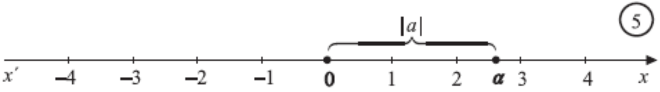
Επανάληψη...

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

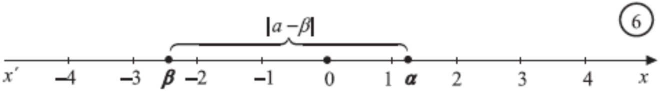
Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α, που συμβολίζεται με $|\alpha|$, ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν} \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν} \quad \alpha < 0 \end{cases}}$$

Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή του α παριστάνει την απόσταση του αριθμού α από το μηδέν,



ενώ η απόλυτη τιμή του $\alpha - \beta$ παριστάνει την **απόσταση των αριθμών α και β.**



Επανάληψη...

Μερικές από τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής είναι οι εξής:

1) $|\alpha|^2 = \alpha^2$

2) $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

3) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

4) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

5) $\big||\alpha| - |\beta|\big| \le |\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$

6) $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad \delta > 0$

Επανάληψη...

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x).$$

— Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

— Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f.

— Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

Επανάληψη...

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}$ ii) $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν και μόνο όταν

$$x^2-3x+2\geq 0 \text{ και } x\neq 0.$$

Το τριώνυμο όμως x^2-3x+2 έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2. Έτσι, η ανίσωση $x^2-3x+2\geq 0$ αληθεύει, όταν και μόνο όταν

$$x\leq 1 \text{ ή } x\geq 2.$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=(-\infty,0)\cup(0,1]\cup[2,+\infty)$.

Επανάληψη...

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται

συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

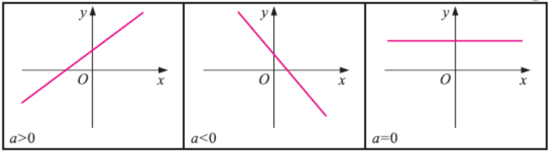
Επανάληψη...

Μερικές βασικές συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων, τις οποίες γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.

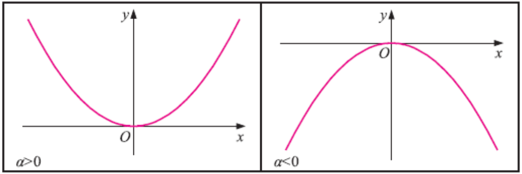
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$.

11



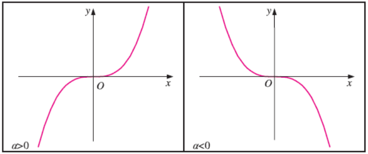
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2,\ \alpha \neq 0$.

12



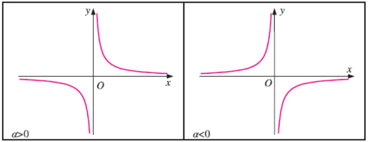
Επανάληψη...

Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$.



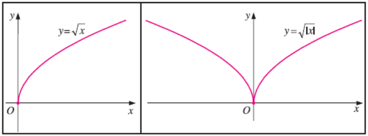
(13)

Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$.



(14)

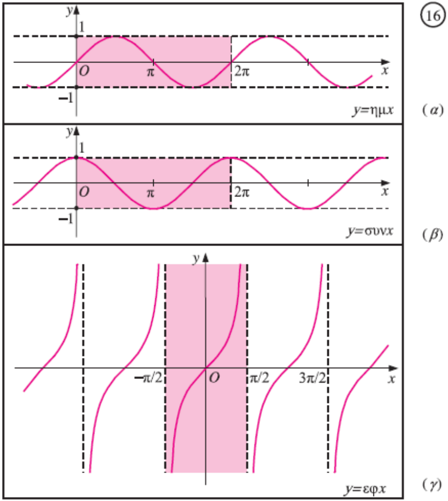
Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$.



(15)

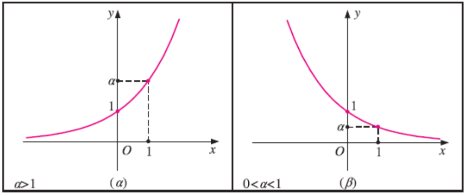
Επανάληψη...

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις: $f(x) = ημx$, $f(x) = συνx$, $f(x) = εφx$.



Επανάληψη...

Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$.



1 ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Υπενθυμίζουμε ότι:

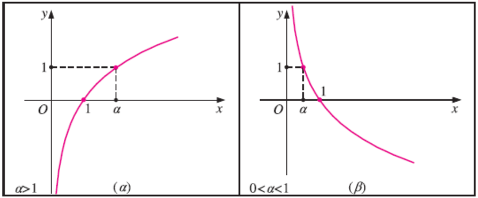
αν $\alpha > 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ενώ

αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Επανάληψη...

Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$.



(18)

Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha(x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = k\log_\alpha x_1$

7) αν $\alpha > 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ενώ

αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

8) $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln\alpha}$.

Επανάληψη...

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x \qquad \alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1 \qquad \log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

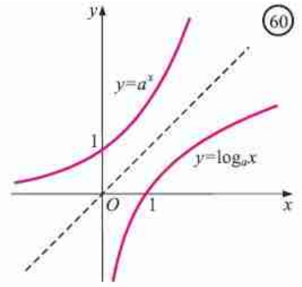
6) $\log_\alpha x_1^k = k \log_\alpha x_1$

7) $\alpha > 1, \qquad : \log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

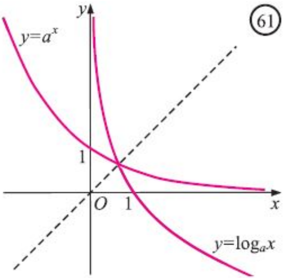
$0 < \alpha < 1, \qquad : \log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2.$

8) $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}, \qquad \alpha = e^{\ln \alpha}.$

Επανάληψη...



$\alpha > 1$



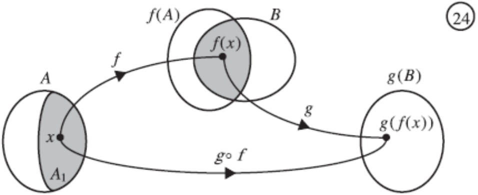
$0 < \alpha < 1$

Επανάληψη...

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

Επανάληψη…

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) $g \circ f$ ii) $f \circ g$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}, \text{ για κάθε } x \in [1 + \infty).$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}, \text{ για κάθε } x \in (0 + \infty).$$

Επανάληψη...

ΟΡΙΣΜΟΣ

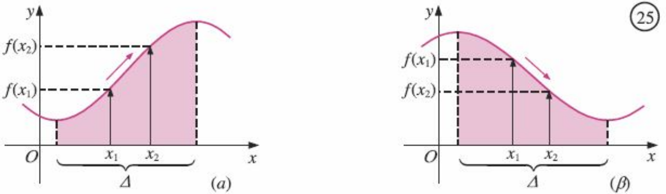
Μια συνάρτηση f λέγεται[(1)]:

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα *διάστημα* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2) \ (\Sigma\chi.\ \alpha)$$

- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα *διάστημα* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2) \ (\Sigma\chi.\ \beta)$$



Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ, γράφουμε $f \uparrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \downarrow \Delta$).

Επανάληψη...

Αντίστροφη συνάρτηση

- Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$g: f(A) \to \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

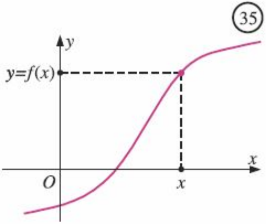
— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$

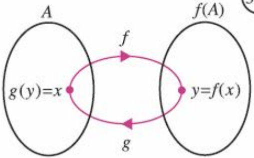
35



Επανάληψη...

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε

36a



$$\boxed{f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x}$$

οπότε

$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A \qquad \text{και} \qquad f(f^{-1}(y))=y,\quad y\in f(A).$$

Επανάληψη...

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=2e^{3x-2}+1$ είναι 1–1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2e^{3x-2}+1=y$$

$$\Leftrightarrow 2e^{3x-2}=y-1$$

$$\Leftrightarrow e^{3x-2}=\frac{y-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x-2=\ln\frac{y-1}{2}\ ,\ y>1$$

$$\Leftrightarrow 3x=\ln\frac{y-1}{2}+2,\ y>1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\ln\frac{y-1}{2}+\frac{2}{3},\ y>1.$$

Επομένως, $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}\ln\frac{y-1}{2}+\frac{2}{3},\ y>1$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση

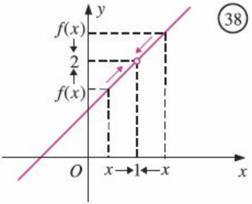
$$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}\ ,\ x>1.$$

Επανάληψη...

Η έννοια του ορίου

- Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}.$$



Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ και γράφεται

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1\,,\, x\neq 1.$$

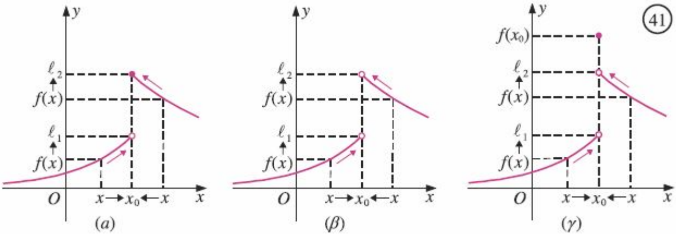
Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y=x+1$ με εξαίρεση το σημείο $A(1,2)$ (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:

"Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές $f(x)$ είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για όλα τα $x\neq 1$ που είναι αρκούντως κοντά στο 1".

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

Επανάληψη...



Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell}$$

Επανάληψη...

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1 $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

2. $\lim_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$

3. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

4 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

5 $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$

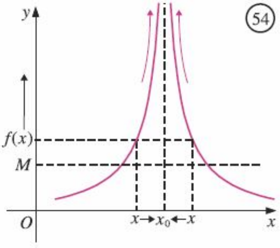
6 $\lim_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0.

Επανάληψη...

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

— Στο σχήμα 54 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε

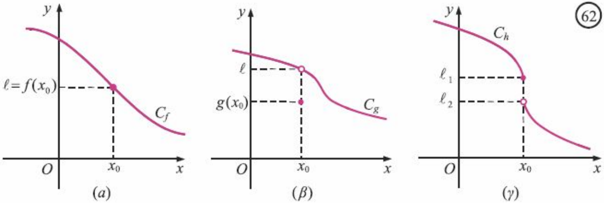
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$



Επανάληψη...

Ορισμός της συνέχειας

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Παρατηρούμε ότι:

— Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

— Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 αλλά

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \neq g(x_0).$$

— Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Επανάληψη...

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Επανάληψη... Παραδείγματα

• Πεδίο ορισμού συνάρτησης:
Φροντίζουμε για τους περιορισμούς της ανεξάρτητης μεταβλητής στους πραγματικούς αριθμούς, ώστε:

- Παρονομαστής διάφορος του μηδενός
- Υπόριζη ποσότητα μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός
- Λογαριθμιζόμενες ποσότητες μεγαλύτερες του μηδενός
- Βάση θετική ή μη αρνητική για δυνάμεις με εκθέτη μη ακέραιο

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$
Η συνάρτηση ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς όταν και μόνο όταν $1 - \ln x \geq 0$, άρα

$$1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e \Leftrightarrow 0 < x \leq e$$

δηλαδή το πεδίου ορισμού είναι το $A = (0, e]$.

Επανάληψη... Παραδείγματα

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9x+8} + \ln(81-x^2)$$
Η συνάρτηση ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς όταν και μόνο όταν

- Υπόριζη ποσότητα μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, άρα $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
- Παρονομαστής διάφορος του μηδενός, άρα $x^2-9x+8 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 8$
- Η λογαριθμιζόμενη ποσότητα μεγαλύτερη του μηδενός, άρα $81-x^2 > 0$. Παρατηρούμε ότι το τριώνυμο έχει -1 συντελεστή στο x^2 και επίσης ρίζες το ± 9. Από θεωρία γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του συντελεστή -1 εντός των ριζών και εκτός αυτών είναι ομόσημο του -1. Συνεπώς $81-x^2 > 0 \Leftrightarrow -9 < x < 9$.

Δηλαδή το πεδίου ορισμού είναι το $A = [2,8) \bigcup (8,9)$.

Επανάληψη... Παραδείγματα

- Όρια συνάρτησης:

Το όριο κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης στο $x_0 \in \Re$ ισούται με την αριθμητική της τιμή σε αυτό, δηλαδή

- Αν $P(x)$ πολυώνυμο, τότε $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το $\lim_{x \to 2}(5x^4 + 3x^2 - 3x + 14)$.

Πρόκειται για πολυωνυμική συνάρτηση και συνεπώς,

$$\lim_{x \to 2}(5x^4 + 3x^2 - 3x + 14) = 5 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 14 = 100.$$

Επανάληψη... Παραδείγματα

- Όρια συνάρτησης:

Αν $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα, τότε για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ έχουμε,

- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x + 32}{x^2 + 5x + 7}$.

Πρόκειται για ρητή συνάρτηση και συνεπώς,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + x + 32}{x^2 + 5x + 7} = \frac{2^3 + 2 + 32}{2^2 + 5 \cdot 2 + 7} = \frac{42}{21} = 2.$$

Επανάληψη... Παραδείγματα

- Όρια συνάρτησης:

Στην περίπτωση όπου $Q(x_0) = 0$, τότε δουλεύουμε όπως στο παράδειγμα:

Παράδειγμα: Να βρεθεί το $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$.

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to 1} \left(x^2 - 2x + 1\right) = 0$ και $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$ για κάθε x κοντά στο 1, άρα

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = +\infty.$$

Επανάληψη... Παραδείγματα

- Όρια συνάρτησης:

Αν x_0 είναι κοινή ρίζα των όρων της ρητής συνάρτησης $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, τότε θα οδηγηθούμε σε απροσδιοριστία $\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \dfrac{0}{0}$. Σε αυτή την περίπτωση αποφεύγουμε την απροσδιοριστία βρίσκοντας το όριο,

- $$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)G(x)}{(x-x_0)H(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{G(x)}{H(x)}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$.

Παρατηρούμε ότι για $x=2$ μηδενίζεται και αριθμητής και παρονομαστής οπότε,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-5} = \frac{2+3}{2-5} = -\frac{5}{3}.$$

Επανάληψη... Παραδείγματα

- Όρια συνάρτησης:

Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο τον πραγματικό αριθμό k, τότε το όριο της απόλυτης τιμής τιμής της f ισούται με την απόλυτη τιμή του ορίου της f, δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \to x_0} f(x) \right| = |k|.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το $\lim_{x \to 1} |x^3 - 4x^2 - 7x - 20|$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε,

$$\lim_{x \to 1} |x^3 - 4x^2 - 7x - 20| = \left| \lim_{x \to 1} (x^3 - 4x^2 - 7x - 20) \right| =$$
$$= \left| 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 - 20 \right| = |-30| = 30.$$

Επανάληψη... Παραδείγματα

- Όρια συνάρτησης:

Παρατήρηση: Παρόμοια τεχνική χρησιμοποιούμαι και στις ρίζες, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{k}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Παράδειγμα: Δείξτε ότι αν $f(x) = \sqrt{4x^2 + 7x + 5} + \sqrt[3]{x^4 + 7}$ τότε, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 6$.

Επανάληψη... Παραδείγματα

- Όρια συνάρτησης:

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ έχουν σε κάθε πραγματικό αριθμό x_0, που ανήκει στο πεδίο ορισμού τους, όριο ίσο με την αριθμητική τους τιμή σε αυτό. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0,$$

$$\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0, x_0 \neq k\pi + \pi/2, k \in Z, \quad \lim_{x\to x_0} \cot x = \cot x_0, x_0 \neq k\pi.$$

Δύο σημαντικά όρια είναι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Παραδείγματα: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1.$ Επίσης

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Επανάληψη... Παραδείγματα

- Όρια συνάρτησης:

Το όριο στο $+\infty$ ή $-\infty$ κάθε πολυωνύμου, βαθμού $n \in N^*$, ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου σε αυτό.

Παραδείγματα:

- $\lim_{x\to\infty}\left(7x^3 - 8x^2 + 6x - 2\right) = \lim_{x\to\infty}\left(7x^3\right) = +\infty.$
- $\lim_{x\to-\infty}\left(5x^7 - 7x^2 + 9x - 2\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(5x^7\right) = -\infty.$

Το όριο κάθε ρητής συνάρτησης στο $+\infty$ ή $-\infty$ ισούται με το όριο του λόγου του μεγιστοβάθμιου όρου του αριθμητή προς τον μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή σε αυτό.

Παραδείγματα:

- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 - 7x + 1}{5x^2 - 6} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{5x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{5} = +\infty.$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 - 7x + 1}{5x^3 - 6} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{5x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$

Έννοια της παραγώγου

Μία από τις σημαντικότερες έννοιες των Μαθηματικών είναι η παράγωγος η οποία μας δίνει το ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης.

• Την έχουμε ήδη συναντήσει ως την στιγμιαία ταχύτητα $v(t_0)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 αφού,

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}.$$

Έννοια της παραγώγου

• Την έχουμε ήδη συναντήσει ως την κλίση της εφαπτομένης μιας καμπύλης $y = f(x)$ σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ αφού,

$$\text{Κλίση εφαπτομένης:} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός συνήθως τον ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης λ. Η κλίση της f στο x_0 ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη ευθεία με τον οριζόντιο άξονα xx'.
Η εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο A είναι,

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0), \quad \text{όπου} \quad \lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Παράγωγος συνάρτησης μίας μεταβλητής

Ορισμός

Έστω η συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1}$$

αν υπάρχει, είναι η παράγωγος της $f(x)$ στο σημείο x_0.

Σε περίπτωση που το όριο υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της $f(x)$ τότε μιλάμε για την παράγωγο συνάρτηση της $f(x)$, την οποία θα συμβολίζουμε με

$$f'(x) \quad \text{ή} \quad \frac{df}{dx}.$$

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

Έστω x ανεξάρτητη μεταβλητή, τότε:

- $(c)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\etaμx)' = \sigmaυνx$ ή $(\sin x)' = \cos x$
- $(\sigmaυνx)' = -\etaμx$ ή $(\cos x)' = -\sin x$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$

Κανόνες παραγώγισης

Έστω δύο συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο x_0. Τότε ισχύουν οι εξής κανόνες:

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Παραδείγματα παραγώγισης

Να βρεθούν οι πρώτες παράγωγοι, ως προς x, των συναρτήσεων:

$$f(x) = 2\sin x + 3\ln x, \quad g(x) = x^3 - e^x, \quad h(x) = \frac{x^2}{e^x}.$$

Λύση:

Σύμφωνα με τους κανόνες παραγώγισης θα έχουμε,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\sin x + 3\ln x)' = (2\sin x)' + (3\ln x)' = 2(\sin x)' + 3(\ln x)' = \\ &= 2\cos x + 3\frac{1}{x} = 2\cos x + \frac{3}{x}. \end{aligned}$$

Για τη δεύτερη συνάρτηση,

$$g'(x) = \left(x^3 - e^x\right)' = \left(x^3\right)' - (e^x)' = 3x^2 - e^x.$$

Τέλος για την τρίτη συνάρτηση θα έχουμε,

$$h'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{\left(x^2\right)' e^x - x^2\,(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2x\,e^x - x^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{x(2-x)}{e^x}.$$

Παραδείγματα παραγώγισης

Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = xe^x$.

Λύση:

Σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου θα έχουμε,

$$f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x.$$

Η δεύτερη παράγωγος αντίστοιχα θα είναι,

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = ((x+1)e^x)' = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' = \\ &= (1+0)e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x. \end{aligned}$$

Πόσο κάνει η νιοστή παράγωγος;

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x.$$

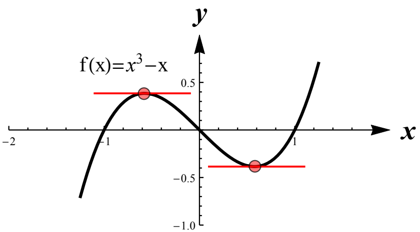
Παράγωγος συνάρτησης μίας μεταβλητής

Παρατήρηση 1: Όπως είδαμε λίγο πριν η εξίσωση της εφαπτομένης $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$ μπορεί να γραφεί πλέον $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Παρατήρηση 2: Αν η παράγωγος μίας συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η εφαπτομένη ευθεία είναι οριζόντια (παράλληλη στον xx' άξονα) και δίνεται από τη σχέση,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - f(x_0) = 0(x - x_0) \Rightarrow y = f(x_0).$$

Παράγωγος συνάρτησης μίας μεταβλητής



Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$ και η παράγωγος της $f'(x) = 3x^2 - 1$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, η εξίσωση της εφαπτομένης όπου είναι παράλληλη στον οριζόντιο $x-$άξονα.

Για να υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη θα πρέπει $f'(x) = 0$ δηλαδή $3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{3}$. Άρα έχουμε δύο εφαπτόμενες ευθείες στα $x_1 = 1/\sqrt{3}$ και $x_2 = -1/\sqrt{3}$ με εξισώσεις

$y_1 = f(x_1) = \left(1/\sqrt{3}\right)^3 - 1/\sqrt{3} = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ και

$y_2 = f(x_2) = \left(-1/\sqrt{3}\right)^3 + 1/\sqrt{3} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ αντίστοιχα.

Συμβολισμός παραγώγου

Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$. Θα συμβολίζουμε την παράγωγο της ως:

$y = f(x) \Longrightarrow y' = f'(x)$ ή ισοδύναμα $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

Για παράδειγμα:

$y(x) = \ln x, x > 0 \Longrightarrow (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ ή ισοδύναμα $\dfrac{d \ln x}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$y(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \Longrightarrow \dfrac{d(x^3 + 2x^2 - 5x + 6)}{dx} = 3x^2 + 4x - 5$ ή

αλλιώς $\dfrac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 - 5x + 6) = 3x^2 + 4x - 5$.

$y(x) = a^x, a > 0 \Longrightarrow \dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ ή $\dfrac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$.

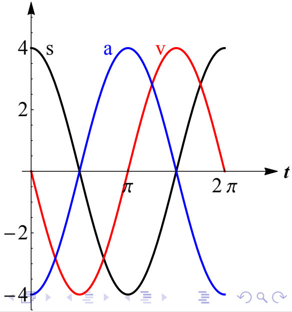
Άσκηση

Με χρήση του νέου συμβολισμού να λύσετε την άσκηση: Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση $s = f(t) = 4\text{συν}t$. Βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση:

Η ζητούμενη ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι:

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4\text{συν}t) = 4\frac{d}{dt}(\text{συν}t) = -4\text{ημ}t \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4\text{ημ}t) = -4\frac{d}{dt}(\text{ημ}t) = -4\text{συν}t. \end{aligned}$$



Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την παράγωγο των συναρτήσεων $y_1 = \text{ημ}\theta$ όταν $\theta = 2x$ και $y_2 = \sqrt{x^2+1}$.

Σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε σύνθετες συναρτήσεις και η παραγώγιση τους υπακούει στον παρακάτω κανόνα.

Έστω ότι η συνάρτηση $\theta = g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x και η $y = f(\theta)$ είναι παραγωγίσιμη στο θ. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) .$$

Έτσι η παράγωγος της y_1 θα είναι,

$$y_1' = (\text{ημ}\theta)' \cdot \theta' = (\text{ημ}2x)' \cdot (2x)' = \text{συν}2x \cdot 2 = 2\text{συν}2x.$$

Αντίστοιχα η παράγωγος της y_2 είναι,

$$y_2' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' \cdot \left(x^2+1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης

Παράδειγμα: Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x) = e^{\cos x}$ και $g(x) = x^3 \cdot \ln x^2 + \dfrac{\sqrt{x}}{x}, \quad x > 0.$

Έχουμε σύνθετες συναρτήσεις συνεπώς η παράγωγος τους θα είναι:

$$f'(x) = (e^{\cos x})' = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' = -e^{\cos x} \cdot \sin x.$$

Αντίστοιχα η $g'(x)$ θα είναι:

$$g'(x) = \left(x^3 \cdot \ln x^2 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)' = (x^3)' \ln x^2 + x^3 (\ln x^2)' +$$

$$+\frac{(\sqrt{x})'x - \sqrt{x}(x)'}{x^2} = 3x^2 \ln x^2 + x^3 \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' + \frac{\left(x^{1/2}\right)' x - \sqrt{x}}{x^2} =$$

$$= 3x^2 \ln x^2 + 2x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) x - \sqrt{x}}{x^2} = 3x^2 \ln x^2 + 2x^2 + \frac{\frac{1}{2}x^{1/2} - \sqrt{x}}{x^2} =$$

$$= 3x^2 \ln x^2 + 2x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right) x^{1/2}}{x^2} = 3x^2 \ln x^2 + 2x^2 - \frac{1}{2x^{3/2}}.$$

Παραγώγιση απλής και σύνθετης συνάρτησης

Απλή συνάρτηση	Σύνθετη συνάρτηση
$(x^n)' = nx^{n-1},\ \ n = 2, 3, \ldots$	$(f^n(x))' = nf^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln f(x))' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
$(e^x)' = e^x$	$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a,\ \ 0 < a \neq 1$	$\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin f(x))' = \cos f(x) \cdot f'(x)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos f(x))' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$

Παραγώγιση σύνθετη συνάρτησης με το συμβολισμό Leibniz

Με χρήση του συμβολισμού d/dx, αφού $y = f(\theta)$ και $\theta = g(x)$, ο κανόνας της αλυσιδωτής παραγώγισης γράφεται και

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

όπου βέβαια ο υπολογισμός της $\frac{dy}{d\theta}$ έχει γίνει στο σημείο $\theta = g(x)$. Ο κανόνας αυτός λέγεται "Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης"

Με αυτόν το συμβολισμό η παράγωγος της $y_1 = ημ\theta$ όταν $\theta = 2x$ θα είναι,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dημ\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = συν\theta \cdot 2 = 2συν\theta = 2συν2x.$$

Αντίστοιχα για την $y_2 = \sqrt{x^2+1}$ είναι (τώρα έχουμε $\theta = x^2 + 1$),

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{d\sqrt{\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{\theta}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Παραδείγματα

Η παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης επεκτείνεται και για συναρτήσεις που είναι σύνθεση περισσότερων των δύο συναρτήσεων όπως για παράδειγμα αν έχουμε τις μεταβλητές x, y, θ, ϕ που συνδέονται με τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y = f(\theta)$, $\theta = g(\phi)$ και $\phi = h(x)$, τότε ο κανόνας της αλυσιδωτής παραγώγισης δίνει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dx} \, .$$

Συμβολισμός παραγώγου ανώτερης τάξης

Αν $y = f(x)$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x, τότε θα συμβολίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της με $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Αν θέλουμε να ‘αναλύσουμε’ τον συμβολισμό αυτό σε δύο παραγωγίσεις μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

εννοώντας ότι βρίσκουμε πρώτα την πρώτη παράγωγο της y ως προς x (μέσα στην παρένθεση) και το αποτέλεσμα το παραγωγίζουμε ξανά ως προς x.

Γενικά τη n-οστή παράγωγο του y ως προς x (δηλ. $y^{(n)}$) θα τη συμβολίζουμε με $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ ή $\dfrac{d^n}{dx^n}(y)$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ της συνάρτησης $y = x/(x-1)$.

Λύση

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

άρα θα βρούμε πρώτα την πρώτη παράγωγο, δηλαδή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{(x)'(x-1) - x\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

οπότε τώρα ξανά παραγωγίζουμε και θα έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{-1}{(x-1)^2}\right] =$$

$$\frac{(-1)'(x-1)^2 - (-1)\left[(x-1)^2\right]'}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Παραγώγιση ειδικών συναρτήσεων

Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

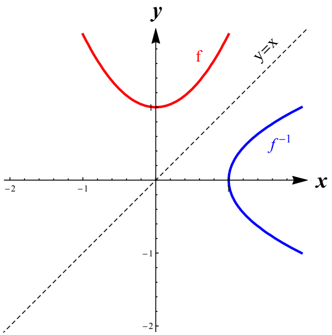
Έστω η πραγματική συνάρτηση $f(x)$ που είναι ορισμένη, συνεχής και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ και $f'(x_0) \neq 0$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο σημείο $y_0 = f(x_0)$ και είναι

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $y = f(x) = x^2 + 1$, $x > 0$.
Σύμφωνα με τον κανόνα η ζητούμενη παράγωγος θα είναι $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ οπότε

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{άρα} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x}$$

Παραγώγιση ειδικών συναρτήσεων



Παραγώγιση ειδικών συναρτήσεων

Ορισμός πεπλεγμένης συνάρτησης

Κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x, y) = 0$ ονομάζεται πεπλεγμένη συνάρτηση (πεπλεγμένη σχέση). Και η συνάρτηση $y = f(x) \Rightarrow y - f(x) = 0$ θεωρείται πεπλεγμένη συνάρτηση.

Είναι η πεπλεγμένη συνάρτηση μία συνάρτηση δύο μεταβλητών;

• Για να βρούμε την παράγωγο μιας πεπλεγμένης συνάρτησης, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της έμμεσης παραγώγισης.
Δεν ξεχνάμε ότι η y είναι συνάρτηση του x (και βέβαια η x συνάρτηση του y).

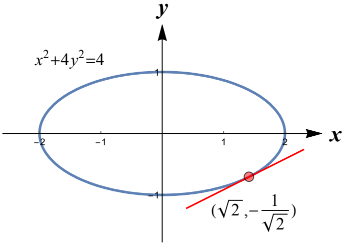
Παραγώγιση πεπλεγμένης συνάρτησης

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η παράγωγος y' (ή $\dfrac{dy}{dx}$) της συνάρτησης $y^3 + xy + y^2 - 5y - x^2 = -3$.

$$
\begin{aligned}
&(y^3)' + (xy)' + \left(y^2\right)' - 5(y)' - \left(x^2\right)' = (-3)' \Rightarrow \\
&3y^2y' + 1 \cdot y + xy' + 2yy' - 5y' - 2x = 0 \Rightarrow \\
&y'(3y^2 + x + 2y - 5) = 2x - y \Rightarrow \\
&y' = \frac{2x - y}{3y^2 + x + 2y - 5}, \qquad 3y^2 + x + 2y - 5 \neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Υπάρχει παράγωγος dy/dx για την $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

Σχεδιάζουμε την καμπύλη: $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$



Παραγωγίζουμε την εξίσωση της καμπύλης (1) ως προς x οπότε προκύπτει $2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$. Λύνουμε ως προς την παράγωγο, $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y}$ και συνεπώς στο σημείο $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$ η κλίση θα είναι $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

- Για να δείτε το πλεονέκτημα της έμμεσης παραγώγισης λύστε την ίδια άσκηση χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

Λογαριθμική παραγώγιση

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση που χρησιμοποιούμε την λογαριθμική παραγώγιση είναι όταν έχουμε συνάρτηση της μορφής $y = f(x)^{g(x)}$ και εν γένει συναρτήσεις με σύνθετους τύπους που περιέχουν γινόμενα, δυνάμεις, ρίζες και πηλίκα.

Πρώτα λογαριθμούμε και μετά κάνουμε έμμεση παραγώγιση.

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln\left[\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\right] = \ln[x^{3/4}\sqrt{x^2+1}] - \ln[(3x+2)^5] \\ \Rightarrow \ln y &= \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2) \end{aligned} \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε (έμμεση παραγώγιση) την (1) ως προς x.

Λογαριθμική παραγώγιση

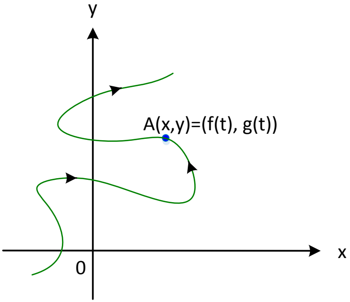
$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left[\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\right] = \ln[x^{3/4}\sqrt{x^2+1}] - \ln[(3x+2)^5] \\
\Rightarrow \ln y &= \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Παραγωγίζουμε (έμμεση παραγώγιση) την (1) ως προς x.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2} \Rightarrow \\
\frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right) \Rightarrow \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right).
\end{aligned}$$

Άσκηση: Να βρεθεί με λογαριθμική παραγώγιση η dy/dx της $y = x^3$.

Παραμετρικές εξισώσεις



$$y = f(x) \tag{1}$$

$$x = f(t), \quad y = g(t) \tag{2}$$

Αν x και y είναι συναρτήσεις μίας τρίτης μεταβλητής t, τότε οι (2) που περιγράφουν την C λέγονται:

Παραμετρικές Εξισώσεις

Τι παριστάνουν οι παραμετρικές $x = r\cos t, \quad y = r\sin t$;

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad \text{κύκλο}$$

Παραγώγιση παραμετρικών εξισώσεων

Πρόταση

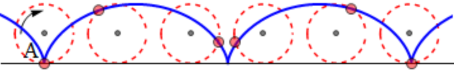
Έστω οι παραμετρικές εξισώσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $t \in (a, b)$ και ταυτόχρονα η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο ίδιο διάστημα (η μονοτονία χρειάζεται στην απόδειξη). Τότε το y είναι συνάρτηση του x και η πρώτη παράγωγος dy/dx δίνεται από τη σχέση

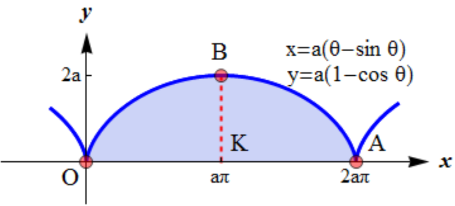
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \qquad \frac{dx}{dt} \neq 0 .$$

Άσκηση

Να υπολογισθεί η παράγωγος dy/dx των παραμετρικών εξισώσεων $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ όταν $a > 0$.

Κυκλοειδής καμπύλη: Ίχνος σημείου A, από κύκλο ακτίνας a.





$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

αλλά

$$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta,$$
$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$$

άρα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$