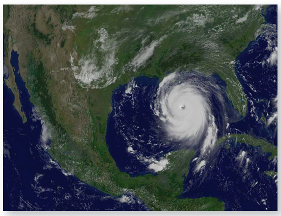
14 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε τις έννοιες και τις τεχνικές του διαφορικού Λογισμού στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Όπως θα διαπιστώσουμε, μια συνάρτηση f, η οποία εξαρτάται από δύο ή περισσότερες μεταβλητές, δεν διαθέτει μία μόνο παράγωγο, αλλά ένα σύνολο από *μερικές παραγώγους*, και πιο συγκεκριμένα μία για κάθε μεταβλητή. Αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι οι συνιστώσες του διανύσματος της κλίσης, το οποίο μας παρέχει πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τη «συμπεριφορά» της συνάρτησης. Στις δύο τελευταίες ενότητες του κεφαλαίου θα χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που θα έχουμε στο μεταξύ αναπτύξει στο υπόλοιπο κεφάλαιο για να μελετήσουμε το ζήτημα της βελτιστοποίησης των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Η κυκλοφορία που εμφανίζεται στα συστήματα του καιρού γύρω από τις περιοχές χαμηλής πίεσης μπορεί να γίνει κατανοητή με τη βοήθεια του διανύσματος της κλίσης (βαθμίδας), ενός σημαντικού εργαλείου που αναδύεται στο πλαίσιο της παραγώγισης των πολυμεταβλητών συναρτήσεων.



14.1 Συναρτήσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές

Ένα οικείο παράδειγμα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών είναι το εμβαδόν A ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που είναι ίσο με το γινόμενο της βάσης του x επί το ύψος του y, ίσο δηλαδή με xy. Πιο συγκεκριμένα, γράφουμε:

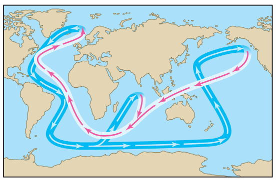
$$A(x, y) = xy$$

ή $A = f(x, y)$, όπου $f(x, y) = xy$. Ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών είναι η απόσταση από το σημείο $P = (x, y, z)$ μέχρι την αρχή των αξόνων που είναι:

$$g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ένα άλλο σημαντικό, αλλά λιγότερο οικείο παράδειγμα, είναι η περίπτωση της πυκνότητας του θαλασσινού νερού, που συμβολίζουμε με ρ, η οποία είναι συνάρτηση της αλμυρότητας S και της θερμοκρασίας T και είναι παράγοντας-κλειδί για τον σχηματισμό και την κυκλοφορία των ωκεάνιων θαλάσσιων ρευμάτων (βλ. Σχήμα 1). Αν και δεν υπάρχει κάποιος απλός τύπος για τη συνάρτηση $\rho(S, T)$, οι επιστήμονες είναι σε θέση να προσδιορίζουν τις τιμές της συνάρτησης αυτής πειραματικά. Σύμφωνα με τον Πίνακα 1, αν $S = 32$ (σε μέρη στις χιλιάδες ή αλλιώς ppt) και $T = 10°\text{C}$, τότε

$$\rho(32, 10) = 1.0246 \text{ kg/m}^3$$



Σχήμα 1 Το παγκόσμιο κλίμα επηρεάζεται από τα ρεύματα μεταφοράς που εμφανίζονται στους ωκεανούς της Γης. Πρόκειται για ένα σύστημα ρευμάτων μεγάλου βάθους που οφείλουν την ύπαρξή τους στις μεταβολές της πυκνότητας του θαλασσινού νερού.

Πίνακας 1 Πυκνότητα του θαλασσινού νερού ρ σε kg/m^3 ως συνάρτηση της θερμοκρασίας και της αλμυρότητας

	Αλμυρότητα (ppt)		
°C	32	32.5	33
5	1.0253	1.0257	1.0261
10	1.0246	1.0250	1.0254
15	1.0237	1.0240	1.0244
20	1.0224	1.0229	1.0232

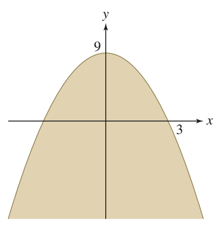
Μια συνάρτηση n μεταβλητών είναι μια συνάρτηση f η οποία αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $f(x_1, \ldots, x_n)$ σε κάθε n-άδα $(x_1, \ldots, x_n)$ από ένα πεδίο ορισμού του χώρου $\mathbf{R}^n$. Ορισμένες φορές γράφουμε $f(P)$ για να δηλώσουμε την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο $P = (x_1, \ldots, x_n)$. Όταν η συνάρτηση f ορίζεται από μια αλγεβρική σχέση που εμπλέκει τα $x_1, \ldots, x_n$, συνήθως θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της το σύνολο όλων των n-άδων $(x_1, \ldots, x_n)$ για τις οποίες ορίζεται η $f(x_1, \ldots, x_n)$. Το εύρος των τιμών της f είναι το σύνολο όλων των τιμών $f(x_1, \ldots, x_n)$ για τις n-άδες $(x_1, \ldots, x_n)$ που ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Αφού θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στις συναρτήσεις δύο ή τριών μεταβλητών, θα επιλέξουμε να συμβολίζουμε συχνά τις μεταβλητές ως x, y και z (αντί για x_1, x_2 και x_3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Να σχεδιάσετε το πεδίο ορισμού για καθεμία από τις συναρτήσεις:
α) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y}$ β) $g(x, y, z) = x\sqrt{y} + \ln(z - 1)$.
Ποιο είναι το εύρος των τιμών αυτών των συναρτήσεων;

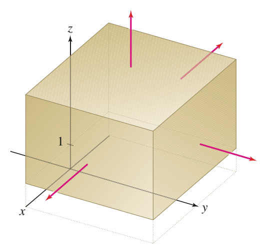
Λύση α) Η $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y}$ ορίζεται μόνο όταν $9 - x^2 - y \geq 0$, ή αλλιώς όταν $y \leq 9 - x^2$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αποτελείται από το σύνολο των σημείων (x, y) που κείτονται πάνω στην παραβολή $y = 9 - x^2$ ή κάτω από αυτήν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2α. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού θα είναι:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : y \leq 9 - x^2\}$$

Για να προσδιορίσουμε το εύρος των τιμών της συνάρτησης f, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η f παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές και επιπλέον ότι $f(0, y) = \sqrt{9-y}$. Από τη στιγμή που η ποσότητα $9-y$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός αριθμός, η $f(0, y)$ παίρνει επίσης όλες τις μη αρνητικές τιμές, επομένως το εύρος τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $[0, \infty)$.



(α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y}$
είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται πάνω στην παραβολή $y = 9 - x^2$ ή κάτω από αυτήν



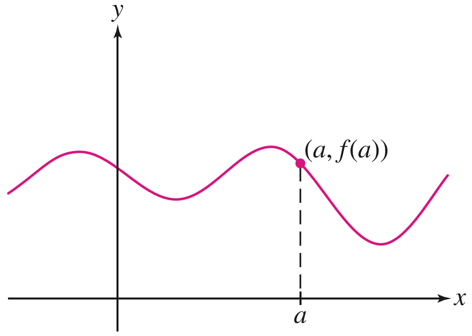
(β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
$g(x, y, z) = x\sqrt{y} + \ln(z - 1)$
είναι το σύνολο των σημείων με $y \geq 0$ και $z > 1$. Το πεδίο ορισμού εκτείνεται μέχρι το άπειρο στις κατευθύνσεις που δείχνουν τα βέλη.

Σχήμα 2

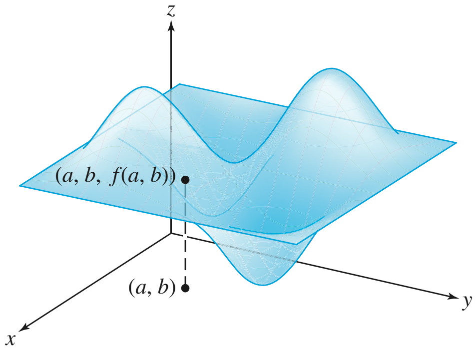
β) Η συνάρτηση $g(x, y, z) = x\sqrt{y} + \ln(z-1)$ ορίζεται μόνο όταν οι όροι $\sqrt{y}$ και $\ln(z-1)$ ορίζονται ταυτόχρονα. Επομένως, θα πρέπει $y \geq 0$ και $z > 1$, γεγονός που σημαίνει ότι το ζητούμενο πεδίο ορισμού είναι το $\{(x, y, z) : y \geq 0, z > 1\}$ (βλ. Σχήμα 2β). Το εύρος τιμών της συνάρτησης g είναι ολόκληρη η ευθεία των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$. Πράγματι, αν επιλέξουμε τις τιμές $y = 1$ και $z = 2$, προκύπτει η συνάρτηση $g(x, 1, 2) = x + \ln 1 = x$ και αφού το x παίρνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, αυτό σημαίνει ότι και η συνάρτηση g θα παίρνει όλες τις τιμές της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων με δύο μεταβλητές

Στην περίπτωση του Λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γραφικές παραστάσεις για να οπτικοποιήσουμε τα πιο σημαντικά από τα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης (βλ. Σχήμα 3α). Οι γραφικές παραστάσεις παίζουν έναν παρόμοιο ρόλο και στην περίπτωση των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές. Το γράφημα μιας συνάρτησης f δύο μεταβλητών αποτελείται από το σύνολο των σημείων $(a, b, f(a, b))$ του χώρου $\mathbf{R}^3$ για όλα τα ζεύγη τιμών (a, b) που ανήκουν στο πεδίο ορισμού $\mathcal{D}$ της f. Υποθέτοντας ότι η f είναι συνεχής (η έννοια της συνέχειας στην πολυμεταβλητή ανάλυση θα οριστεί στην επόμενη ενότητα), το γράφημα είναι μια επιφάνεια το ύψος της οποίας πάνω ή κάτω από το επίπεδο xy στο (a, b) είναι η τιμή της συνάρτησης $f(a, b)$ (βλ. Σχήμα 3β). Πολύ συχνά γράφουμε $z = f(x, y)$ προκειμένου να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι η z συντεταγμένη ενός σημείου του γραφήματος είναι συνάρτηση των x και y.



(α) Γραφική παράσταση της $y = f(x)$



(β) Γραφική παράσταση της $z = f(x, y)$

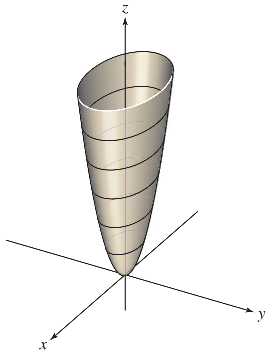
Σχήμα 3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

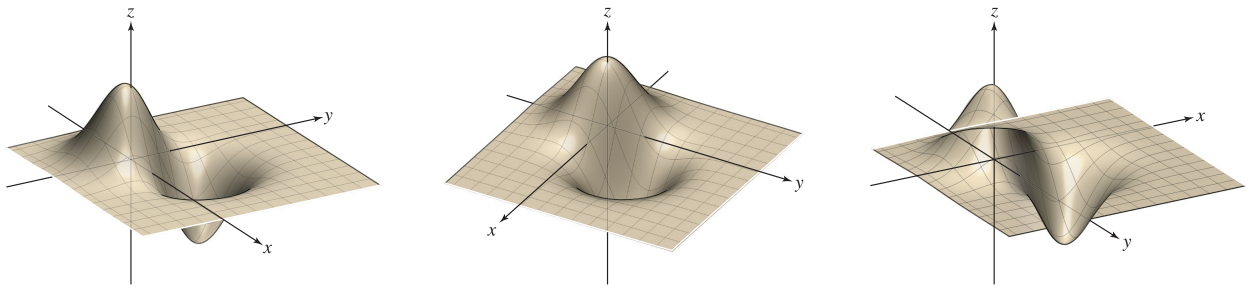
$$f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$$

Λύση Το γράφημα είναι η παραβολοειδής επιφάνεια που φαίνεται στο Σχήμα 4, την οποία μελετήσαμε στο πλαίσιο της Ενότητας 12.6. Θα σχεδιάσουμε το γράφημα εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η οριζόντια εγκάρσια τομή σε ύψος $z = c$ είναι η έλλειψη με εξίσωση $2x^2 + 5y^2 = c$.



Σχήμα 4 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$

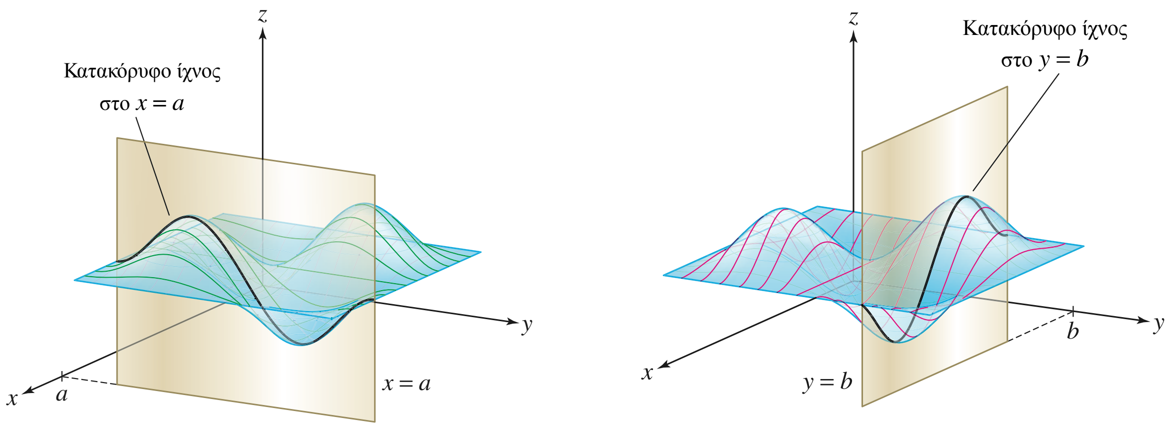
Ο σχεδιασμός πιο πολύπλοκων γραφικών παραστάσεων με το χέρι μπορεί να είναι εξαιρετικά δύσκολος. Ευτυχώς, η τεχνολογία των γραφικών (για παράδειγμα οι αριθμομηχανές με δυνατότητες γραφικών και τα υπολογιστικά συστήματα άλγεβρας) μας έχει απελευθερώσει από αυτό το βάρος και έχει βελτιώσει, σε σημαντικό βαθμό, την ικανότητά μας να εξερευνούμε γραφικά τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Έτσι, σήμερα είμαστε πλέον σε θέση να περιστρέφουμε τα γραφήματα τέτοιων συναρτήσεων, αλλά και να τα παρατηρούμε από διαφορετικές προοπτικές (βλ. Σχήμα 5).



Σχήμα 5 Διαφορετικές προοπτικές της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x, y) = e^{-x^2-y^2} - e^{-(x-1)^2-(y-1)^2}$

Ίχνη

Ένας τρόπος μέσω του οποίου μπορούμε να αναλύσουμε το γράφημα μιας συνάρτησης $f(x, y)$ είναι σταθεροποιώντας («παγώνοντας») τη συντεταγμένη x, θέτοντας για παράδειγμα $x = a$ και εξετάζοντας την προκύπτουσα καμπύλη που περιγράφεται από την $z = f(a, y)$. Παρομοίως, μπορούμε να θέσουμε $y = b$ και να μελετήσουμε την καμπύλη $z = f(x, b)$. Οι καμπύλες αυτού του είδους είναι γνωστές ως **κατακόρυφα ίχνη**, καθώς προκύπτουν από την τομή της γραφικής παράστασης με επίπεδα που είναι παράλληλα σε ένα από τα κατακόρυφα επίπεδα συντεταγμένων (βλ. Σχήμα 6).



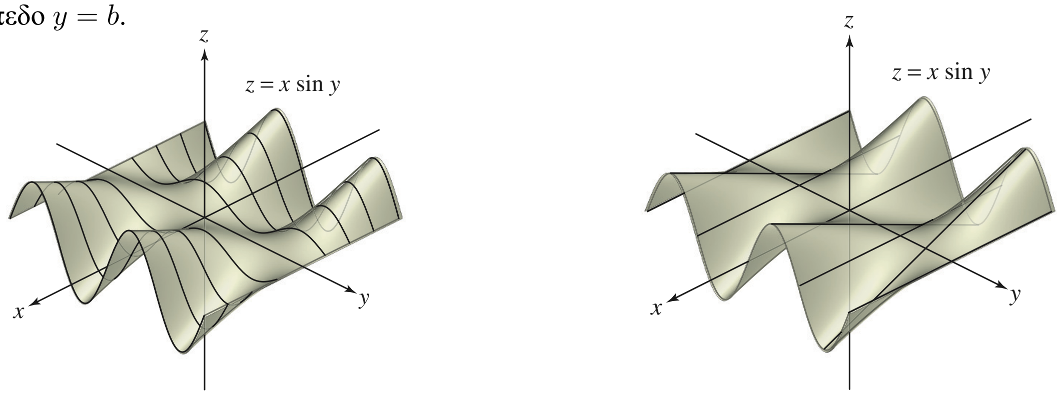
(α) Κατακόρυφα ίχνη παράλληλα στο επίπεδο yz (β) Κατακόρυφα ίχνη παράλληλα στο επίπεδο xz

Σχήμα 6

- **Κατακόρυφο ίχνος στο επίπεδο $x = a$:** Προκύπτει από την τομή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με το κατακόρυφο επίπεδο $x = a$ και αποτελείται από το σύνολο των σημείων της μορφής $(a, y, f(a, y))$.
- **Κατακόρυφο ίχνος στο επίπεδο $y = b$:** Προκύπτει από την τομή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με το κατακόρυφο επίπεδο $y = b$ και αποτελείται από το σύνολο των σημείων της μορφής $(x, b, f(x, b))$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Να περιγράψετε τα κατακόρυφα ίχνη της συνάρτησης $f(x, y) = x(\sin y)$.

Λύση Όταν «παγώσουμε» τη συντεταγμένη x, θέτοντας $x = a$, προκύπτει η καμπύλη-ίχνος $z = a(\sin y)$ (βλ. Σχήμα 7). Πρόκειται για μια ημιτονοειδή καμπύλη με πλάτος ίσο με $|a|$, που κείτεται στο επίπεδο $x = a$. Όταν θέσουμε $y = b$, τότε προκύπτει η ευθεία $z = x(\sin b)$, με κλίση ίση με $\sin b$, η οποία βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $y = b$.



(α) Τα ίχνη στα επίπεδα $x = a$ είναι οι καμπύλες $z = a(\sin y)$

(β) Τα ίχνη στα επίπεδα $y = b$ είναι οι καμπύλες $z = x(\sin b)$

Σχήμα 7 Κατακόρυφα ίχνη της συνάρτησης $f(x, y) = x(\sin y)$

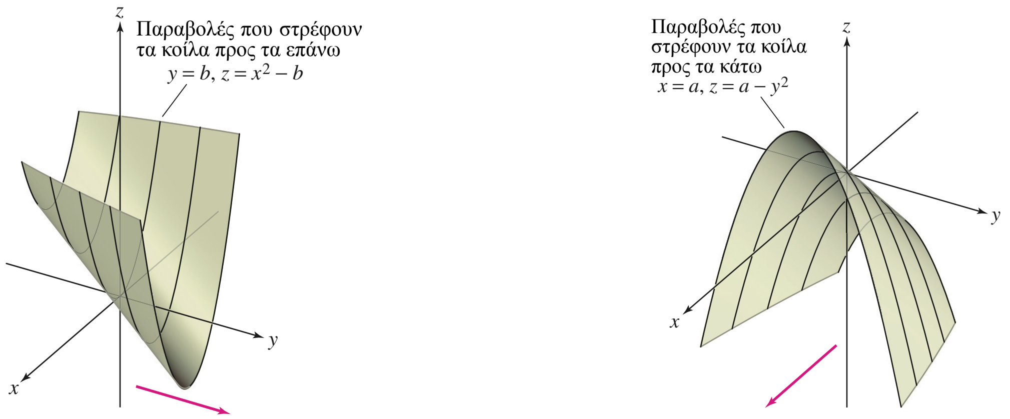
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Αναγνώριση ορισμένων χαρακτηριστικών του γραφήματος μιας συνάρτησης

Να αντιστοιχίσετε τα γραφήματα του Σχήματος 8 με τις ακόλουθες συναρτήσεις:

α) $f(x, y) = x - y^2$ β) $g(x, y) = x^2 - y$.

Λύση Ας προσπαθήσουμε να συγκρίνουμε τα κατακόρυφα ίχνη των δύο συναρτήσεων. Το κατακόρυφο ίχνος της $f(x, y) = x - y^2$ στο επίπεδο $x = a$ είναι η παραβολή $z = a - y^2$ που στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και επομένως αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση (β). Από την άλλη, το κατακόρυφο ίχνος της $g(x, y)$ στο επίπεδο $y = b$ είναι η παραβολή $z = x^2 - b$ που στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, επομένως αντιστοιχεί στο γράφημα (α).

Παρατηρήστε επίσης ότι η $f(x, y) = x - y^2$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του x [αυτό σημαίνει ότι η $f(x, y)$ αυξάνεται καθώς αυξάνεται το x], όπως στο σχήμα (β), ενώ η $g(x, y) = x^2 - y$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του y, όπως στο σχήμα (α).



(α) Οι τιμές της συνάρτησης φθίνουν προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα y

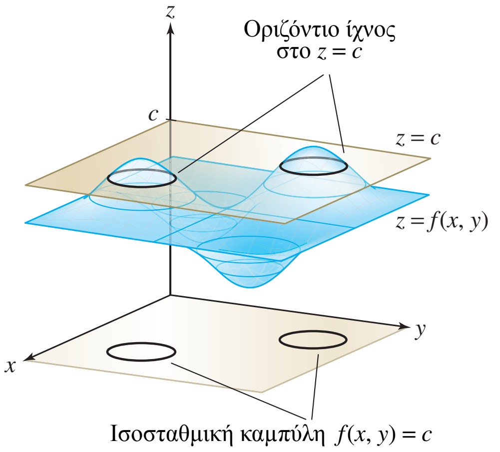
(β) Οι τιμές της συνάρτησης αυξάνονται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x

Σχήμα 8

Ισοσταθμικές καμπύλες και ισοσταθμικοί χάρτες

Πέραν των κατακόρυφων ιχνών, τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x, y)$ έχουν και οριζόντια ίχνη. Τα οριζόντια ίχνη, αλλά και οι συνδεόμενες με αυτά ισοσταθμικές καμπύλες, είναι εξαιρετικά σημαντικά κατά την ανάλυση της συμπεριφοράς μιας συνάρτησης (βλ. Σχήμα 9):

- **Οριζόντιο ίχνος σε ύψος c:** Προκύπτει από την τομή της γραφικής παράστασης με το οριζόντιο επίπεδο $z = c$, αποτελείται δε από το σύνολο των σημείων της μορφής $(x, y, f(x, y))$ που είναι τέτοια ώστε να ισχύει $f(x, y) = c$.
- **Ισοσταθμική καμπύλη:** Η καμπύλη $f(x, y) = c$ στο επίπεδο xy.



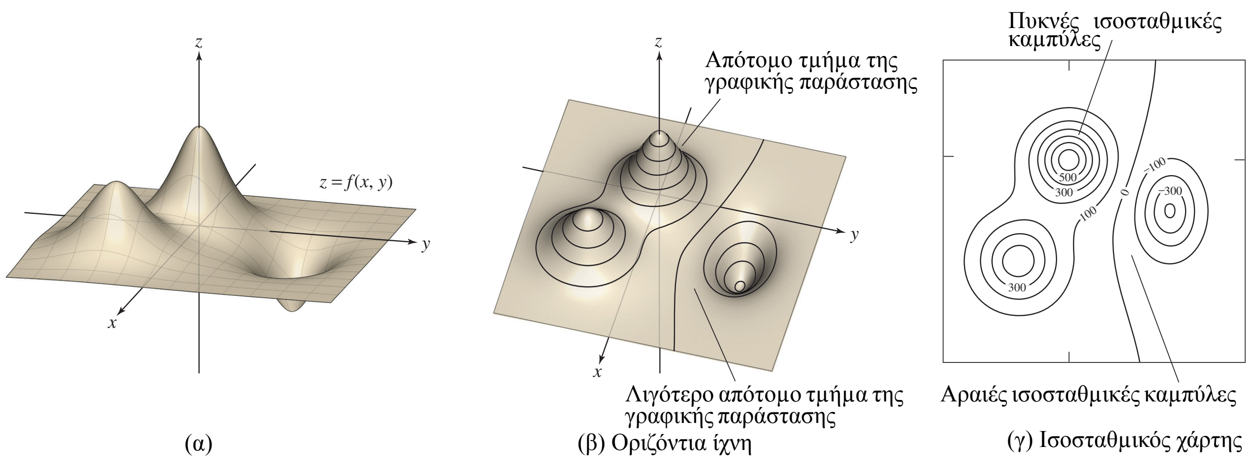
Σχήμα 9 Μια ισοσταθμική καμπύλη αποτελείται από το σύνολο των σημείων (x, y) για τα οποία η συνάρτηση παίρνει την ίδια τιμή c

Επομένως, η ισοσταθμική καμπύλη που αντιστοιχεί στην τιμή c αποτελείται από όλα εκείνα τα σημεία (x, y) στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f στο επίπεδο xy για τα οποία η συνάρτηση παίρνει την τιμή c. Κάθε ισοσταθμική καμπύλη είναι η προβολή πάνω στο επίπεδο xy του οριζόντιου ίχνους του γραφήματός της που βρίσκεται ακριβώς από πάνω της.

Ένας **ισοσταθμικός χάρτης** είναι μια «κάτοψη» στο πεδίο ορισμού επί του επιπέδου xy, που απεικονίζει τις ισοσταθμικές καμπύλες $f(x, y)=c$ για τιμές της c που ισαπέχουν. Η απόσταση m που μεσολαβεί μεταξύ των διαδοχικών τιμών της c αποκαλείται **ισοσταθμικό διάστημα**. Όταν μετακινούμαστε από τη μια ισοσταθμική καμπύλη στην επόμενη, η τιμή της συνάρτησης $f(x, y)$ (και επομένως και το ύψος της γραφικής παράστασης) μεταβάλλεται κατά $\pm m$.

*Πάνω στους ισοσταθμικούς χάρτες, οι ισοσταθμικές καμπύλες πολλές φορές αποκαλούνται και **ισοσταθμικές γραμμές**. Όταν αναφερόμαστε σε ισοσταθμικές καμπύλες ενός ισοσταθμικού χάρτη, εννοούμε τις καμπύλες που βλέπουμε πάνω στο χάρτη μας. Θα πρέπει να έχουμε όμως κατά νου ότι μεταξύ των ισοσταθμικών καμπυλών που παρουσιάζονται κάθε φορά σε έναν χάρτη υπάρχουν επιπλέον καμπύλες οι οποίες συνδέονται με άλλες τιμές της συνάρτησης f.*

Στο Σχήμα 10 φαίνεται μια σύγκριση μεταξύ του γραφήματος μιας συνάρτησης $f(x, y)$, στο (α), με τα οριζόντια ίχνη της, που παρουσιάζονται στο (β), και τον ισοσταθμικό χάρτη που απεικονίζεται στο (γ). Ο ισοσταθμικός χάρτης στο σχήμα (γ) έχει χαραχθεί με ισοσταθμικό διάστημα $m = 100$.



(α) (β) Οριζόντια ίχνη (γ) Ισοσταθμικός χάρτης

Σχήμα 10

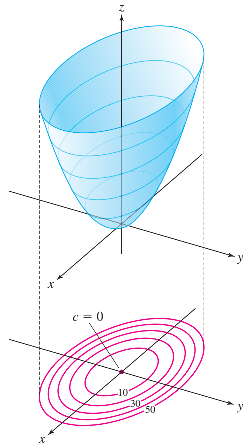
Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο ένας ισοσταθμικός χάρτης υποδηλώνει το πόσο απότομα μεταβάλλεται το γράφημα της συνάρτησης. Αν οι ισοσταθμικές καμπύλες είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη, τότε μια μικρή μετατόπιση από τη μία ισοσταθμική καμπύλη στην επόμενή της, στο επίπεδο xy, οδηγεί σε μεγάλη αλλαγή του ύψους. Με άλλα λόγια, *οι ισοσταθμικές καμπύλες διατάσσονται κοντά η μία στην άλλη όταν το γράφημα είναι απότομο* (βλ. Σχήμα 10). Αντιθέτως, το γράφημα δεν είναι τόσο απότομο, αλλά μάλλον πιο επίπεδο, όταν οι ισοσταθμικές καμπύλες απέχουν πολύ μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Ελλειπτικό παραβολοειδές Να σχεδιάσετε τον ισοσταθμικό χάρτη της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ και να σχολιάσετε την απόσταση μεταξύ των ισοσταθμικών καμπυλών.

Λύση Οι ισοσταθμικές καμπύλες έχουν εξίσωση $f(x, y) = c$, ή αλλιώς $x^2 + 3y^2 = c$.

- Για $c > 0$, η ισοσταθμική καμπύλη είναι μια έλλειψη.
- Για $c = 0$, η ισοσταθμική καμπύλη εκφυλίζεται στο σημείο $(0, 0)$ επειδή η εξίσωση $x^2 + 3y^2 = 0$ έχει ως μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = (0, 0)$.
- Δεν υπάρχει ισοσταθμική καμπύλη για $c < 0$ καθώς η $f(x, y)$ δεν μπορεί να πάρει ποτέ αρνητικές τιμές.

Το γράφημα της συνάρτησης $f(x, y)$ είναι το ελλειπτικό παραβολοειδές του Σχήματος 11. Καθώς απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων, η $f(x, y)$ αυξάνεται ολοένα και πιο γρήγορα. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα της συνάρτησης γίνεται πιο απότομο και οι ισοσταθμικές καμπύλες πλησιάζουν μεταξύ τους.



Σχήμα 11 Το γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Ο ισοσταθμικός χάρτης έχει σχεδιαστεί με διάστημα $m = 10$.

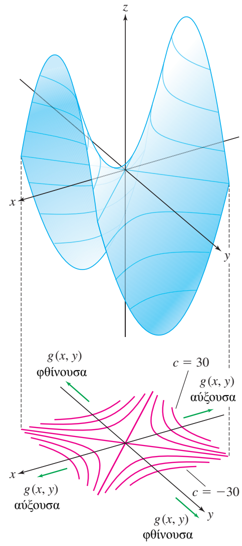
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Υπερβολικό παραβολοειδές
Να σχεδιάσετε τον ισοσταθμικό χάρτη της $g(x, y) = x^2 - 3y^2$.

Λύση Οι ισοσταθμικές καμπύλες έχουν εξίσωση $g(x, y) = c$, ή αλλιώς $x^2 - 3y^2 = c$.

- Για $c \neq 0$, η ισοσταθμική καμπύλη είναι η υπερβολή $x^2 - 3y^2 = c$.
- Για $c = 0$, η ισοσταθμική καμπύλη απαρτίζεται από δύο ευθείες, με εξισώσεις $x = \pm\sqrt{3}y$, αφού η εξίσωση $g(x, y) = 0$ παραγοντοποιείται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$x^2 - 3y^2 = (x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y) = 0$$

Το γράφημα της $g(x, y)$ είναι το υπερβολικό παραβολοειδές του Σχήματος 12. Αν «σταθούμε» στην αρχή των αξόνων, η συνάρτηση $g(x, y)$ αυξάνεται καθώς κινούμαστε κατά μήκος του άξονα x σε οποιαδήποτε από τις δύο κατευθύνσεις του ενώ μειώνεται καθώς κινούμαστε πάνω στον άξονα y σε οποιαδήποτε από τις δύο κατευθύνσεις του. Επιπλέον, το γράφημα της συνάρτησης $g(x, y)$ γίνεται περισσότερο απότομο καθώς απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων, γεγονός που σημαίνει ότι οι ισοσταθμικές καμπύλες πλησιάζουν μεταξύ τους.



Σχήμα 12 Το γράφημα της συνάρτησης $g(x, y) = x^2 - 3y^2$. Ο ισοσταθμικός χάρτης έχει σχεδιαστεί με διάστημα $m = 10$.

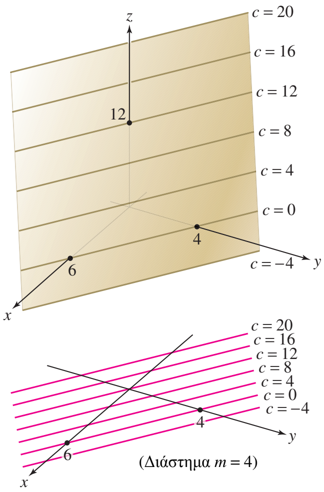
ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ *Το υπερβολικό παραβολοειδές του Σχήματος 12 πολύ συχνά αποκαλείται και «σαμαροειδής» ή «σαγματική» επιφάνεια.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Ισοσταθμικός χάρτης μιας γραμμικής συνάρτησης Να σχεδιάσετε το γράφημα της συνάρτησης $f(x,y) = 12-2x-3y$ και τον αντίστοιχο ισοσταθμικό χάρτη με ισοσταθμικό διάστημα $m = 4$.

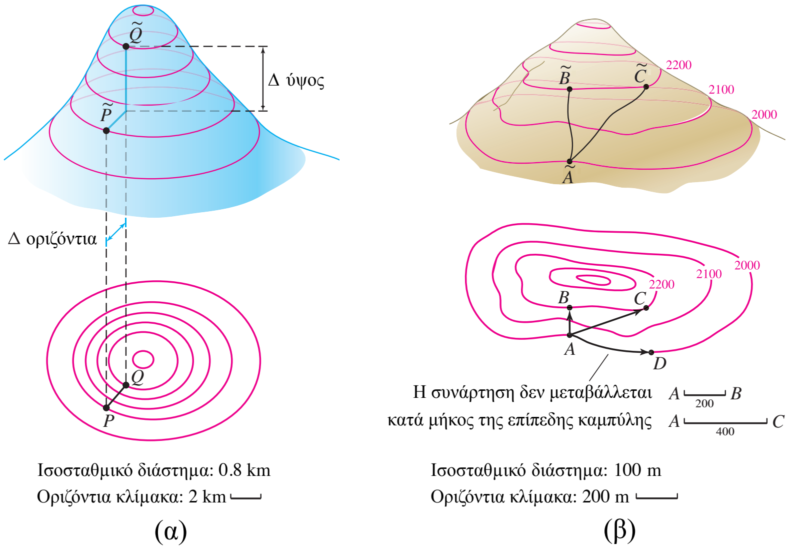
Λύση Παρατηρήστε ότι αν θέσουμε $z = f(x,y)$, τότε μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή $2x+3y+z = 12$. Όπως όμως ήδη γνωρίζουμε από την Ενότητα 12.5, αυτή είναι η εξίσωση ενός επιπέδου. Για να σχεδιάσουμε το γράφημά της, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα σημεία που το συγκεκριμένο επίπεδο τέμνει τους τρεις άξονες (βλ. Σχήμα 13). Η τομή του επιπέδου με τον άξονα z γίνεται για $z = f(0,0) = 12$. Προκειμένου να προσδιορίσουμε την τομή με τον άξονα x θέτουμε $y = z = 0$, οπότε προκύπτει $12-2x-3(0) = 0$ ή αλλιώς $x = 6$. Παρομοίως, επιλύοντας την εξίσωση $12-3y = 0$ προκύπτει ότι η τομή του επιπέδου με τον άξονα y γίνεται στο $y = 4$. Το γράφημα που αναζητούμε λοιπόν είναι το επίπεδο που προσδιορίζεται από αυτά τα τρία σημεία-τομές με τους άξονες των συντεταγμένων.

Γενικά, οι ισοσταθμικές καμπύλες μιας γραμμικής συνάρτησης $f(x,y) = qx+ry+s$ είναι ευθείες γραμμές με εξισώσεις $qx+ry+s = c$. Επομένως, *ο ισοσταθμικός χάρτης μιας γραμμικής συνάρτησης απαρτίζεται από ισαπέχουσες παράλληλες ευθείες*. Στην περίπτωση μας, οι ισοσταθμικές καμπύλες είναι οι ευθείες $12-2x-3y = c$ ή $2x+3y = 12-c$ (βλ. Σχήμα 13).

Ένας ισοσταθμικός χάρτης μοιάζει με έναν τοπογραφικό χάρτη, σαν αυτόν που χρησιμοποιούν οι περιπατητές, που μας βοηθά να καταλάβουμε τη διαμόρφωση του εδάφους σε μια περιοχή. Και στους δύο αυτούς χάρτες έχουμε να κάνουμε με δισδιάστατες αναπαραστάσεις των χαρακτηριστικών τρισδιάστατων δομών.



Σχήμα 13 Γράφημα και ισοσταθμικός χάρτης της $f(x,y) = 12-2x-3y$



Σχήμα 14

Πώς μπορούμε όμως να προσδιορίσουμε, με κάποιον ποσοτικό τρόπο, πόσο απότομο είναι το γράφημα μιας συνάρτησης; Ας φανταστούμε την επιφάνεια που ορίζεται από τη $z = f(x,y)$ ως έναν λόφο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 14. Αν τοποθετήσουμε το επίπεδο xy στο επίπεδο της θάλασσας, τότε το $f(a,b)$ θα είναι το ύψος του λόφου στο σημείο (a,b) του επιπέδου, μετρημένο ως προς το επίπεδο της θάλασσας.

Στο Σχήμα 14α απεικονίζονται δύο σημεία P και Q, που ανήκουν στο επίπεδο xy, μαζί με τα σημεία του γραφήματος που βρίσκονται ακριβώς από πάνω τους και τα οποία δηλώνονται ως $\widetilde{P}$ και $\widetilde{Q}$ αντιστοίχως. Ορίζουμε τον **μέσο ρυθμό μεταβολής** της συνάρτησης ως εξής:

$$\text{μέσος ρυθμός μεταβολής από το } P \text{ μέχρι το } Q = \frac{\Delta \text{ ύψος}}{\Delta \text{ οριζόντιο}}$$

όπου το Δ ύψος = η μεταβολή του ύψους από το σημείο $\widetilde{P}$ μέχρι το σημείο $\widetilde{Q}$ και Δ οριζόντιο = η απόσταση μεταξύ των σημείων P και Q.

Εναλλακτική Θα αναλύσουμε την ιδέα σύμφωνα με την οποία ο ρυθμός μεταβολής εξαρτάται από την κατεύθυνση προς την οποία κινούμαστε όταν μελετήσουμε τις κατευθυνόμενες παραγώγους στο πλαίσιο της Ενότητας 14.5. Στον Λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής μετράμε τον ρυθμό μεταβολής με τη βοήθεια της παραγώγου $f'(a)$. Στον Λογισμό των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών δεν υπάρχει ένας μοναδικός ρυθμός μεταβολής επειδή η μεταβολή της συνάρτησης $f(x,y)$ εξαρτάται από την κατεύθυνση: Έτσι, ο ρυθμός μεταβολής είναι ίσος με το μηδέν κατά μήκος μιας ισοσταθμικής καμπύλης [αφού η $f(x,y)$ είναι σταθερή κατά μήκος οποιασδήποτε ισοσταθμικής καμπύλης], ενώ αντιθέτως ο ρυθμός μεταβολής είναι διάφορος του μηδενός σε κατευθύνσεις που «δείχνουν» από τη μία ισοσταθμική καμπύλη προς τη γειτονική της (βλ. Σχήμα 14β).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Ο μέσος ρυθμός μεταβολής εξαρτάται από την κατεύθυνση Να υπολογίσετε τον μέσο ρυθμό μεταβολής καθώς κινούμαστε από το σημείο A προς τα σημεία B, C και D του Σχήματος 14β.

Λύση Το ισοσταθμικό διάστημα στον χάρτη του Σχήματος 14β είναι $m = 100$ m. Αυτό σημαίνει ότι αφού τα τμήματα $\overline{AB}$ και $\overline{AC}$ εκτείνονται καλύπτοντας δύο ισοσταθμικές καμπύλες, η μεταβολή στο ύψος είναι ίση με 200 m και στις δύο αυτές περιπτώσεις. Χρησιμοποιώντας την οριζόντια κλίμακα προκύπτει ότι το $\overline{AB}$ αντιστοιχεί σε οριζόντια μεταβολή ίση με 200 m, ενώ για το $\overline{AC}$ η οριζόντια απόσταση είναι ίση με 400 m. Αντιθέτως, δεν υπάρχει μεταβολή του ύψους καθώς κινούμαστε από το σημείο A προς το σημείο D. Επομένως, θα ισχύει:

$$\text{μέσος ρυθμός μεταβολής από το } A \text{ στο } B = \frac{\Delta\ \text{ύψος}}{\Delta\ \text{οριζόντιο}} = \frac{200}{200} = 1.0$$

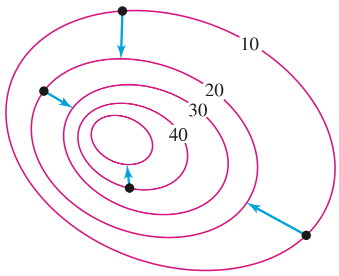
$$\text{μέσος ρυθμός μεταβολής από το } A \text{ στο } C = \frac{\Delta\ \text{ύψος}}{\Delta\ \text{οριζόντιο}} = \frac{200}{400} = 0.5$$

$$\text{μέσος ρυθμός μεταβολής από το } A \text{ στο } D = \frac{\Delta\ \text{ύψος}}{\Delta\ \text{οριζόντιο}} = 0$$

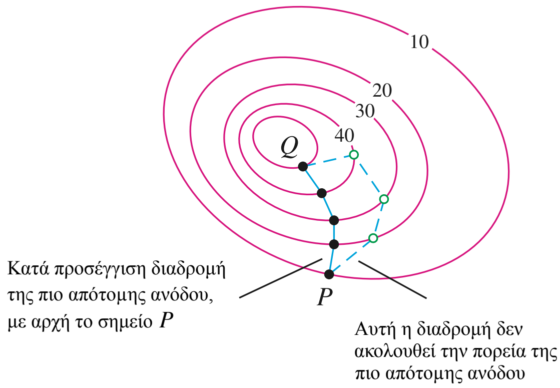
Πράγματι, διαπιστώνουμε ότι ο μέσος ρυθμός μεταβολής εξαρτάται από την κατεύθυνση.

Όταν περπατάμε πάνω σε ένα βουνό, η κλίση κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθούμε. Έτσι, αν περπατάμε για παράδειγμα περιφερειακά πάνω στο βουνό, το ύψος στο οποίο βρισκόμαστε δεν μεταβάλλεται καθόλου. Από την άλλη πάλι, σε κάθε σημείο που βρισκόμαστε υπάρχει η *πιο απότομη κατεύθυνση*, προς την οποία αν κινηθούμε το ύψος αυξάνεται με τον ταχύτερο ρυθμό. Σε έναν ισοσταθμικό χάρτη, η κατεύθυνση της πιο απότομης ανόδου είναι η κατεύθυνση στην οποία το ύψος αυξάνεται πιο γρήγορα. Σε έναν ισοσταθμικό χάρτη, λοιπόν, η κατεύθυνση της πιο απότομης ανόδου είναι κατά προσέγγιση εκείνη που μας μεταφέρει στο πλησιέστερο σημείο της αμέσως υψηλότερης ισοσταθμικής καμπύλης (βλ. Σχήμα 15α). Χρησιμοποιούμε τον όρο «κατά προσέγγιση» καθώς το έδαφος μπορεί να μεταβάλλεται μεταξύ των ισοσταθμικών καμπυλών. Η **διαδρομή της πιο απότομης ανόδου** είναι μια τροχιά που εκκινεί από ένα σημείο P και σε κάθε ενδιάμεσο σημείο συνεχίζει την άνοδο ακολουθώντας την πιο απότομη κατεύθυνση. Μπορούμε να προσεγγίσουμε τη διαδρομή της πιο απότομης ανόδου σχεδιάζοντας μια ακολουθία ευθύγραμμων τμημάτων που μας μεταφέρουν, όσο πιο άμεσα γίνεται, από τη μία ισοσταθμική καμπύλη στη γειτονική της. Στο Σχήμα 15β απεικονίζονται δύο διαδρομές που συνδέουν τα σημεία P και Q. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στη διαδρομή της πιο απότομης ανόδου, ενώ η στικτή όχι, καθώς δεν μας μεταφέρει από τη μία ισοσταθμική καμπύλη στην επόμενη ακολουθώντας το συντομότερο δυνατό ευθύγραμμο τμήμα.

Η διαδρομή της πιο απότομης καθόδου είναι ίδια με τη διαδρομή της πιο απότομης ανόδου, διανύόμενες απλώς σε αντίθετες κατευθύνσεις. Το νερό που ρέει κατερχόμενο από ένα βουνό ακολουθεί, τουλάχιστον κατά προσέγγιση, τη διαδρομή της πιο απότομης καθόδου.



(α) Διανύσματα που δείχνουν προσεγγιστικά προς την κατεύθυνση της πιο απότομης καθόδου



(β)

Σχήμα 15

Συναρτήσεις με περισσότερες από δύο μεταβλητές

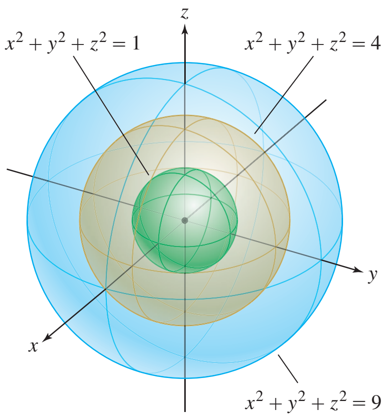
Υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου για να περιγράψουμε μια κατάσταση είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Έτσι, για παράδειγμα, αν θελήσουμε να παρακολουθούμε τη θερμοκρασία στα διαφορετικά σημεία ενός δωματίου, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση $T(x, y, z)$ η οποία εξαρτάται από τρεις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις τρεις συντεταγμένες κάθε σημείου. Επίσης, κατά τη δημιουργία ποσοτικών οικονομικών μοντέλων καταλήγουμε πολύ συχνά σε συναρτήσεις που εξαρτώνται από περισσότερες από 100 μεταβλητές.

Δυστυχώς, δεν είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Το γράφημα μιας συνάρτησης $f(x, y, z)$ θα αποτελείται από το σύνολο των σημείων $(x, y, z, f(x, y, z))$ που ανήκουν στον τετραδιάστατο χώρο $\mathbf{R}^4$. Παρ' όλα αυτά, ακριβώς όπως μπορούμε να χρησιμοποιούμε ισοσταθμικούς χάρτες για να οπτικοποιούμε ένα τρισδιάστατο βουνό χρησιμοποιώντας καμπύλες στο επίπεδο των δύο διαστάσεων, είναι επίσης εφικτό να σχεδιάζουμε ισοσταθμικές επιφάνειες για μια συνάρτηση τριών μεταβλητών $f(x, y, z)$. Πρόκειται για επιφάνειες που περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής $f(x, y, z) = c$, για διαφορετικές τιμές του c. Έτσι, για παράδειγμα, οι ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

είναι οι σφαίρες με εξισώσεις $x^2 + y^2 + z^2 = c$ (βλ. Σχήμα 16). Στην περίπτωση μιας συνάρτησης $T(x, y, z)$ που αναπαριστά τη θερμοκρασία σε κάθε σημείο του χώρου, συνηθίζουμε να αποκαλούμε τις ισοσταθμικές επιφάνειες που περιγράφονται από τις $T(x, y, z) = k$ **ισόθερμες**, καθώς πρόκειται για σύνολα σημείων που έχουν μια κοινή θερμοκρασία k.

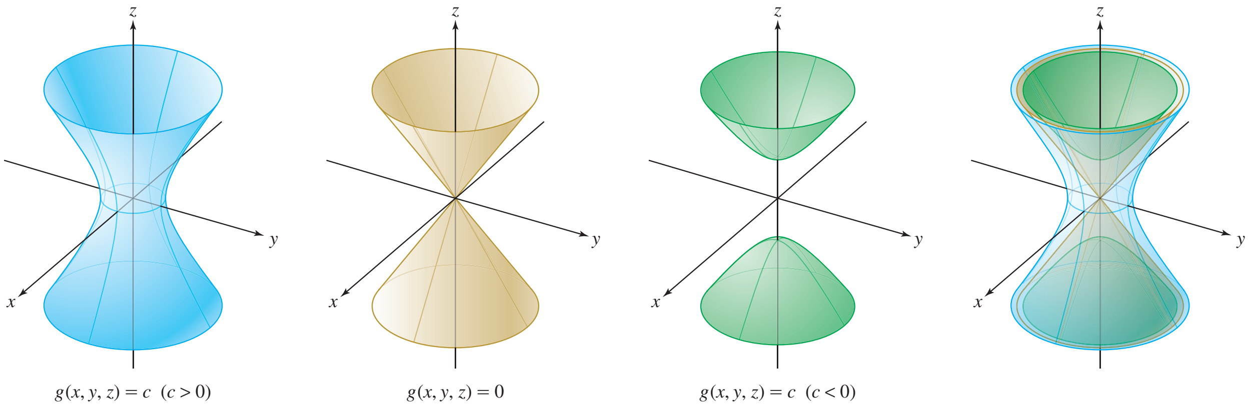
Για τις συναρτήσεις με τέσσερις ή και ακόμα περισσότερες μεταβλητές, δεν μπορούμε πλέον να οπτικοποιούμε ούτε το γράφημα ούτε τις ισοσταθμικές επιφάνειές τους, έτσι θα πρέπει να αρκούμαστε στη διαίσθησή μας, η οποία θα έχει στο μεταξύ οξυνθεί μέσω της μελέτης των συναρτήσεων με δύο και τρεις μεταβλητές.



Σχήμα 16 Οι ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ είναι σφαίρες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 Να περιγράψετε τις ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Λύση Η ισοσταθμική επιφάνεια για $c = 0$ είναι ο κώνος με εξίσωση $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Για $c \neq 0$, οι ισοσταθμικές επιφάνειες είναι υπερβολοειδή της μορφής $x^2 + y^2 - z^2 = c$. Το υπερβολοειδές θα έχει ένα φύλλο, θα είναι δηλαδή μονόχωνο, αν $c > 0$ και θα κείτεται έξω από τον κώνο. Αντιθέτως, το υπερβολοειδές θα έχει δύο φύλλα, δηλαδή θα είναι δίχωνο, στην περίπτωση που $c < 0$, οπότε το ένα φύλλο θα βρίσκεται εντός του πάνω μέρους του κώνου και το άλλο εντός του κάτω μέρους του κώνου (βλ. Σχήμα 17).



Σχήμα 17 Οι ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

14.1 Περίληψη

- Το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}$ μιας συνάρτησης $f(x_1, \ldots, x_n)$ με n μεταβλητές είναι το σύνολο των n-άδων $(a_1, \ldots, a_n)$ του χώρου $\mathbf{R}^n$, για τις οποίες οι τιμές $f(a_1, \ldots, a_n)$ ορίζονται. Το εύρος τιμών της f είναι το σύνολο των τιμών που παίρνει η συνάρτηση f.
- Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x, y)$, η οποία παίρνει πραγματικές τιμές, είναι η επιφάνεια του $\mathbf{R}^3$ που αποτελείται από το σύνολο των σημείων της μορφής $(a, b, f(a, b))$, για όλα τα ζεύγη (a, b) που ανήκουν στο πεδίο ορισμού $\mathcal{D}$ της συνάρτησης f.
- Ένα *κατακόρυφο ίχνος* είναι η καμπύλη που προκύπτει από την τομή του γραφήματος της συνάρτησης με κάποιο από τα κατακόρυφα επίπεδα $x = a$ ή $y = b$.
- Μια *ισοσταθμική καμπύλη* είναι μια καμπύλη στο επίπεδο xy που ορίζεται από την εξίσωση $f(x, y) = c$. Η ισοσταθμική καμπύλη $f(x, y) = c$ είναι η προβολή στο επίπεδο xy μιας *οριζόντιας καμπύλης-ίχνους* η οποία προκύπτει από την τομή του γραφήματος της συνάρτησης με το οριζόντιο επίπεδο $z = c$.
- Ένας *ισοσταθμικός χάρτης* απεικονίζει τις ισοσταθμικές καμπύλες $f(x, y) = c$ για διαφορετικές τιμές της σταθεράς c οι οποίες ισαπέχουν. Αυτή η σταθερή απόσταση m μεταξύ των τιμών της c ονομάζεται *ισοσταθμικό διάστημα*.
- Όταν παρατηρούμε έναν ισοσταθμικό χάρτη, θα πρέπει να έχουμε πάντα κατά νου ότι:
  - Το ύψος δεν μεταβάλλεται όταν κανείς κινείται κατά μήκος μιας ισοσταθμικής καμπύλης.
  - Το ύψος αυξάνεται ή μειώνεται κατά m (το ισοσταθμικό διάστημα) όταν κανείς μεταβαίνει από τη μία ισοσταθμική καμπύλη στη γειτονική της.
- Η απόσταση των ισοσταθμικών καμπυλών υποδηλώνει το πόσο απότομο είναι το γράφημα: Όσο πιο κοντά βρίσκονται οι ισοσταθμικές καμπύλες τόσο πιο απότομη είναι η γραφική παράσταση.
- Ο *μέσος ρυθμός μεταβολής* από ένα σημείο P σε ένα άλλο σημείο Q είναι το πηλίκο $\dfrac{\Delta\text{ύψος}}{\Delta\text{οριζόντιο}}$.

- Η κατεύθυνση της πιο απότομης ανόδου σε ένα σημείο P είναι εκείνη η κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η $f(x, y)$ αυξάνεται πιο γρήγορα. Η πιο απότομη άνοδος προκύπτει (κατά προσέγγιση τουλάχιστον) σχεδιάζοντας τα ευθύγραμμα τμήματα ξεκινώντας από το σημείο P και κινούμενοι κάθε φορά προς το κοντινότερο σημείο της γειτονικής ισοσταθμικής καμπύλης.
- Οι ισοσταθμικές επιφάνειες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να γίνουν κατανοητές οι συναρτήσεις των τριών μεταβλητών $f(x, y, z)$. Στην περίπτωση που η συνάρτηση αναπαριστά τη θερμοκρασία, αυτές οι ισοσταθμικές επιφάνειες αποκαλούνται ισόθερμες.

14.1 Ασκήσεις

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ οριζόντιου ίχνους και ισοσταθμικής καμπύλης; Πώς συνδέονται μεταξύ τους;

2. Να περιγράψετε το ίχνος της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 - \sin(x^3 y)$ στο επίπεδο xz.

3. Είναι πιθανό δύο διαφορετικές ισοσταθμικές καμπύλες μιας συνάρτησης να τέμνονται; Εξηγήστε την απάντησή σας.

4. Να περιγράψετε τον ισοσταθμικό χάρτη της συνάρτησης $f(x, y) = x$ με ισοσταθμικό διάστημα ίσο με 1.

5. Σε τι διαφέρουν οι ισοσταθμικοί χάρτες των συναρτήσεων

$$f(x, y) = x \quad \text{και} \quad g(x, y) = 2x$$

αν σχεδιαστούν με ισοσταθμικό διάστημα ίσο με 1 ο καθένας τους;

Ασκήσεις

Στις Ασκήσεις 1-6 να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης στα αναφερόμενα σημεία, ή αλλιώς να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κάποιο από αυτά.

1. $f(x, y) = x + yx^3, \quad (1, 2), (-1, 6), (e, \pi)$

2. $g(x, y) = \dfrac{y}{x^2 - y^2}, \quad (1, 3), (3, -3), (\sqrt{2}, 2)$

3. $h(x, y) = \dfrac{\sqrt{x - y^2}}{x - y}, \quad (20, 2), (1, -2), (1, 1)$

4. $k(x, y) = xe^{-y}, \quad (1, 0), (3, -3), (0, 12)$

5. $h(x, y, z) = xyz^{-2}, \quad (3, 7, -2), (3, 2, \frac{1}{4}), (4, -4, 0)$

6. $w(r, s, t) = \dfrac{r - s}{\sin t}, \quad \left(2, 2, \frac{\pi}{2}\right), (\pi, \pi, \pi), \left(-2, 2, \frac{\pi}{6}\right)$

Στις Ασκήσεις 7-14 να σχεδιάσετε το πεδίο ορισμού της αντίστοιχης συνάρτησης.

7. $f(x, y) = 12x - 5y$

8. $f(x, y) = \sqrt{81 - x^2}$

9. $f(x, y) = \ln(4x^2 - y)$

10. $h(x, t) = \dfrac{1}{x + t}$

11. $g(y, z) = \dfrac{1}{z + y^2}$

12. $f(x, y) = \sin \dfrac{y}{x}$

13. $F(I, R) = \sqrt{IR}$

14. $f(x, y) = \cos^{-1}(x + y)$

Στις Ασκήσεις 15-18 να περιγράψετε το πεδίο ορισμού και το εύρος τιμών της αντίστοιχης συνάρτησης.

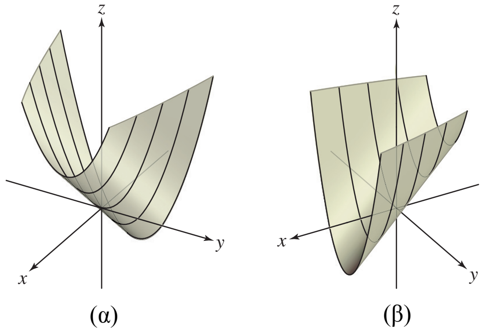
15. $f(x, y, z) = xz + e^y$

16. $f(x, y, z) = x\sqrt{y + z}\, e^{z/x}$

17. $P(r, s, t) = \sqrt{16 - r^2 s^2 t^2}$

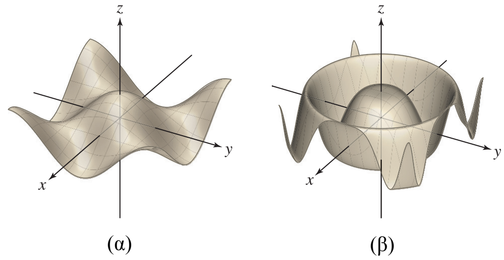
18. $g(r, s) = \cos^{-1}(rs)$

19. Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις (α) και (β) του Σχήματος 18 με τις συναρτήσεις:
(i) $f(x, y) = -x + y^2$ (ii) $g(x, y) = x + y^2$



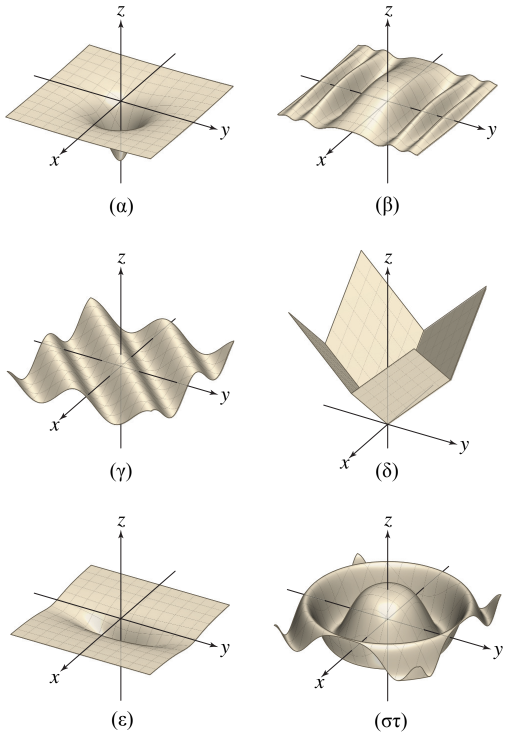
Σχήμα 18

20. Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις (α) και (β) του Σχήματος 19 με τις συναρτήσεις:
(i) $f(x, y) = (\cos x)(\cos y)$
(ii) $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$



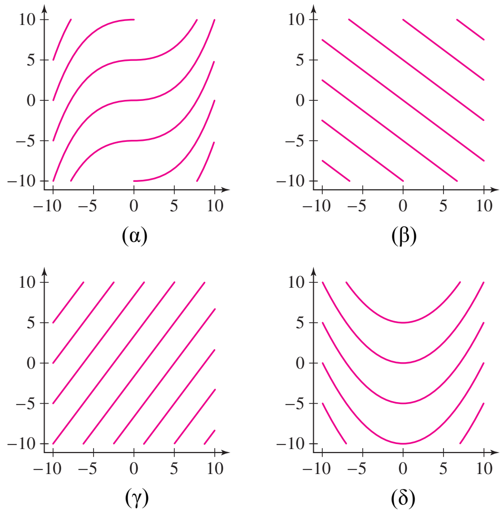
Σχήμα 19

21. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις (i)-(vi) με τις γραφικές παραστάσεις (α)-(στ) του Σχήματος 20.
(i) $f(x, y) = |x| + |y|$
(ii) $f(x, y) = \cos(x - y)$
(iii) $f(x, y) = \dfrac{-1}{1 + 9x^2 + y^2}$
(iv) $f(x, y) = \cos(y^2)e^{-0.1(x^2+y^2)}$
(v) $f(x, y) = \dfrac{-1}{1 + 9x^2 + 9y^2}$
(vi) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)e^{-0.1(x^2+y^2)}$



Σχήμα 20

22. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις (i)-(iv) με τους ισοσταθμικούς χάρτες (α)-(δ) του Σχήματος 21.
(i) $f(x, y) = 3x + 4y$ (ii) $g(x, y) = x^3 - y$
(iii) $h(x, y) = 4x - 3y$ (iv) $k(x, y) = x^2 - y$



Σχήμα 21

Στις Ασκήσεις 23-28 να σχεδιάσετε το γράφημα της συνάρτησης και στη συνέχεια να σχεδιάσετε μερικά κατακόρυφα και οριζόντια ίχνη.

23. $f(x, y) = 12 - 3x - 4y$

24. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

25. $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

26. $f(x, y) = y^2$

27. $f(x, y) = \sin(x - y)$

28. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$

29. Να σχεδιάσετε τους ισοσταθμικούς χάρτες για τη συνάρτηση $f(x, y) = x + y$ με ισοσταθμικά διαστήματα $m = 1$ και $m = 2$.

30. Να σχεδιάσετε τον ισοσταθμικό χάρτη για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ που να περιλαμβάνει τις ισοσταθμικές καμπύλες που αντιστοιχούν στις τιμές $c = 0, 4, 8, 12, 16$.

Στις Ασκήσεις 31-38 να σχεδιάσετε τον ισοσταθμικό χάρτη της συνάρτησης $f(x, y)$ που δίνεται κάθε φορά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο ισοσταθμικό διάστημα έτσι ώστε να εμφανίζονται τουλάχιστον έξι ισοσταθμικές καμπύλες.

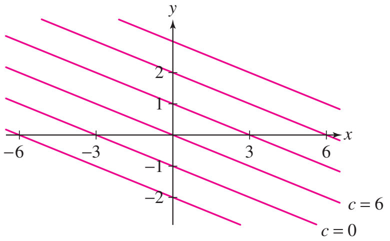
31. $f(x,y) = x^2 - y$ **32.** $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$

33. $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ **34.** $f(x,y) = xy$

35. $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ **36.** $f(x,y) = x + 2y - 1$

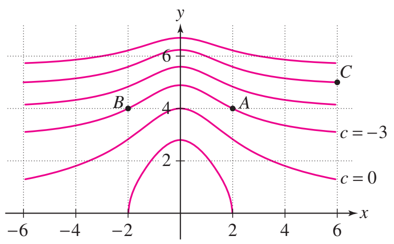
37. $f(x,y) = x^2$ **38.** $f(x,y) = 3x^2 - y^2$

39. Να προσδιορίσετε τη γραμμική συνάρτηση της οποίας ο ισοσταθμικός χάρτης (με ισοσταθμικό διάστημα $m = 6$) φαίνεται στο Σχήμα 22. Ποια είναι η ζητούμενη γραμμική συνάρτηση στην περίπτωση που $m = 3$ (οπότε η καμπύλη με την ένδειξη $c = 6$ φέρει τώρα την ένδειξη $c = 3$);



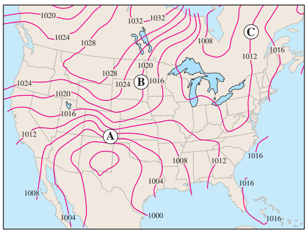
Σχήμα 22 Ισοσταθμικός χάρτης με ισοσταθμικό διάστημα $m = 6$

40. Χρησιμοποιήστε τον ισοσταθμικό χάρτη του Σχήματος 23 για να υπολογίσετε τον μέσο ρυθμό μεταβολής:
α) από το σημείο A στο B
β) από το σημείο A στο C.



Σχήμα 23

Οι Ασκήσεις 41-43 αναφέρονται στον χάρτη του Σχήματος 24.



Σχήμα 24 Η ατμοσφαιρική πίεση (σε millibars) στην περιοχή της Βόρειας Αμερικής στις 26 Μαρτίου 2009

41. α) Σε ποιο από τα σημεία A-C αυξάνεται η πίεση καθώς κατευθυνόμαστε προς τον Βορρά;
β) Σε ποιο από τα σημεία A-C αυξάνεται η πίεση καθώς κατευθυνόμαστε προς τη Δύση;

42. Για καθένα από τα σημεία A-C να ελέγξετε και να αποφασίσετε σε ποια από τις τέσσερις κύριες κατευθύνσεις του ορίζοντα (δηλ. προς τον Βορρά, τον Νότο, την Ανατολή ή τη Δύση) η πίεση αυξάνεται ταχύτερα.

43. Να κατατάξετε τις πολιτείες Arkansas (1), Colorado (2), North Dakota (3) και Wisconsin (4) ξεκινώντας από αυτήν που παρατηρείται η μεγαλύτερη μεταβολή πίεσης κατά μήκος της και καταλήγοντας σε αυτή με τη μικρότερη.

Στις Ασκήσεις 44-47 συμβολίζεται με $T(x,y,z)$ η θερμοκρασία σε κάθε σημείο του χώρου. Να σχεδιάσετε τις ισοσταθμικές επιφάνειες (που στην περίπτωση αυτή αποκαλούνται και ισόθερμες) που αντιστοιχούν στις σταθερές τιμές θερμοκρασιών που δίνονται σε κάθε περίπτωση.

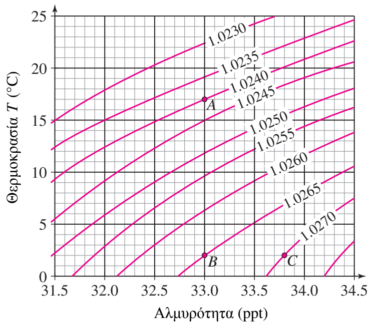
44. $T(x,y,z) = 2x + 3y - z, T = 0, 1, 2$

45. $T(x,y,z) = x - y + 2z, T = 0, 1, 2$

46. $T(x,y,z) = x^2 + y^2 - z, T = 0, 1, 2$

47. $T(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2, T = 0, 1, 2, -1, -2$

Στις Ασκήσεις 48-51 συμβολίζεται με $\rho(S,T)$ η πυκνότητα του θαλασσινού νερού (σε kg/m^3) ως συνάρτηση της αλμυρότητας S (σε ppt) και της θερμοκρασίας T (σε $^\circ$ C). Για τους υπολογισμούς σας χρησιμοποιήστε τον ισοσταθμικό χάρτη του Σχήματος 25.



Σχήμα 25 Ισοσταθμικός χάρτης της πυκνότητας του θαλασσινού νερού $\rho(S,T)$ (σε kg/m^3)

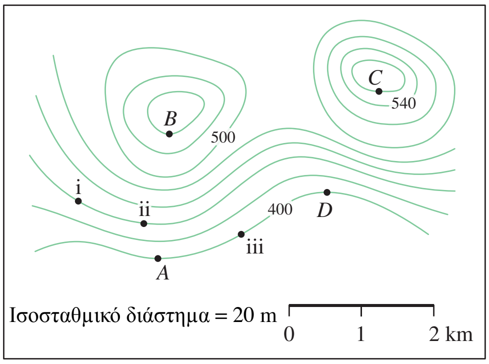
48. Υπολογίστε τον μέσο ρυθμό της μεταβολής της πυκνότητας ρ ως προς τη θερμοκρασία T από το B στο A.

49. Υπολογίστε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας ρ ως προς την αλμυρότητα S από το B στο C.

50. Για μια ορισμένη σταθερή τιμή της αλμυρότητας, η πυκνότητα του θαλασσινού νερού είναι αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση της θερμοκρασίας;

51. Η πυκνότητα του θαλασσινού νερού φαίνεται να είναι πιο ευαίσθητη στις μεταβολές της θερμοκρασίας στο σημείο A ή στο σημείο B;

Οι Ασκήσεις 52-55 αναφέρονται στο Σχήμα 26.



Σχήμα 26

52. Βρείτε τη μεταβολή της πυκνότητας του θαλασσινού νερού από το A στο B.

53. Εκτιμήστε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας του θαλασσινού νερού από το A στο B και από το A στο C.

54. Εκτιμήστε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας του θαλασσινού νερού από το A στα σημεία i, ii και iii.

55. Σχεδιάστε τη διαδρομή της πιο απότομης ανόδου η οποία ξεκινά από το σημείο D.

56. Έστω ότι η θερμοκρασία στον τρισδιάστατο χώρο δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

Να σχεδιάσετε τις ισόθερμες που αντιστοιχούν στις τιμές της θερμοκρασίας $T = -2, -1, 0, 1, 2$.

57. Έστω ότι η θερμοκρασία στον τρισδιάστατο χώρο δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$$

Να σχεδιάσετε τις ισόθερμες που αντιστοιχούν στις τιμές της θερμοκρασίας $T = 0, 1, 2$.

58. Έστω ότι η θερμοκρασία στον τρισδιάστατο χώρο δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$$

Να σχεδιάσετε τις ισόθερμες που αντιστοιχούν στις τιμές της θερμοκρασίας $T = -1, 0, 1$.

59. Έστω ότι η θερμοκρασία στον τρισδιάστατο χώρο δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$$

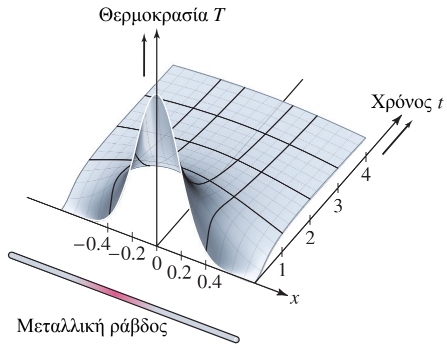
Να σχεδιάσετε τις ισόθερμες που αντιστοιχούν στις τιμές της θερμοκρασίας $T = -2, -1, 0, 1, 2$.

Ασκήσεις πρόκλησης

60. Η συνάρτηση $f(x, t) = t^{-1/2} e^{-x^2/t}$, η γραφική παράσταση της οποίας απεικονίζεται στο Σχήμα 27, περιγράφει τη χρονική μεταβολή της θερμοκρασίας κατά μήκος μιας μεταλλικής ράβδου μετά από μια απότομη προσφορά θερμότητας που έλαβε χώρα στο κέντρο της.

α) Σχεδιάστε τα κατακόρυφα ίχνη τις χρονικές στιγμές $t = 1, 2, 3$. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει από αυτά σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο η θερμότητα διαχέεται μέσω της μεταλλικής ράβδου;

β) Σχεδιάστε τα κατακόρυφα ίχνη $x = c$ για $c = \pm 0.2, \pm 0.4$. Να περιγράψετε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η θερμοκρασία με τον χρόνο στα σημεία που βρίσκονται κοντά στο κέντρο της ράβδου.



Σχήμα 27 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x, t) = t^{-1/2} e^{-x^2/t}$ λίγο μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$

61. Έστω

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{για } (x, y) \neq (0, 0)$$

Να εκφράσετε την f σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή $f(r, \theta)$, και να χρησιμοποιήσετε αυτήν τη μορφή για να βρείτε τις ισοσταθμικές καμπύλες της f.

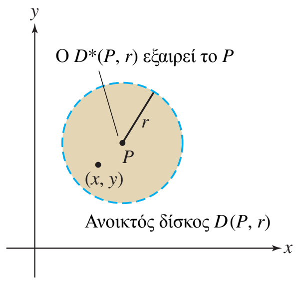
14.2 Όρια και συνέχεια στην περίπτωση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Στην παρούσα ενότητα θα αναπτύξουμε τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας στο πλαίσιο της πολυμεταβλητής ανάλυσης. Παρόλο που θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην περίπτωση των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές, οι ορισμοί και τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε εξακολουθούν να ισχύουν για τις συναρτήσεις με τρεις ή και περισσότερες μεταβλητές.

Θυμηθείτε ότι στην ευθεία των πραγματικών αριθμών λέγαμε ότι ένας αριθμός x είναι κοντά στο a αν η απόσταση $|x-a|$ είναι μικρή. Στο επίπεδο, θα λέμε ότι ένα σημείο (x, y) είναι κοντά σε ένα άλλο σημείο $P = (a, b)$ αν η μεταξύ τους απόσταση

$$d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

είναι μικρή.



Σχήμα 1 Ο ανοικτός δίσκος $D(P, r)$ αποτελείται από το σύνολο των σημείων (x, y) που βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη του r από το σημείο P. Σε αυτόν δεν συμπεριλαμβάνεται ο συνοριακός κύκλος.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν θεωρήσουμε το σύνολο των σημείων που βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από r από το σημείο $P = (a, b)$, τότε θα σχηματιστεί ένας δίσκος $D(P, r)$ με κέντρο το σημείο P, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, που δεν θα περιλαμβάνει όμως τη συνοριακή γραμμή του δίσκου. Αν επιπλέον «επιμείνουμε» ώστε να ισχύει η συνθήκη $d((x, y), (a, b)) \neq 0$, τότε θα καταλήξουμε σε έναν «τρύπιο» δίσκο καθώς σε αυτόν δεν θα συμπεριλαμβάνεται το κέντρο P. Αυτόν τον τελευταίο δίσκο θα τον συμβολίζουμε με $D^*(P, r)$.

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ ορίζεται κοντά στο σημείο P αλλά όχι απαραίτητως στο ίδιο το P. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι η $f(x, y)$ ορίζεται για όλα τα ζεύγη (x, y) που ανήκουν σε έναν τρύπιο δίσκο $D^*(P, r)$, στο κέντρο του, με $r > 0$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ προσεγγίζει το όριο L καθώς το (x, y) προσεγγίζει το $P = (a, b)$, αν η ποσότητα $|f(x, y) - L|$ γίνεται όσο μικρή θέλουμε ενώ το (x, y) προσεγγίζει αρκούντως κοντά στο σημείο $P = (a, b)$ (βλ. Σχήμα 2α). Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\lim_{(x,y)\to P} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

Ο ακριβής ορισμός είναι ο ακόλουθος.

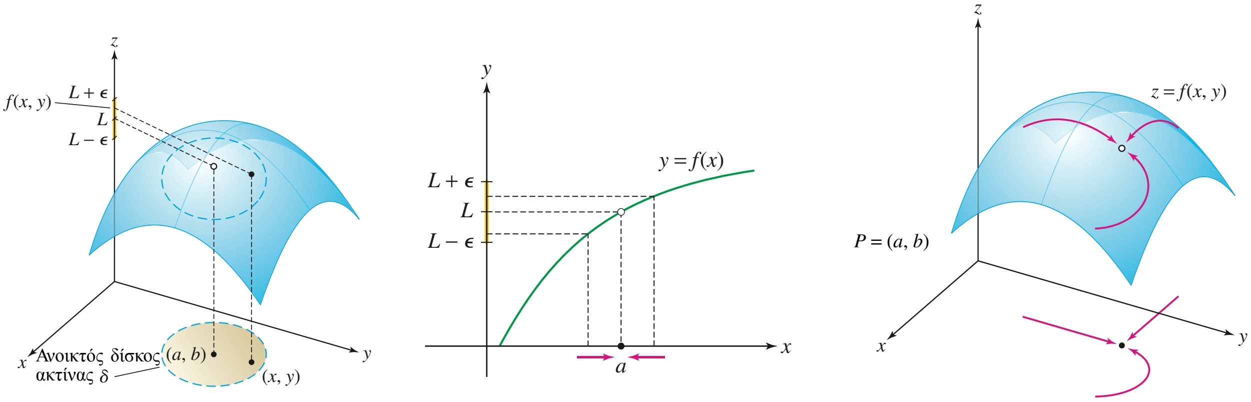
ΟΡΙΣΜΟΣ Όριο Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ ορίζεται κοντά στο σημείο $P = (a, b)$. Τότε

$$\lim_{(x,y)\to P} f(x, y) = L$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν το (x, y) ικανοποιεί τη συνθήκη

$$0 < d((x, y), (a, b)) < \delta, \quad \text{τότε να ισχύει} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

Πρόκειται για έναν ορισμό που είναι παρόμοιος με τον ορισμό του ορίου στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, υπάρχει όμως μια σημαντική διαφορά. Στην περίπτωση του ορίου στον Λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής απαιτούμε η $f(x)$ να τείνει στο όριο L καθώς το x προσεγγίζει το a και από τις δύο κατευθύνσεις – δηλαδή από αριστερά αλλά και δεξιά του a (βλ. Σχήμα 2β). Στην περίπτωση του ορίου στην πολυμεταβλητή ανάλυση, η συνάρτηση $f(x, y)$ θα πρέπει να τείνει στο όριο L καθώς το (x, y) προσεγγίζει το σημείο P από άπειρες διαφορετικές κατευθύνσεις (βλ. Σχήμα 2γ).



(α) $|f(x,y)-L| < \epsilon$ για κάθε (x,y) εντός του τρύπιου δίσκου

(β) Στη μία μεταβλητή μπορούμε να προσεγγίσουμε το a από δύο μόνο δυνατές κατευθύνσεις

(γ) Στις δύο μεταβλητές, το (x,y) μπορεί να προσεγγίσει το $P=(a,b)$ κατά μήκος οποιασδήποτε κατεύθυνσης ή διαδρομής

Σχήμα 2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Να αποδείξετε ότι

α) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ β) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b$.

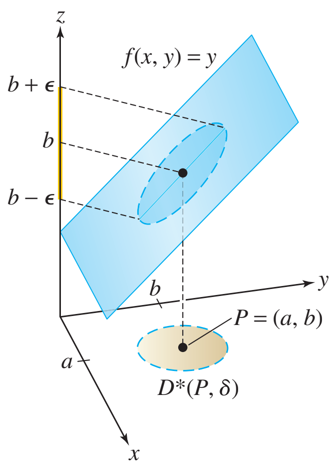
Λύση Έστω ότι $P=(a,b)$. Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε το (α) θα υποθέσουμε επιπλέον ότι $f(x,y)=x$ και $L=a$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon>0$ μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα $\delta>0$ τέτοιο ώστε:

$$\text{Αν}\quad 0<d((x,y),(a,b))<\delta, \quad \text{τότε θα ισχύει}$$
$$|f(x,y)-L| = |x-a| < \epsilon \qquad (1)$$

Μπορούμε να επιλέξουμε $\delta=\epsilon$, οπότε, αν $d((x,y),(a,b))<\epsilon$, τότε θα ισχύει:

$$(x-a)^2+(y-b)^2<\epsilon^2 \quad\Rightarrow\quad (x-a)^2<\epsilon^2 \quad\Rightarrow\quad |x-a|<\epsilon$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $\epsilon>0$, αν $0<d((x,y),(a,b))<\epsilon$, τότε θα είναι $|x-a|<\epsilon$. Με τον τρόπο αυτόν αποδεικνύεται το (α), ενώ το όριο του ερωτήματος (β) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο (βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3 Αν $|y-b|<\delta$ για $\delta=\epsilon$, τότε $|f(x,y)-b|<\epsilon$. Επομένως $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

Το θεώρημα που ακολουθεί απαριθμεί τους βασικούς νόμους που ισχύουν για τα όρια στην πολυμεταβλητή ανάλυση. Θα παραλείψουμε τις αποδείξεις αυτών των νόμων, καθώς είναι παρόμοιες με τις αποδείξεις των αντίστοιχων νόμων των ορίων στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Νόμοι ορίων Υποθέτουμε ότι τα όρια $\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)$ και $\lim_{(x,y)\to P} g(x,y)$ υπάρχουν.

(i) **Νόμος αθροίσματος:**

$$\lim_{(x,y)\to P} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to P} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to P} g(x,y)$$

(ii) **Νόμος πολλαπλασιασμού με σταθερά:** Για οποιονδήποτε αριθμό k,

$$\lim_{(x,y)\to P} kf(x,y) = k \lim_{(x,y)\to P} f(x,y)$$

(iii) **Νόμος γινομένου:**

$$\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)\, g(x,y) = \left(\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)\right)\left(\lim_{(x,y)\to P} g(x,y)\right)$$

(iv) **Νόμος πηλίκου:** Αν $\lim_{(x,y)\to P} g(x,y) \neq 0$, τότε

$$\lim_{(x,y)\to P} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to P} g(x,y)}$$

Όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $P = (a,b)$ αν η $f(x,y)$ προσεγγίζει την τιμή της συνάρτησης $f(a,b)$ καθώς $(x,y) \to (a,b)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Συνέχεια Μια συνάρτηση f με δύο μεταβλητές είναι **συνεχής** στο σημείο $P = (a,b)$ αν ισχύει

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο (a,b) του πεδίου ορισμού της.

Σύμφωνα με τους νόμους των ορίων, όλα τα αθροίσματα, τα πολλαπλάσια και τα γινόμενα συνεχών συναρτήσεων είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις. Όταν εφαρμόσουμε τους προηγούμενους κανόνες για τις συνεχείς συναρτήσεις $f(x,y) = x$ και $g(x,y) = y$, σύμφωνα με το Παράδειγμα 1, τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις της μορφής $f(x,y) = x^m y^n$ είναι επίσης συνεχείς για όλους τους ακέραιους αριθμούς m και n, γεγονός που με τη σειρά του σημαίνει ότι και όλα τα πολυώνυμα είναι επίσης συνεχή. Επιπλέον, κάθε ρητή συνάρτηση $h(x,y)/g(x,y)$, όπου τα h και g είναι κάποια πολυώνυμα, είναι επίσης συνεχής σε όλα τα σημεία (a,b) για τα οποία ισχύει $g(a,b) \neq 0$. Όπως ακριβώς και στην περίπτωση των ορίων των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, έτσι και εδώ μπορούμε να υπολογίζουμε τα όρια των συνεχών συναρτήσεων κάνοντας αντικατάσταση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Υπολογισμός ορίων με αντικατάσταση Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{3x + y}{x^2 + y^2 + 1}$$

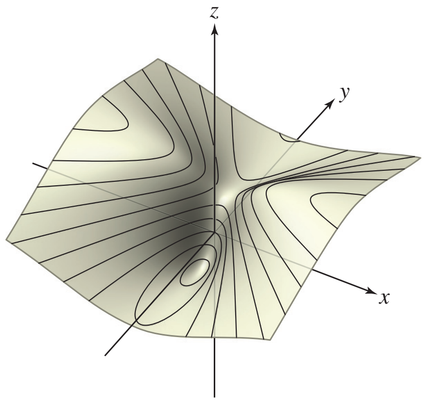
είναι συνεχής (βλ. Σχήμα 4). Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$.

Λύση Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία (a, b) καθώς πρόκειται για μια ρητή συνάρτηση ο παρονομαστής της οποίας, $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, δεν μηδενίζεται σε καμία περίπτωση. Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο όριο με τη μέθοδο της αντικατάστασης, δηλαδή:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3x + y}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{3(1) + 2}{1^2 + 2^2 + 1} = \frac{5}{6}$$

Αν η συνάρτηση f είναι ένα γινόμενο της μορφής $f(x, y) = h(x)g(y)$, όπου οι συναρτήσεις $h(x)$ και $g(y)$ είναι συνεχείς, τότε το όριο της f είναι το γινόμενο των ορίων των h και g σύμφωνα με τον νόμο για το όριο γινομένου, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x)g(y) = \left(\lim_{x\to a} h(x)\right)\left(\lim_{y\to b} g(y)\right)$$



Σχήμα 4 Εικόνα, από πάνω, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{3x+y}{x^2+y^2+1}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Συναρτήσεις γινόμενα Υπολογίστε το όριο $\lim_{(x,y)\to(3,0)} x^3 \frac{\sin y}{y}$.

Λύση Αφού τα όρια $\lim_{x\to 3} x^3$ και $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$ υπάρχουν και τα δύο, το ζητούμενο όριο μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο των δύο αυτών ορίων, δηλαδή:

$$\lim_{(x,y)\to(3,0)} x^3 \frac{\sin y}{y} = \left(\lim_{x\to 3} x^3\right)\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}\right) = (3^3)(1) = 27$$

Η σύνθεση είναι ένα άλλος σημαντικός τρόπος για τη «δημιουργία» συναρτήσεων. Αν f είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και η $G(u)$ μια συνάρτηση μίας μεταβλητής, τότε η σύνθεσή τους $G \circ f$ είναι η συνάρτηση δύο μεταβλητών που δίνεται ως $G(f(x, y))$. Σύμφωνα με το θεώρημα που ακολουθεί, η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι και αυτή συνεχής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής Αν μια συνάρτηση δύο μεταβλητών f είναι συνεχής στο (a, b) και μια άλλη συνάρτηση μιας μεταβλητής G είναι και αυτή συνεχής στο $c = f(a, b)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $G(f(x, y))$ θα είναι συνεχής στο (a, b).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Να εκφράσετε τη συνάρτηση $H(x, y) = e^{-x^2+2y}$ ως μια σύνθεση συναρτήσεων και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim_{(x,y)\to(1,2)} H(x, y)$.

Λύση Ισχύει ότι $H(x, y) = G(f(x, y))$, όπου $G(u) = e^u$ και $f(x, y) = -x^2 + 2y$. Τόσο η f όσο και η G είναι συνεχείς, επομένως η H θα είναι και αυτή συνεχής και θα ισχύει:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} H(x, y) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} e^{-x^2+2y} = e^{-(1)^2+2(2)} = e^3$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, αν το όριο $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ υπάρχει και είναι ίσο με L, τότε η $f(x,y)$ τείνει στο L καθώς το (x,y) προσεγγίζει το (a,b) κατά μήκος οποιασδήποτε διαδρομής. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα αποδείξουμε ότι ένα όριο *δεν υπάρχει*, αποδεικνύοντας ότι η $f(x,y)$ προσεγγίζει διαφορετικές οριακές τιμές καθώς πλησιάζουμε το $(0,0)$ κατά μήκος διαφορετικών ευθειών που όλες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Μάλιστα, θα χρησιμοποιήσουμε τρεις διαφορετικές μεθόδους επίλυσης προκειμένου να επιδείξουμε μια ποικιλία προσεγγίσεων που έχουμε στη διάθεσή μας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Απόδειξη μη ύπαρξης ενός ορίου Να εξετάσετε τις τιμές που παίρνει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

προσεγγίζοντάς το αριθμητικά. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι το συγκεκριμένο όριο δεν υπάρχει.

Λύση Αν το συγκεκριμένο όριο υπάρχει, περιμένουμε ότι οι τιμές της $f(x,y)$ στον Πίνακα 1 θα προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο σε μια οριακή τιμή L, καθώς το (x,y) προσεγγίζει το $(0,0)$. Από τον πίνακα όμως παρατηρούμε ότι:

- Καθώς το (x,y) προσεγγίζει το $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα x, η $f(x,y)$ προσεγγίζει την τιμή 1.
- Καθώς το (x,y) προσεγγίζει το $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα y, η $f(x,y)$ προσεγγίζει την τιμή 0.
- Καθώς το (x,y) προσεγγίζει το $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=x$, η $f(x,y)$ προσεγγίζει την τιμή 0.5.

Αυτές οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι η $f(x,y)$ δεν φαίνεται να προσεγγίζει κάποια σταθερή τιμή L καθώς $(x,y)\to(0,0)$.

Πίνακας 1 Τιμές της συνάρτησης $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$

(x,y)	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.5	**0.5**	0.39	0.265	0.138	0.038	**0**	0.038	0.138	0.265	0.39	**0.5**
0.4	0.61	**0.5**	0.36	0.2	0.059	**0**	0.059	0.2	0.36	**0.5**	0.61
0.3	0.735	0.64	**0.5**	0.308	0.1	**0**	0.1	0.308	**0.5**	0.64	0.735
0.2	0.862	0.8	0.692	**0.5**	0.2	**0**	0.2	**0.5**	0.692	0.8	0.862
0.1	0.962	0.941	0.9	0.8	**0.5**	**0**	**0.5**	0.8	0.9	0.941	0.962
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**		**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
−0.1	0.962	0.941	0.9	0.8	**0.5**	**0**	**0.5**	0.8	0.9	0.941	0.962
−0.2	0.862	0.8	0.692	**0.5**	0.2	**0**	0.2	**0.5**	0.692	0.8	0.862
−0.3	0.735	0.640	**0.5**	0.308	0.1	**0**	0.1	0.308	**0.5**	0.640	0.735
−0.4	0.610	**0.5**	0.360	0.2	0.059	**0**	0.059	0.2	0.36	**0.5**	0.61
−0.5	**0.5**	0.39	0.265	0.138	0.038	**0**	0.038	0.138	0.265	0.390	**0.5**

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τρεις διαφορετικές μεθόδους.

Πρώτη μέθοδος Θα δείξουμε ότι η $f(x,y)$ προσεγγίζει διαφορετικά όρια καθώς πλησιάζουμε προς την αρχή των αξόνων $(0,0)$ κατά μήκος των αξόνων x και y (βλ. Σχήμα 5).

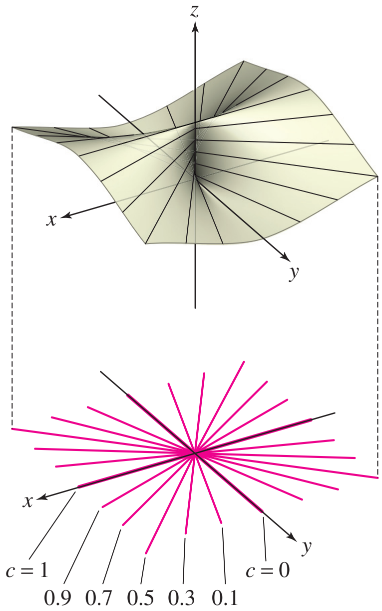
Όριο κατά μήκος του άξονα x:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Όριο κατά μήκος του άξονα y:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Αφού αυτά τα δύο όρια είναι διαφορετικά, αυτό σημαίνει ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.



Σχήμα 5 Η γραφική παράσταση και ο ισοσταθμικός χάρτης της συνάρτησης $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

Δεύτερη μέθοδος Αν θέσουμε $y = mx$, τότε θα έχουμε περιορίσει την «κίνησή» μας πάνω σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση ίση με m. Στην περίπτωση αυτή το ζητούμενο όριο παίρνει τη μορφή:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε είναι προφανές ότι εξαρτάται από την τιμή της κλίσης m, γεγονός που σημαίνει ότι θα προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματα για το όριο καθώς η αρχή των αξόνων προσεγγίζεται κατά μήκος ευθειών με διαφορετικές κλίσεις. Έτσι, αν για παράδειγμα $m = 0$, γεγονός που σημαίνει ότι προσεγγίζουμε την αρχή κινούμενοι κατά μήκος του άξονα x, το όριο προκύπτει ίσο με 1. Αν πάλι $m = 1$, γεγονός που σημαίνει ότι τώρα προσεγγίζουμε την αρχή μέσω της ευθείας $y = x$, το όριο σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ίσο με $\frac{1}{2}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει. Ο ισοσταθμικός χάρτης του Σχήματος 5 δείχνει τα διαφορετικά όρια που υπολογίζονται καθώς προσεγγίζουμε την αρχή των αξόνων κατά μήκος διαφορετικών ευθειών.

Τρίτη μέθοδος Θα μετασχηματίσουμε τη συνάρτηση της οποίας αναζητούμε το όριο στις πολικές συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$. Με τον τρόπο αυτό όμως, για οποιαδήποτε διαδρομή προσεγγίζει την αρχή των αξόνων $(0,0)$ θα πρέπει να ισχύει ότι το r πλησιάζει το 0. Προσεγγίσεις κατά μήκος διαφορετικών ευθειών μπορούν να εξεταστούν σταθεροποιώντας τη γωνία θ σε διαφορετικές τιμές και επιτρέποντας στο r να τείνει στην τιμή 0.

Επομένως, πρέπει να μελετήσουμε το όριο

$$\lim_{r\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = \lim_{r\to 0} \cos^2\theta$$

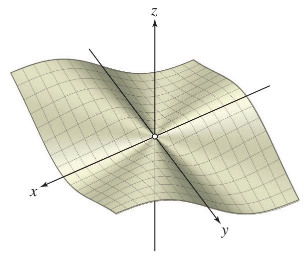
Η τιμή αυτού του ορίου εξαρτάται από τη γωνία θ. Έτσι, αν για παράδειγμα η θ πάρει την τιμή 0, γεγονός που σημαίνει ότι προσεγγίζουμε το $(0,0)$ κινούμενοι κατά μήκος του θετικού ημιάξονα x, το όριο προκύπτει να είναι ίσο με 1. Αν πάλι δώσουμε στη γωνία θ την τιμή $\pi/2$, πράγμα που σημαίνει ότι τώρα θα προσεγγίζουμε το $(0,0)$ κινούμενοι πάνω στον θετικό ημιάξονα y, τότε το όριο προκύπτει να είναι ίσο με 0. Αφού για διαφορετικές τιμές της γωνίας θ προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματα, καταλήγουμε και πάλι στο συμπέρασμα ότι το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Επιβεβαίωση ενός ορίου Υπολογίστε το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, όπου η $f(x,y)$ ορίζεται για $(x,y) \neq (0,0)$ από την $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ και απεικονίζεται στο Σχήμα 6.

Λύση Αφού η απευθείας αντικατάσταση δίνει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, είμαστε αναγκασμένοι να επιχειρήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση. Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

για να μετατρέψουμε τη συνάρτηση της οποίας το όριο αναζητούμε σε πολικές συντεταγμένες. Θα πρέπει να έχετε πάντα κατά νου ότι για οποιαδήποτε διαδρομή που προσεγγίζει την αρχή των αξόνων $(0,0)$, το r επίσης θα τείνει στο 0.



Σχήμα 6 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Έτσι, $x^2+y^2 = r^2$ και για $r \neq 0$, ισχύει

$$0 \leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2}{r^2}\right| = r|\cos\theta\sin^2\theta| \leq r$$

Καθώς το (x,y) προσεγγίζει το $(0,0)$, η μεταβλητή r τείνει επίσης στο 0, επομένως το επιθυμητό συμπέρασμα προκύπτει από το κριτήριο παρεμβολής σύμφωνα με το οποίο θα πρέπει:

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{r\to 0} r = 0$$

Τελικά, λοιπόν, θα πάρουμε $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$.

Η μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες μας επέτρεψε να υπολογίσουμε τα δύο προηγούμενα όρια. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, η μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες δεν βοηθά, καθώς δεν οδηγεί σε κάποια χρήσιμη απλοποίηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Να ελέγξετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Λύση Θα εξετάσουμε καταρχάς διαδρομές κατά μήκος ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, είναι δηλαδή της μορφής $y = mx$.

Στην περίπτωση αυτή το ζητούμενο όριο παίρνει τη μορφή:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xm}{x^2+m^2} = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι διαδρομές που προσεγγίζουν την αρχή μέσω κάποιας ευθείας δίνουν το ίδιο όριο. Αυτό όμως σε καμία περίπτωση δεν σημαίνει ότι και όλες οι διαδρομές που διέρχονται από την αρχή των αξόνων δίνουν επίσης το ίδιο όριο. Μελετώντας κανείς προσεκτικά τη μορφή $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$, ίσως ανακαλύψει ότι η συγκεκριμένη έκφραση απλοποιείται σημαντικά αν θεωρήσουμε καμπύλες της μορφής $y = ax^2$. Έτσι, αν για παράδειγμα θεωρήσουμε την $y = x^2$ (πρώτη περίπτωση) και την $y = 2x^2$ (δεύτερη περίπτωση), τότε θα έχουμε αντιστοίχως:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2)}{x^4+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2(2x^2)}{x^4+(2x^2)^2} = \frac{2}{5}$$

Αφού αυτά τα δύο όρια δεν είναι ίσα (και επιπλέον δεν είναι ίσα ούτε με το όριο όπως αυτό προκύπτει κατά την προσέγγιση της αρχής των αξόνων μέσω των ευθειών), το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Για να αποδείξουμε ότι ένα όριο δεν υπάρχει, αρκεί να προσδιορίσουμε δύο διαδρομές με βάση τις οποίες προκύπτουν διαφορετικές τιμές για το όριο. Για να αποδείξουμε όμως ότι το όριο σε ένα σημείο *πραγματικά* υπάρχει, δεν είναι αρκετό να εξετάσουμε απλώς και μόνο το όριο κατά μήκος ενός συνόλου διαδρομών μέσω των οποίων προσεγγίζουμε το σημείο. Αντί αυτού είμαστε αναγκασμένοι, όπως δείξαμε στα Παραδείγματα 2, 3, 4 και 6, να χρησιμοποιούμε τους νόμους και τα θεωρήματα των ορίων για να αποδείξουμε ότι το υπό μελέτη όριο πραγματικά υπάρχει.

14.2 Περίληψη

- Υποθέστε ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ ορίζεται κοντά στο σημείο $P=(a,b)$. Τότε
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$
αν για κάθε $\epsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν το (x,y) ικανοποιεί τη συνθήκη
$$0<d((x,y),(a,b))<\delta, \quad \text{τότε} \quad |f(x,y)-L|<\epsilon$$
- Υπάρχουν αλγεβρικοί νόμοι για τα όρια του αθροίσματος, του πολλαπλασιασμού με σταθερά, του γινομένου και του λόγου.
- Μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών είναι *συνεχής* στο σημείο $P=(a,b)$ αν ισχύει ότι
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$
- Για να αποδείξουμε ότι ένα όριο δεν υπάρχει, είναι αρκετό να δείξουμε ότι τα όρια που προκύπτουν καθώς κινούμαστε πάνω σε δύο διαφορετικές διαδρομές δεν είναι ίσα μεταξύ τους.

14.2 Ασκήσεις

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ των δίσκων $D(P,r)$ και $D^*(P,r)$;

2. Υποθέστε ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής στο $(2,3)$ και $f(2,y)=y^3$ για $y\neq 3$. Ποια είναι η τιμή $f(2,3)$;

3. Υποθέστε ότι η $Q(x,y)$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε η $1/Q(x,y)$ να είναι συνεχής για κάθε (x,y). Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής;

α) Η $Q(x,y)$ είναι συνεχής για όλα τα (x,y).
β) Η $Q(x,y)$ είναι συνεχής για $(x,y)\neq(0,0)$.
γ) Η $Q(x,y)\neq 0$ για όλα τα (x,y).

4. Υποθέστε ότι $f(x,0)=3$ για όλα τα $x\neq 0$ και $f(0,y)=5$ για όλα τα $y\neq 0$. Σε ποιο συμπέρασμα μπορείτε να καταλήξετε σχετικά με το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$;

Ασκήσεις

Στις Ασκήσεις 1-8 να υπολογίσετε το όριο χρησιμοποιώντας τη συνέχεια.

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2+y)$ **2.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\frac{4}{9},\frac{2}{9})} \frac{x}{y}$

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,1)} (x^2y-3x^4y^3)$

4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^x}{x-4y}$ **5.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},0)} \tan x\cos y$

6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \tan^{-1}(x^2-y)$

7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x^2}-e^{-y^2}}{x+y}$ **8.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln(x-y)$

Στις Ασκήσεις 9-12 υποθέστε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(2,5)} f(x,y) = 3, \quad \lim_{(x,y)\to(2,5)} g(x,y) = 7$$

και προσδιορίστε τα ζητούμενα όρια.

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,5)} \big(g(x,y) - 2f(x,y)\big)$

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,5)} f(x,y)^2 g(x,y)$

11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,5)} e^{f(x,y)^2 - g(x,y)}$

12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,5)} \frac{f(x,y)}{f(x,y)+g(x,y)}$

13. Υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$; Εξηγήστε την απάντησή σας.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$. Να αποδείξετε ότι η $f(x,y)$ προσεγγίζει το μηδέν καθώς κινούμαστε προς το $(0,0)$ κατά μήκος είτε του άξονα x είτε του άξονα y. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει αποδεικνύοντας ότι το όριο αυτό, υπολογιζόμενο κατά μήκος της ευθείας $y = x$, είναι μη μηδενικό.

15. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$. Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $y = mx$ προκειμένου να αποδείξετε ότι το όριο που προκύπτει εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου m, επομένως το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

16. Έστω ότι $f(x,y) = \frac{2x^2+3y^2}{xy}$. Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $y = mx$ προκειμένου να αποδείξετε ότι το όριο που προκύπτει εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου m, επομένως το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

17. Να αποδείξετε ότι το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει προσεγγίζοντας την αρχή των αξόνων $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα x.

18. Έστω οι συναρτήσεις $f(x,y) = x^3/(x^2+y^2)$ και $g(x,y) = x^2/(x^2+y^2)$. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες να αποδείξετε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

ενώ το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ δεν υπάρχει.

Υπόδειξη: Να αποδείξετε ότι $g(x,y) = \cos^2\theta$ και στη συνέχεια να παρατηρήσετε ότι το $\cos\theta$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ –1 και 1 καθώς $(x,y) \to (0,0)$.

Στις Ασκήσεις 19-22 να χρησιμοποιήσετε κατάλληλη μέθοδο για να υπολογίσετε το ζητούμενο όριο ή να αποδείξετε ότι αυτό δεν υπάρχει.

19. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

20. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

21. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y^2}$

22. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$

Στις Ασκήσεις 23 και 24 να αποδείξετε ότι το αντίστοιχο όριο δεν υπάρχει προσεγγίζοντας την αρχή των αξόνων κατά μήκος ενός ή περισσότερων αξόνων.

23. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$

24. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$

25. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο παρεμβολής προκειμένου να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} (x^2-16)\cos\left(\frac{1}{(x-4)^2+y^2}\right)$$

26. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan x \sin\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right)$$

Στις Ασκήσεις 27-42 να υπολογίσετε το ζητούμενο όριο ή να αποδείξετε ότι αυτό δεν υπάρχει.

27. $\displaystyle\lim_{(z,w)\to(-2,1)} \frac{z^4\cos(\pi w)}{e^{z+w}}$

28. $\displaystyle\lim_{(z,w)\to(-1,2)} (z^2 w - 9z)$

29. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,2)} \frac{y-2}{\sqrt{x^2-4}}$

30. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{1+y^2}$

31. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

32. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

33. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \frac{\cos x}{\sin y}$

34. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x \sin y}{y}$

35. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-3)} e^{x-y}\ln(x-y)$

36. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{|x|+|y|}$

37. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-3,-2)} (x^2y^3+4xy)$

38. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} e^{x^2-y^2}$

39. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan(x^2+y^2)\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

40. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y+2)e^{-1/(x^2+y^2)}$

41. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

42. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y^2-2}{|x-1|+|y-1|}$

Υπόδειξη: Μετασχηματίστε το όριο με τη βοήθεια των σχέσεων $u=x-1$ και $v=y-1$.

43. Έστω η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

α) Να αποδείξετε ότι

$$|x^3|\le|x|(x^2+y^2),\qquad |y^3|\le|y|(x^2+y^2)$$

β) Να αποδείξετε ότι $|f(x,y)|\le|x|+|y|$.

γ) Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο παρεμβολής για να αποδείξετε ότι

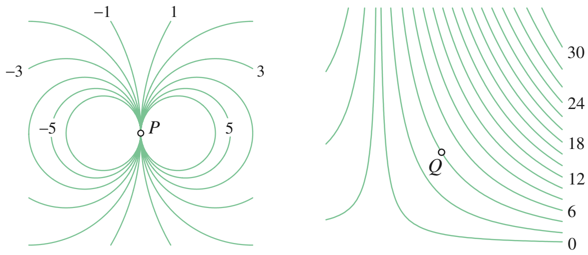
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

44. Έστω $a,b\ge 0$. Να αποδείξετε ότι αν $a+b>2$, τότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^ay^b}{x^2+y^2}=0$$

ενώ αν $a+b\le 2$, τότε το προηγούμενο όριο δεν υπάρχει.

45. Στο Σχήμα 7 απεικονίζονται οι ισοσταθμικοί χάρτες δύο συναρτήσεων. Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)$ στο σχήμα (α). Υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to Q} g(x,y)$ με βάση το σχήμα (β); Αν ναι, ποια είναι η τιμή του;



(α) Ισοσταθμικός χάρτης της $f(x,y)$

(β) Ισοσταθμικός χάρτης της $g(x,y)$

Σχήμα 7

Ασκήσεις πρόκλησης

46. Υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} (1+x)^{y/x}$.

47. Ελέγξτε αν η ακόλουθη συνάρτηση είναι συνεχής.

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & \text{αν } x^2+y^2<1 \\ 1 & \text{αν } x^2+y^2\ge 1 \end{cases}$$

48. $\boxed{\text{ΥΣΑ}}$ Η συνάρτηση $f(x,y)=\sin(xy)/xy$ ορίζεται για $xy\ne 0$.

α) Είναι δυνατόν να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε όλο τον χώρο $\mathbf{R}^2$ κατά τέτοιον τρόπο ώστε να προκύψει μια συνεχής συνάρτηση;

β) Να χρησιμοποιήσετε ένα ΥΣΑ για να σχεδιάσετε το γράφημα της συνάρτησης f. Υποστηρίζει το αποτέλεσμά σας το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξατε στο ερώτημα α);

49. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(2^x-1)(\sin y)}{xy} & \text{αν } xy\ne 0 \\ \ln 2 & \text{αν } xy=0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0,0)$.

50. Να αποδείξετε ότι αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x=a$ και η $g(y)$ είναι συνεχής στο $y=b$, τότε η $F(x,y)=f(x)g(y)$ είναι συνεχής στο (a,b).

51. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^6+2y^2}$.

α) Αποδείξτε ότι καθώς $(x,y) \to (0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = mx$, το όριο της συνάρτησης είναι ίσο με το 0.

β) Αποδείξτε ότι καθώς $(x,y) \to (0,0)$ κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, το όριο της συνάρτησης δεν είναι ίσο με το 0, επομένως το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

14.3 Μερικές παράγωγοι

Όπως έχουμε ήδη τονίσει, μια συνάρτηση f με δύο ή περισσότερες μεταβλητές δεν έχει έναν μοναδικό ρυθμό μεταβολής αφού η κάθε μεταβλητή μπορεί να επηρεάζει με διαφορετικό τρόπο την f. Έτσι, για παράδειγμα, η ένταση του ρεύματος I που κυκλοφορεί σε ένα κύκλωμα είναι συνάρτηση τόσο της διαφοράς δυναμικού V όσο και της αντίστασης R, με την εξάρτηση να περιγράφεται μέσω του νόμου του Ohm που έχει τη μορφή:

$$I(V,R) = \frac{V}{R}$$

Η ένταση του ρεύματος I *αυξάνεται* ως συνάρτηση του V (όταν η R είναι σταθερή), αλλά *μειώνεται* ως συνάρτηση του R (όταν το V είναι σταθερό).

Οι **μερικές παράγωγοι** είναι οι ρυθμοί μεταβολής ως προς καθεμία από τις μεταβλητές ξεχωριστά. Έτσι, μια συνάρτηση $f(x,y)$ με δύο μεταβλητές θα έχει δύο μερικές παραγώγους, που συμβολίζονται με f_x και f_y, οι οποίες μάλιστα θα ορίζονται από τα ακόλουθα όρια (εφόσον αυτά υπάρχουν):

$$\boxed{f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}, \qquad f_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}}$$

Αυτό σημαίνει ότι η f_x είναι η παράγωγος της $f(x,b)$, που είναι συνάρτηση μόνο του x, ενώ η f_y είναι η παράγωγος της $f(a,y)$ που είναι συνάρτηση μόνο του y. Η f_x ονομάζεται **μερική παράγωγος της f ως προς τη μεταβλητή** x ή ως η x **παράγωγος της** f, ενώ παρόμοια ορολογία χρησιμοποιείται για την f_y. Ο συμβολισμός κατά Leibniz για τις μερικές παραγώγους είναι ο ακόλουθος:

Το σύμβολο ∂ που χρησιμοποιείται για τη μερική παράγωγο είναι ένα «στρογγυλεμένο d». Χρησιμοποιείται προκειμένου να διαχωρίσει τις παραγώγους μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών από τις παραγώγους των συναρτήσεων μίας μεταβλητής όπου χρησιμοποιούμε το σύμβολο «d».

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b)$$

Στην περίπτωση που $z = f(x,y)$, μπορούμε επίσης να γράψουμε τις προηγούμενες μερικές παραγώγους ως $\partial z/\partial x$ και $\partial z/\partial y$.

Οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο που υπολογίζονται και οι συνηθισμένες παράγωγοι στην περίπτωση των συναρτήσεων με μία μεταβλητή με την εξής διαφορά: Προκειμένου να υπολογίσουμε την f_x, θα χειριζόμαστε τη μεταβλητή y ως μια σταθερά και έτσι θα έχουμε την παράγωγο της συνάρτησης f ως προς τη x. Αντιστοίχως, για να υπολογίσουμε την f_y, θα χειριζόμαστε τη μεταβλητή x ως μια σταθερά και έτσι θα έχουμε την παράγωγο της συνάρτησης f ως προς την y.

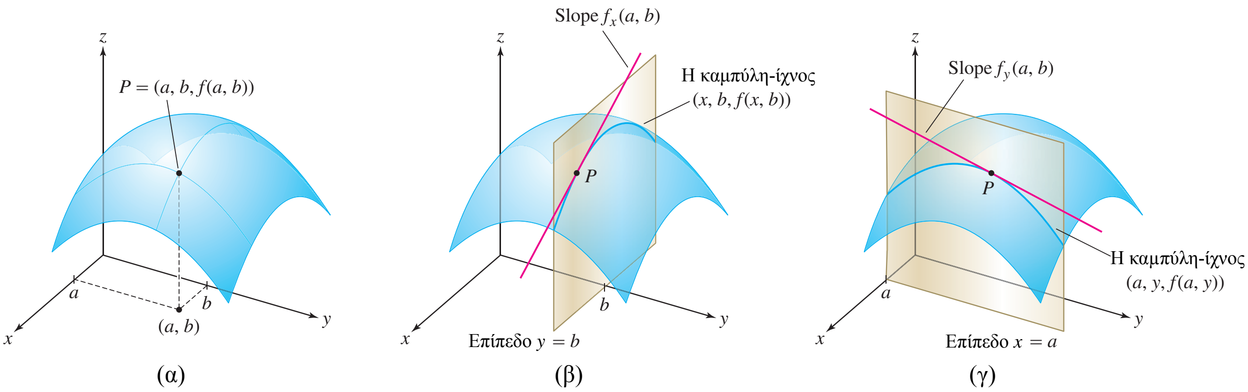
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $f(x, y) = x^2y^5$.

Λύση Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα θα ισχύει:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^5) = y^5\frac{\partial}{\partial x}(x^2)}_{\text{Αντιμετωπίζουμε το } y^5 \text{ ως μια σταθερά}} = y^5(2x) = 2xy^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^5) = x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^5)}_{\text{Αντιμετωπίζουμε το } x^2 \text{ ως μια σταθερά}} = x^2(5y^4) = 5x^2y^4$$

Εμβάθυνση στα σχήματα Οι μερικές παράγωγοι στο σημείο $P = (a, b)$ αντιπροσωπεύουν τις κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών των καμπυλών-ιχνών του γραφήματος της $f(x, y)$ στο σημείο $(a, b, f(a, b))$ του Σχήματος 1α. Για να υπολογίσουμε την $f_x(a, b)$ θέτουμε $y = b$ και παραγωγίζουμε στην κατεύθυνση x. Με τον τρόπο αυτόν προκύπτει η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη που είναι το ίχνος του γραφήματος της f στο επίπεδο $y = b$ (βλ. Σχήμα 1β). Παρομοίως, η $f_y(a, b)$ είναι η κλίση της καμπύλης που είναι το ίχνος του γραφήματος της f στο επίπεδο $x = a$ (βλ. Σχήμα 1γ).



Σχήμα 1 Οι μερικές παράγωγοι και οι κλίσεις των καμπυλών-ιχνών

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Υπολογίστε τις τιμές των μερικών παραγώγων $g_x(1, 3)$ και $g_y(1, 3)$, όπου

$$g(x, y) = \frac{y^2}{(1 + x^2)^3}$$

Λύση Για να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο g_x θα χειριστούμε τη μεταβλητή y (και συνεπώς και τον όρο y^2) ως μια σταθερή ποσότητα και θα προχωρήσουμε στην παραγώγιση ως προς τη x:

$$g_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{(1 + x^2)^3}\right) = y^2\frac{\partial}{\partial x}(1 + x^2)^{-3} = \frac{-6xy^2}{(1 + x^2)^4}$$

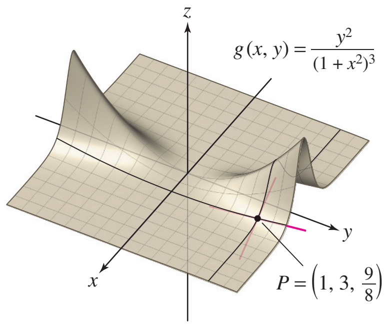
$$g_x(1, 3) = \frac{-6(1)3^2}{(1 + 1^2)^4} = -\frac{27}{8}$$

Για να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο g_y θα χειριστούμε τη μεταβλητή x [και συνεπώς και τον όρο $(1+x^2)^3$] ως μια σταθερή ποσότητα και θα προχωρήσουμε στην παραγώγιση ως προς την y:

$$\begin{aligned} g_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{(1+x^2)^3}\right) = \frac{1}{(1+x^2)^3}\frac{\partial}{\partial y}y^2 \qquad (1) \\ &= \frac{2y}{(1+x^2)^3} \\ g_y(1,3) &= \frac{2(3)}{(1+1^2)^3} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ *Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσει κανείς τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου για να υπολογίσει τη μερική παράγωγο της Εξίσωσης (1). Καθώς ο παρονομαστής δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή y, μπορούμε να τον αντιμετωπίσουμε ως μια σταθερά όταν παραγωγίζουμε ως προς την y.*

Αυτές οι τιμές που προσδιορίσαμε αντιπροσωπεύουν τις κλίσεις των καμπυλών που είναι τα ίχνη του γραφήματος της συνάρτησης στο σημείο $P = \left(1, 3, \frac{9}{8}\right)$, τα οποία φαίνονται στο Σχήμα 2. Παρατηρήστε ότι στο σχήμα αυτό η g μειώνεται καθώς το x αυξάνεται ενώ διερχόμαστε από το σημείο P, γεγονός που είναι συμβατό με το αποτέλεσμα $g_x(1,3) < 0$. Παρομοίως, επειδή η g αυξάνεται καθώς το y αυξάνεται ενώ διερχόμαστε από το σημείο P, είναι λογικό να είναι $g_y(1,3) > 0$.



Σχήμα 2 Οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών στις καμπύλες-ίχνη στο σημείο P είναι οι $g_x(1,3)$ και $g_y(1,3)$

Ο κανόνας της αλυσίδας χρησιμοποιήθηκε στο Παράδειγμα 2 για τον υπολογισμό της $g_x(x,y)$. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων μιας σύνθετης συνάρτησης, όπως η $f(x,y) = \sin(3x^2+4y)$, με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας στον Λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Έτσι, για παράδειγμα, προκειμένου να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή x, θα πάρουμε την παράγωγο της εξωτερικής συνάρτησης στη θέση που ορίζει η εσωτερική συνάρτηση [οπότε, με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ο όρος $\cos(3x^2+4y)$] την οποία θα πολλαπλασιάσουμε με την παράγωγο (ως προς x) της εσωτερικής συνάρτησης, δηλαδή τον όρο $6x$. Επομένως

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin(3x^2+4y) = \cos(3x^2+4y)\frac{\partial}{\partial x}(3x^2+4y) = 6x\cos(3x^2+4y)$$

Στον πολυμεταβλητό Λογισμό όμως υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι σύνθεσης συναρτήσεων. Συνεπώς, υπάρχουν διαφορετικές δυνατότητες εφαρμογής του κανόνα της αλυσίδας. Θα μελετήσουμε άλλες μορφές για πολυμεταβλητούς κανόνες αλυσίδας στις Ενότητες 14.5 και 14.6.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Κανόνας της αλυσίδας για μερικές παραγώγους Υπολογίστε τη μερική παράγωγο

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln(xy-2y^2)$$

Λύση Κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\ln(xy-2y^2) = \left(\frac{1}{xy-2y^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}(xy-2y^2)}_{\text{Κανόνας της αλυσίδας}} = \left(\frac{1}{xy-2y^2}\right)(x-4y) = \frac{x-4y}{xy-2y^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Δείκτης ψυχρότητας του ανέμου Ο **δείκτης ψυχρότητας του ανέμου** $W(T, v)$ (σε °C), που μετρά το «ψύχος» που αισθάνονται οι άνθρωποι (με βάση τον ρυθμό απώλειας θερμότητας από το εκτιθέμενο δέρμα) όταν η εξωτερική θερμοκρασία είναι ίση με T°C (με $T \leq 10$) και η ταχύτητα του ανέμου είναι v m/s (με $v \geq 2$), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W = 13.1267 + 0.6215T - 13.947v^{0.16} + 0.486Tv^{0.16}$$

Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial W}{\partial T}$ και $\frac{\partial W}{\partial v}$. Δείξτε ότι για σταθερή ταχύτητα του ανέμου, η επίδραση της μεταβολής της θερμοκρασίας T στον δείκτη ψυχρότητας του ανέμου δεν εξαρτάται από την T και ότι η επίδραση της μεταβολής της ταχύτητας του ανέμου είναι μεγαλύτερη όσο χαμηλότερη είναι η θερμοκρασία.

Λύση Οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial W}{\partial T} = 0.6125 + 0.486v^{0.16}$$

$$\frac{\partial W}{\partial v} = -13.947(0.16)v^{-0.84} + 0.486T(0.16)v^{-0.84} = -2.2315v^{-0.84} + 0.0778Tv^{-0.84}$$

Παρατηρήστε τώρα ότι η μερική παράγωγος $\frac{\partial W}{\partial T}$ δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία T, γεγονός που σημαίνει ότι για σταθερή ταχύτητα ανέμου η $\frac{\partial W}{\partial T}$ είναι η ίδια, ανεξάρτητα της θερμοκρασίας. Έτσι, για παράδειγμα, για ταχύτητα ανέμου ίση με 20 m/s, ισχύει ότι $\frac{\partial W}{\partial T} = 0.6125 + 0.486(20)^{0.16} \approx 1.3877$ (°C ανά °C) για όλες τις τιμές της T.

Αντιθέτως, για σταθερή ταχύτητα ανέμου, η μερική παράγωγος $\frac{\partial W}{\partial v}$ μειώνεται καθώς η T μειώνεται. Έτσι, για παράδειγμα (το αποτέλεσμα προκύπτει σε °C ανά m/s), έχουμε

$$\frac{\partial W}{\partial v}\Big|_{(5,10)} \approx -0.2663 \qquad \frac{\partial W}{\partial v}\Big|_{(-5,10)} \approx -0.3788 \qquad \frac{\partial W}{\partial v}\Big|_{(-15,10)} \approx -0.4912$$

Αυτό σημαίνει ότι για σταθερή ταχύτητα ανέμου η αύξηση της ταχύτητας του ανέμου έχει μεγαλύτερη επίδραση στον δείκτη ψυχρότητας του ανέμου στις χαμηλότερες θερμοκρασίες.

Οι μερικές παράγωγοι ορίζονται για συναρτήσεις με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών. Μπορούμε να υπολογίσουμε μια μερική παράγωγο ως προς οποιαδήποτε από τις μεταβλητές παραγωγίζοντάς τη ως προς τη συγκεκριμένη μεταβλητή ενώ ταυτόχρονα κρατάμε τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Περισσότερες από δύο μεταβλητές Υπολογίστε την τιμή της μερικής παραγώγου $f_z(0, 0, 1, 1)$, όπου $f(x, y, z, w) = \frac{e^{xz+y}}{z^2+w}$.

Λύση Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πηλίκου, θεωρώντας τις x, y και w ως σταθερές και παραγωγίζοντας ως προς z θα έχουμε:

$$f_z(x, y, z, w) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{xz+y}}{z^2+w}\right) = \frac{(z^2+w)\frac{\partial}{\partial z}e^{xz+y} - e^{xz+y}\frac{\partial}{\partial z}(z^2+w)}{(z^2+w)^2}$$

$$= \frac{(z^2+w)xe^{xz+y} - 2ze^{xz+y}}{(z^2+w)^2} = \frac{(z^2x + wx - 2z)e^{xz+y}}{(z^2+w)^2}$$

$$f_z(0, 0, 1, 1) = \frac{-2e^0}{(1^2+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

Στο Παράδειγμα 5 ο υπολογισμός $\frac{\partial}{\partial z}e^{xz+y} = xe^{xz+y}$ *γίνεται με βάση τον κανόνα της αλυσίδας ακριβώς όπως και στην περίπτωση* $\frac{d}{dz}e^{4z+2} = 4e^{4z+2}$.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα εκτιμήσουμε μια μερική παράγωγο αριθμητικά. Αφού οι f_x και f_y είναι όρια από πηλίκα διαφορών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες προσεγγιστικές εκφράσεις όταν οι μεταβολές Δx και Δy είναι μικρές:

Αυτές οι προσεγγιστικές εκφράσεις είναι πολυμεταβλητές παραλλαγές της προσέγγισης του πηλίκου διαφορών που εισήχθη στην Ενότητα 3.1.

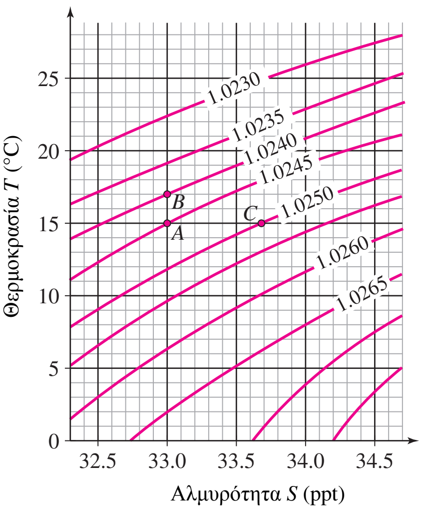
$$f_x(a,b) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x}$$

$$f_y(a,b) \approx \frac{\Delta f}{\Delta y} = \frac{f(a, b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y}$$

Παρόμοιες εκφράσεις βέβαια ισχύουν για συναρτήσεις με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Εκτίμηση μερικών παραγώγων με τη βοήθεια ισοσταθμικών χαρτών

Η πυκνότητα του θαλασσινού νερού, που εξαρτάται από την αλμυρότητα και τη θερμοκρασία, μπορεί να εκφραστεί ως μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $\rho(S,T)$, όπου ρ η πυκνότητα εκφρασμένη σε kg/m^3, S η αλμυρότητα εκφρασμένη σε ppt και T η θερμοκρασία σε ^{o}C. Χρησιμοποιήστε τον ισοσταθμικό χάρτη της πυκνότητας του θαλασσινού νερού που φαίνεται στο Σχήμα 3 προκειμένου να εκτιμήσετε τις μερικές παραγώγους $\partial\rho/\partial T$ και $\partial\rho/\partial S$ στο $A = (33, 15)$.



Σχήμα 3 Ισοσταθμικός χάρτης της πυκνότητας του θαλασσινού νερού ως συνάρτηση της θερμοκρασίας και της αλμυρότητας

Λύση Θα εκτιμήσουμε τη $\partial\rho/\partial T$ στο A σε δύο βήματα.

Βήμα 1 **Επιλέξτε μια μεταβολή ΔT και εκτιμήστε την τιμή $\rho(33, 15 + \Delta T)$.**
Με την αλμυρότητα S να διατηρείται σταθερή στην τιμή 33, μια μεταβολή της θερμοκρασίας μας μετακινεί πάνω στον ισοσταθμικό χάρτη κατακόρυφα από το σημείο A. Για να προχωρήσουμε στην εκτίμησή μας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε μικρή μεταβολή για το ΔT. Επιλέγουμε $\Delta T = 2$, καθώς το αντίστοιχο σημείο (σημειώνεται με B στον ισοσταθμικό χάρτη) κείτεται πάνω σε μια ισοσταθμική καμπύλη κοντά στο A, ενώ επιπλέον στο σημείο B γνωρίζουμε την τιμή της πυκνότητας. Έτσι, με $\Delta T = 2$, θα έχουμε $\rho(33, 15 + \Delta T) = \rho(33, 17) = 1.0240$.

Βήμα 2 **Υπολογίστε το πηλίκο των διαφορών και κάντε την προσέγγιση.**

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{(33,15)} \approx \frac{\rho(33,17) - \rho(33,15)}{2} = \frac{1.0240 - 1.0245}{2} = \frac{-0.0005}{2} = -0.00025 \text{ kg}\cdot \text{m}^{-3}/^\circ\text{C}$$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μερική παράγωγο $\partial\rho/\partial S$ με παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας δηλαδή μια μεταβολή $\Delta S \approx 0.7$, η οποία μας φέρνει στο σημείο C πάνω σε μια ισοσταθμική καμπύλη του ισοσταθμικού χάρτη της πυκνότητας ρ. Έτσι, θα έχουμε:

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial S}\right|_{(33,15)} \approx \frac{\rho(33.7,15)-\rho(33,15)}{0.7} = \frac{1.0250-1.0245}{0.7} = \frac{0.0005}{0.7} \approx 0.0007 \text{ kg}\cdot \text{m}^{-3}/\text{ppt}$$

Μερικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Οι μερικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης είναι οι παράγωγοι των παραγώγων. Έτσι, για παράδειγμα, οι μερικές παράγωγοι *δεύτερης τάξης* μιας συνάρτησης f είναι οι μερικές παράγωγοι των f_x και f_y. Θα γράφουμε λοιπόν f_{xx} για την x παράγωγο της f_x και f_{yy} για την y παράγωγο της f_y:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Υπάρχουν επίσης και οι *μεικτές μερικές παράγωγοι*:

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Η διαδικασία «δημιουργίας» μερικών παραγώγων μπορεί να συνεχιστεί με παρόμοιο τρόπο. Έτσι, για παράδειγμα, η f_{xyx} είναι η x παράγωγος της f_{xy}, ενώ η f_{xyy} είναι η y παράγωγος της f_{xy} (εκτελούμε τις διαδοχικές παραγωγίσεις με τη σειρά που υποδεικνύουν οι δείκτες ξεκινώντας από αριστερά και κινούμενοι προς τα δεξιά). Ο συμβολισμός κατά Leibniz για τις παραγώγους υψηλότερης τάξης είναι:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Οι μερικές πράγωγοι υψηλότερης τάξης ορίζονται για συναρτήσεις με τρεις ή και περισσότερες μεταβλητές με παρόμοιο τρόπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x,y) = x^3 + y^2e^x$.

Λύση Θα υπολογίσουμε αρχικά τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης που είναι:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^2e^x) = 3x^2 + y^2e^x, \qquad f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^2e^x) = 2ye^x$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f_x = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2+y^2e^x) = 6x + y^2e^x \quad f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f_y = \frac{\partial}{\partial y}2ye^x = 2e^x$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2+y^2e^x) = 2ye^x \qquad f_{yx}(x,y) = \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}2ye^x = 2ye^x$$

Δεν αποτελεί σύμπτωση το γεγονός ότι στο προηγούμενο παράδειγμα ισχύει $f_{xy} = f_{yx}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συνέπεια ενός γενικού θεωρήματος που θα παρουσιάσουμε αμέσως μετά το παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8
Υπολογίστε τη μερική παράγωγο f_{xyy} της συνάρτησης
$$f(x,y) = x^3 + y^2 e^x$$

Θυμηθείτε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι δείκτες στις μερικές παραγώγους. Ο συμβολισμός f_{xyy} υποδηλώνει ότι αρχικά παραγωγίζουμε ως προς τη μεταβλητή x και στη συνέχεια παραγωγίζουμε δύο φορές ως προς τη μεταβλητή y.

Λύση Στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίσαμε την $f_{xy} = 2ye^x$. Επομένως, θα έχουμε:
$$f_{xyy} = \frac{\partial}{\partial y} f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} 2ye^x = 2e^x$$

Το θεώρημα που ακολουθεί φέρει το όνομα του Γάλλου μαθηματικού Alexis Clairaut (βλ. Σχήμα 4) και δηλώνει ότι σε μια μικτή μερική παράγωγο η σειρά με την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις δεν έχει σημασία, εφόσον οι μεικτές μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς. Μια απόδειξη του θεωρήματος αυτού υπάρχει στο Παράρτημα Δ.

Η υπόθεση του θεωρήματος Clairaut για τη συνέχεια των συναρτήσεων f_{xy}, f_{yx} ικανοποιείται σχεδόν πάντα στις περιπτώσεις που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει στην Άσκηση 80 ένα παράδειγμα στο οποίο οι μεικτές μερικές παράγωγοι δεν είναι ίσες.

Σχήμα 4 Ο Alexis Clairaut (1713-1765) ήταν ένας λαμπρός Γάλλος μαθηματικός που παρουσίασε την πρώτη του εργασία στην Ακαδημία των Επιστημών του Παρισίου σε ηλικία μόλις 13 ετών. Το 1752 ο Clairaut κέρδισε ένα βραβείο για μια εργασία του με θέμα την κίνηση της Σελήνης, την οποία ο Euler εγκωμίασε (σίγουρα υπερβάλλοντας) ως «την πλέον σημαντική και βαθιά ανακάλυψη που έγινε ποτέ στα μαθηματικά».

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Θεώρημα Clairaut: ισότητα των μεικτών παραγώγων Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} και είναι συνεχείς σε έναν δίσκο D, τότε ισχύει $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ για όλα τα σημεία $(a,b) \in D$. Έτσι, στο D θα έχουμε ότι
$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 Να επιβεβαιώσετε ότι $\frac{\partial^2 W}{\partial U \partial T} = \frac{\partial^2 W}{\partial T \partial U}$ για τη συνάρτηση $W = e^{U/T}$.

Λύση Θα υπολογίσουμε τις δύο μεικτές παραγώγους και θα ελέγξουμε ότι πράγματι είναι ίσες:
$$\frac{\partial W}{\partial T} = e^{U/T}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{U}{T}\right) = -UT^{-2}e^{U/T}, \qquad \frac{\partial W}{\partial U} = e^{U/T}\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{U}{T}\right) = T^{-1}e^{U/T}$$
$$\frac{\partial}{\partial U}\frac{\partial W}{\partial T} = -T^{-2}e^{U/T} - UT^{-3}e^{U/T}, \qquad \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial W}{\partial U} = -T^{-2}e^{U/T} - UT^{-3}e^{U/T}$$

Αν και το θεώρημα του Clairaut διατυπώθηκε για τις f_{xy} και f_{yx}, εντούτοις δηλώνει γενικότερα ότι η μερική παραγώγιση μπορεί να γίνει με όποια σειρά επιθυμούμε, αρκεί οι υπό μελέτη παράγωγοι να είναι συνεχείς (βλ. Άσκηση 71). Έτσι, για παράδειγμα, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο f_{xyxy} παραγωγίζοντας τη συνάρτηση f δύο φορές ως προς x και δύο φορές ως προς y με όποια σειρά επιθυμούμε. Έτσι, θα ισχύει:
$$f_{xyxy} = f_{xxyy} = f_{yyxx} = f_{yxyx} = f_{xyyx} = f_{yxxy}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 Επιλογή της σειράς παραγώγισης με βολικό τρόπο Υπολογίστε τη μερική παράγωγο g_{zzwx} για τη συνάρτηση $g(x,y,z,w) = x^3w^2z^2 + \sin\left(\frac{xy}{z^2}\right)$.

Λύση Θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι οι παραγωγίσεις μπορούν να γίνουν με οποιαδήποτε σειρά. Αν λοιπόν παραγωγίσουμε αρχικά ως προς w, ο δεύτερος όρος της συνάρτησης θα εξαφανιστεί καθώς δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή αυτή. Έτσι:

$$g_w = \frac{\partial}{\partial w}\left(x^3w^2z^2 + \sin\left(\frac{xy}{z^2}\right)\right) = 2x^3wz^2$$

Στη συνέχεια, θα παραγωγίσουμε δύο φορές ως προς τη μεταβλητή z και μία φορά ως προς τη μεταβλητή x προκειμένου να προσδιορίσουμε τη ζητούμενη μερική παράγωγο. Έτσι θα έχουμε διαδοχικά:

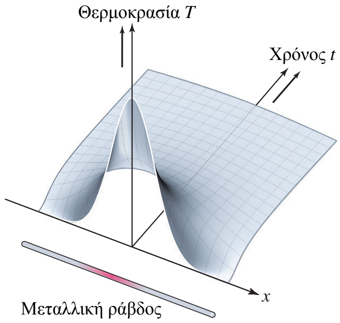
$$g_{wz} = \frac{\partial}{\partial z}2x^3wz^2 = 4x^3wz$$

$$g_{wzz} = \frac{\partial}{\partial z}4x^3wz = 4x^3w$$

$$g_{wzzx} = \frac{\partial}{\partial x}4x^3w = 12x^2w$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι $g_{zzwx} = g_{wzzx} = 12x^2w$.

Μια **μερική διαφορική εξίσωση** (ΜΔΕ) είναι μια διαφορική εξίσωση στην οποία εμπλέκονται συναρτήσεις πολλών μεταβλητών καθώς και οι μερικές παράγωγοί τους. Η λύση μιας ΜΔΕ είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί τη συγκεκριμένη εξίσωση. Η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας που θα συναντήσουμε στο παράδειγμα που ακολουθεί είναι μια ΜΔΕ η οποία περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η θερμοκρασία καθώς η θερμότητα διαδίδεται σε ένα αντικείμενο. Υπάρχουν άπειρες λύσεις που εξαρτώνται από την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας στο εν λόγω αντικείμενο. Η συγκεκριμένη συνάρτηση που θα συναντήσουμε στο παράδειγμα που ακολουθεί, περιγράφει τη θερμοκρασία για χρονικές στιγμές $t > 0$ κατά μήκος μιας μεταλλικής ράβδου όταν στο κέντρο της πραγματοποιηθεί μια απότομη προσφορά θερμότητας τη χρονική στιγμή $t = 0$ (βλ. Σχήμα 5).



Σχήμα 5 Το γράφημα της συνάρτησης
$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-(x^2/4t)}$$
παριστάνει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η θερμοκρασία συναρτήσει του χρόνου σε μια μεταλλική ράβδο μετά από μια απότομη προσφορά θερμότητας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11 Η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-(x^2/4t)}$$

που ορίζεται για $t > 0$ ικανοποιεί την εξίσωση διάδοσης της θερμότητας η οποία έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

Λύση Αφού γράψουμε τη συνάρτηση στη μορφή $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}t^{-1/2}e^{-(x^2/4t)}$, θα υπολογίσουμε αρχικά την $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}t^{-1/2}e^{-(x^2/4t)}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}xt^{-3/2}e^{-(x^2/4t)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\, x t^{-3/2} e^{-(x^2/4t)}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\, t^{-3/2} e^{-(x^2/4t)} + \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\, x^2 t^{-5/2} e^{-(x^2/4t)}$$

Θα υπολογίσουμε στη συνέχεια την $\partial u/\partial t$ και θα ελέγξουμε ότι πράγματι είναι ίση με την $\partial^2 u/\partial x^2$, όπως απαιτείται από την εξίσωση διάδοσης της θερμότητας. Πράγματι:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, t^{-1/2} e^{-(x^2/4t)}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\, t^{-3/2} e^{-(x^2/4t)} + \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\, x^2 t^{-5/2} e^{-(x^2/4t)}$$

Ιστορικό σημείωμα Η γενική εξίσωση της διάδοσης της θερμότητας, της οποίας η Εξίσωση (2) αποτελεί ειδική περίπτωση, διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1807 από τον Γάλλο μαθηματικό Jean Baptiste Joseph Fourier. Ως νεαρός ο Fourier ταλαντευόταν μεταξύ του να γίνει κληρικός και να ασχοληθεί με τα μαθηματικά. Πρέπει να ήταν εξαιρετικά φιλόδοξος, αφού σε ένα γράμμα του διαβάζουμε: «Χθες, που ήταν η επέτειος για τα 21α γενέθλιά μου, σκέφτηκα ότι σε αυτή την ηλικία ο Νεύτων και ο Pascal είχαν αρκετούς λόγους να θεωρούν ότι το όνομά τους θα παραμείνει γνωστό στην αιωνιότητα». Την εποχή εκείνη ο Fourier ενεπλάκη στη Γαλλική Επανάσταση, φυλακίστηκε μάλιστα για ένα μικρό χρονικό διάστημα το 1794 με αφορμή ένα επεισόδιο μεταξύ αντίπαλων φατριών. Το 1798, μαζί με περισσότερους από 150 άλλους επιστήμονες, ακολούθησε τον Ναπολέοντα στην αποτυχημένη εκστρατεία του στην Αίγυπτο.

Η μεγάλη συνεισφορά όμως του Fourier είναι, κατά βάση, στα μαθηματικά. Η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας εφαρμόζεται σε όλες τις φυσικές επιστήμες, αλλά και στην επιστήμη της μηχανικής, π.χ. από τη διάδοση της θερμότητας μέσα από τους ωκεανούς αλλά και την ατμόσφαιρα της Γης, μέχρι τη χρήση θερμικών πηγών για την καταστροφή καρκινικών όγκων αλλά και τη θεραπεία καρδιοπαθειών.

Ο Fourier ήταν αυτός που εισήγαγε επίσης μια εκπληκτική νέα μαθηματική τεχνική – γνωστή σήμερα ως **μετασχηματισμός Fourier** – για την επίλυση της εξίσωσής του με βάση την ιδέα ότι μια περιοδική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως ένα (πιθανώς άπειρο) άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων. Οι κορυφαίοι μαθηματικοί της εποχής, συμπεριλαμβανομένων των Lagrange και Laplace, έγειραν αρχικά αντιρρήσεις καθώς η συγκεκριμένη τεχνική δεν ήταν εύκολο να δικαιολογηθεί με τη συνήθη μαθηματική αυστηρότητα. Παρ' όλα αυτά, ο μετασχηματισμός Fourier αποδείχθηκε μία από τις πιο σημαντικές μαθηματικές ανακαλύψεις του δεκάτου ενάτου αιώνα. Έτσι, σήμερα μια έρευνα στο διαδίκτυο με τον όρο «μετασχηματισμός Fourier» αποκαλύπτει ένα τεράστιο πεδίο σύγχρονων εφαρμογών.

Το 1855 ο Γερμανός φυσιολόγος Adolf Fick έδειξε ότι η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας μπορεί να περιγράψει όχι μόνο την αγωγή της θερμότητας αλλά και ένα ευρύ πεδίο από διεργασίες διάχυσης, όπως για παράδειγμα η ώσμωση, η μεταφορά ιόντων στο κυτταρικό επίπεδο, αλλά και η κίνηση των ρυπαντών μέσα στον αέρα ή το νερό. Με τον τρόπο αυτόν η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας έγινε ένα βασικό εργαλείο στη χημεία, τη μοριακή βιολογία και τις περιβαλλοντικές επιστήμες, όπου συχνά αναφέρεται με το όνομα **δεύτερος νόμος του Fick**.

14.3 Περίληψη

- Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f(x, y)$ ορίζονται μέσω των ορίων

$$f_x(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$f_y(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

- Υπολογίζουμε την f_x διατηρώντας την y σταθερή και παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή x, ενώ αντιστοίχως υπολογίζουμε την f_y διατηρώντας τη x σταθερή και παραγωγίζοντας ως προς την y.
- Η $f_x(a, b)$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη-ίχνος $z = f(x, b)$ στο $x = a$. Παρομοίως, η $f_y(a, b)$ είναι η κλίση στο $y = b$ της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη-ίχνος $z = f(a, y)$.
- Προσεγγιστικός υπολογισμός των μερικών παραγώγων: Για μικρές μεταβολές Δx και Δy ισχύει:

$$f_x(a,b) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x,b) - f(a,b)}{\Delta x}$$

$$f_y(a,b) \approx \frac{\Delta f}{\Delta y} = \frac{f(a,b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y}$$

  Παρόμοιες προσεγγίσεις ισχύουν για συναρτήσεις με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών.
- Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι οι:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = f_{xx}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f = f_{xy}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f = f_{yx}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = f_{yy}$$

- Σύμφωνα με το θεώρημα Clairaut, οι μεικτές μερικές παράγωγοι είναι ίσες – δηλαδή ισχύει ότι $f_{xy} = f_{yx}$ αρκεί οι f_{xy} και f_{yx} να είναι συνεχείς.
- Γενικότερα, οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης μπορούν να υπολογιστούν με οποιαδήποτε σειρά επιθυμούμε. Έτσι, για παράδειγμα, θα ισχύει $f_{xyyz} = f_{yxzy}$ αν η f είναι μια συνάρτηση των x, y, z που έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τέταρτης τάξης.

14.3 Ασκήσεις

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Η Ηρώ κατέληξε στην ακόλουθη *λανθασμένη* σχέση, καθώς δεν εφάρμοσε σωστά τον κανόνα του γινομένου:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) = x^2(2y) + y^2(2x)$$

Ποιο ήταν το λάθος που έκανε και πώς θα πρέπει να γίνει σωστά ο υπολογισμός;

2. Εξηγήστε γιατί δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του πηλίκου προκειμένου να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{y+1}\right)$. Εφαρμόζεται ο κανόνας παραγώγισης πηλίκου στον υπολογισμό της μερικής παραγώγου $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{y+1}\right)$;

3. Ποια από τις ακόλουθες μερικές παραγώγους μπορεί να υπολογιστεί χωρίς προσφυγή στον κανόνα του πηλίκου;

α) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{xy}{y^2+1}$ β) $\frac{\partial}{\partial y}\frac{xy}{y^2+1}$ γ) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2}{y^2+1}$

4. Βρείτε τη μερική παράγωγο f_x της

$$f(x, y, z) = (\sin yz)e^{z^3 - z^{-1}\sqrt{y}}$$

5. Αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Clairaut, ποια από τις ακόλουθες παραγώγους είναι ίση με την f_{xxy};

α) f_{xyx} β) f_{yyx} γ) f_{xyy} δ) f_{yxx}

Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό μέσω του ορίου για να επιβεβαιώσετε τις ακόλουθες σχέσεις για τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial}{\partial x}xy^2 = y^2, \qquad \frac{\partial}{\partial y}xy^2 = 2xy$$

2. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό μέσω του ορίου για να επιβεβαιώσετε τις ακόλουθες σχέσεις για τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-x}{y^2}$$

3. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα παραγώγισης γινομένου για να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους f_x και f_y για τη συνάρτηση

$$f(x, y) = (x^2 - y)(x - y^2)$$

4. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα παραγώγισης γινομένου για να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους f_x και f_y για τη συνάρτηση

$$f(x, y) = xye^x \sin y$$

5. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου για να υπολογίσετε την $\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x+y}$.

6. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας για να υπολογίσετε τη μερική παράγωγο

$$\frac{\partial}{\partial u}\ln(u^2 + uv)$$

7. Υπολογίστε την τιμή της μερικής παραγώγου $f_z(2, 3, 1)$ της συνάρτησης $f(x, y, z) = xyz$.

8. Εξηγήστε τη σχέση μεταξύ των ακόλουθων δύο παραγώγων (θεωρώντας ότι το c είναι μια σταθερά):

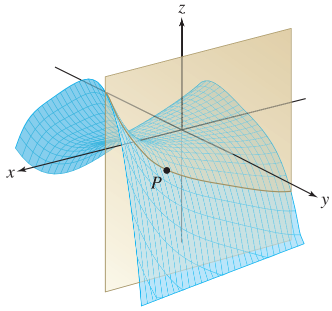
$$\frac{d}{dx}\sin(cx) = c\cos(cx), \quad \frac{\partial}{\partial x}\sin(xy) = y\cos(xy)$$

9. Το επίπεδο $y = 1$ τέμνει την επιφάνεια

$$z = x^4 + 6xy - y^4$$

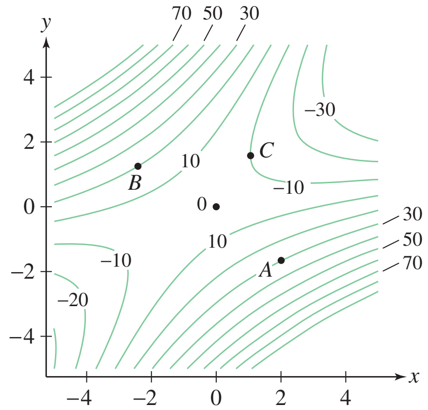
κατά μήκος μιας συγκεκριμένης καμπύλης. Υπολογίστε την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας σε αυτή την καμπύλη στο σημείο $P = (1, 1, 6)$.

10. Να ελέγξετε αν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ είναι θετικές ή αρνητικές στο σημείο P του γραφήματος της συνάρτησης f που απεικονίζεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6

Οι Ασκήσεις 11-14 αναφέρονται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7 Ισοσταθμικός χάρτης μιας συνάρτησης $f(x, y)$

11. Εκτιμήστε τις μερικές παραγώγους f_x και f_y στο σημείο A.

12. Η μερική παράγωγος f_x παίρνει θετική ή αρνητική τιμή στο σημείο B;

13. Ξεκινώντας από το σημείο B, προς ποια από τις κατευθύνσεις του ορίζοντα πρέπει να κινηθούμε (Βόρεια, Βορειοανατολικά, Βορειοδυτικά, κ.ο.κ.) έτσι ώστε η συνάρτηση f να αυξάνεται πιο γρήγορα;

14. Σε ποιο από τα σημεία A, B, ή C η μερική παράγωγος f_y παίρνει ελάχιστη τιμή;

Στις Ασκήσεις 15-42 να υπολογίσετε σε κάθε περίπτωση τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

15. $z = x^2 + y^2$

16. $z = x^4 y^3$

17. $z = x^4 y + xy^{-2}$

18. $V = \pi r^2 h$

19. $z = \dfrac{x}{y}$

20. $z = \dfrac{x}{x-y}$

21. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

22. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

23. $z = (\sin x)(\sin y)$

24. $z = \tan(uv^3)$

25. $z = \cos \dfrac{1-x}{y}$

26. $\theta = \tan^{-1}(xy^2)$

27. $w = \ln(x^2 - y^2)$

28. $P = \sin(2s - 3t)$

29. $W = e^{r+s}$

30. $Q = re^{\theta}$

31. $z = e^{xy}$

32. $R = e^{-v^2/k}$

33. $z = e^{-x^2-y^2}$

34. $P = e^{\sqrt{y^2+z^2}}$

35. $U = \dfrac{e^{-rt}}{r}$

36. $z = y^x$

37. $z = \sinh(x^2 y)$

38. $z = \cosh(t - \cos x)$

39. $w = xy^2 z^3$

40. $w = \dfrac{x}{y+z}$

41. $Q = \dfrac{L}{M} e^{-Lt/M}$

42. $w = \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

Στις Ασκήσεις 43-46 να υπολογίσετε τις τιμές των μερικών παραγώγων που σημειώνονται σε κάθε περίπτωση.

43. $f(x,y) = 3x^2 y + 4x^3 y^2 - 7xy^5, \quad f_x(1,2)$

44. $f(x,y) = \sin(x^2 - y), \quad f_y(0,\pi)$

45. $g(u,v) = u\ln(u+v), \quad g_u(1,2)$

46. $h(x,z) = e^{xz - x^2 z^3}, \quad h_z(3,0)$

47. Ο **θερμικός δείκτης** (ή **δείκτης θερμότητας**) I αποτελεί μέτρο της «ζέστης» που αισθάνεται ένας άνθρωπος μια ημέρα όπου η σχετική υγρασία είναι ίση με H (ως ποσοστό επί τοις εκατό) και η θερμοκρασία είναι ίση με T (μετρημένη σε βαθμούς Fahrenheit). Μια προσεγγιστική σχέση που δίνει τον δείκτη θερμότητας και η οποία ισχύει για ζεύγη τιμών (T,H) κοντά στο ζεύγος $(90,50)$ είναι η ακόλουθη:

$$I(T,H) = 45.33 + 0.6845T + 5.758H - 0.00365T^2 - 0.1565HT + 0.001HT^2$$

α) Υπολογίστε το I για $(T,H) = (95,50)$.

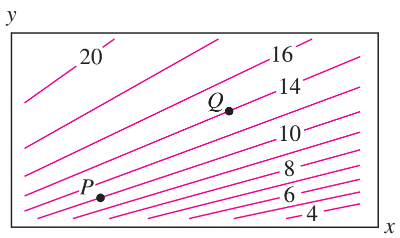
β) Ποια μερική παράγωγος μας δείχνει την αύξηση του δείκτη I ανά βαθμό αύξησης της θερμοκρασίας T, όταν $(T,H) = (95,50)$; Υπολογίστε τη συγκεκριμένη μερική παράγωγο.

48. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\partial P/\partial T$ και $\partial P/\partial V$, όπου η πίεση P, ο όγκος V και η θερμοκρασία T συνδέονται με τον νόμο των ιδανικών αερίων, δηλαδή μέσω της σχέσης $PV = nRT$ (όπου R και n είναι σταθερές ποσότητες).

49. Χρησιμοποιήστε τον ισοσταθμικό χάρτη της συνάρτησης $f(x,y)$ του Σχήματος 8 προκειμένου να εξηγήσετε τις ακόλουθες προτάσεις:

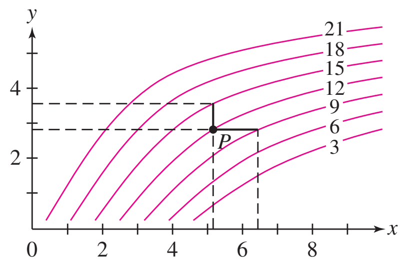
α) Η τιμή της μερικής παραγώγου f_y είναι μεγαλύτερη στο P από ό,τι στο Q, ενώ η f_x παίρνει πιο αρνητική τιμή στο P από ό,τι στο Q.

β) Η $f_x(x,y)$ μειώνεται ως συνάρτηση του y, δηλαδή για κάθε σταθερή τιμή $x = a$, η $f_x(a,y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του y.



Σχήμα 8

50. Εκτιμήστε τις μερικές παραγώγους στο σημείο P για τη συνάρτηση της οποίας ο ισοσταθμικός χάρτης φαίνεται στο Σχήμα 9.



Σχήμα 9

51. Στο μεγαλύτερο μέρος της επιφάνειας της Γης, μια μαγνητική βελόνα δεν προσανατολίζεται προς τον αληθή (γεωγραφικό) Βορρά, αλλά αποκλίνει από αυτόν κατά μια γωνία, είτε ανατολικά