad |\theta| < 1$$

Άρα πάλι προσέχουμε τη σημασία αυτών των σχέσεων, δηλαδή ότι (για παράδειγμα)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\, d\theta = \operatorname{arcsinh}\theta + C$$