3 - Ο αλγόριθμος *PageRank*

Δημήτριος Κοσμόπουλος

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μηχανικών ΗΥ κ Πληροφορικής

14 Δεκεμβρίου 2023

Το γράφημα ως μητρώο

- Αντιμετωπίζοντας το γράφημα ως μητρώο μας επιτρέπει:
  - Να αποφασίσουμε την σημασία ενός κόμβου μέσω RW
  - Να υπολογίσουμε τις ενσωματώσεις κόμβων μέσω παραγοντοποίησης
  - Να θεωρήσουμε άλλες ενσωματώσεις ως αποτέλεσμα παραγοντοποίησης
- Τα RW, οι ενσωματώσεις και η παραγοντοποίηση είναι στενά συνδεδεμένα

Το διαδίκτυο ως γράφημα

- Οι ιστοσελίδες είναι οι κόμβοι
- Οι υπερσύνδεσμοι είναι οι ακμές
- Το γράφημα είναι κατευθυντικό
- Κάποιοι κόμβοι είναι σημαντικότεροι από άλλους

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δομή του γραφήματος για να ταξινομήσουμε τους κόμβους ανάλογα με τη σημασία τους.

Οι σύνδεσμοι ως ψήφοι

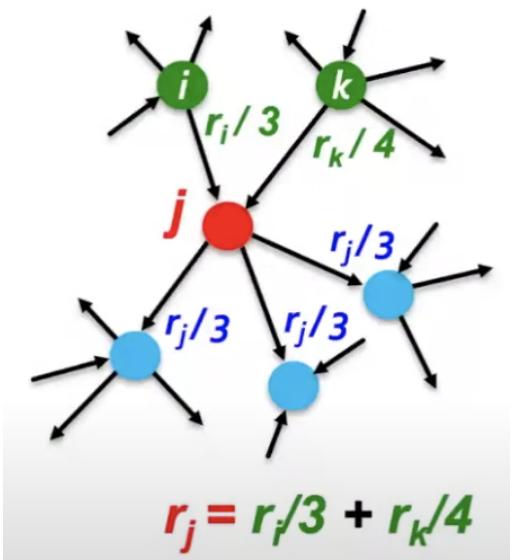
Ιδέα: οι σύνδεσμοι είναι ψήφοι.

- Μια σελίδα είναι πιο σημαντική αν έχει πολλούς συνδέσμους (εισερχόμενους; εξερχόμενους;)
- Σύνδεσμοι από σημαντικές σελίδες θα πρέπει να έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα
- Υπάρχει αναδρομική σχέση

Το μοντέλο της ροής

Σύνδεσμοι από σημαντικές σελίδες θα πρέπει να έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα

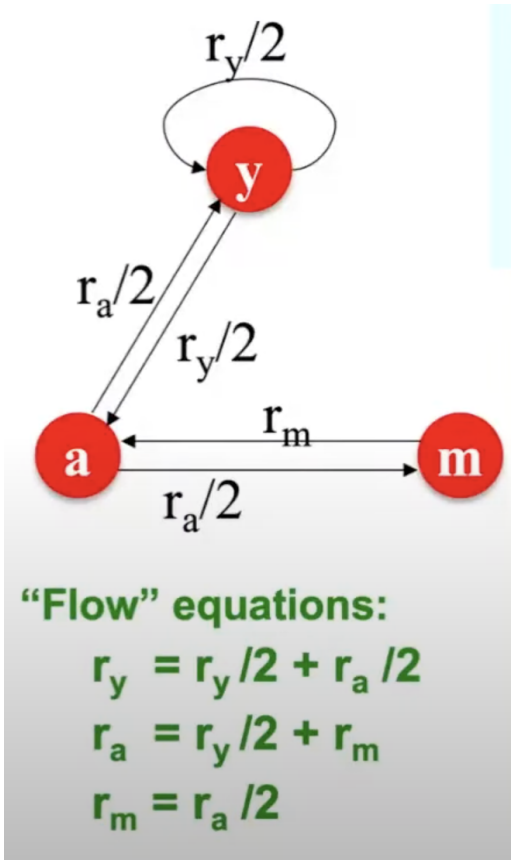
- καθε ψήφος είναι ανάλογη της σημασίας (βάρους) του κόμβου από τον οποίο προέρχεταοι
- για τον κόμβο i με βάρος r_i και εξερχόμενες d_i ακμές ο κάθε σύνδεσμος έχει βάρος $\frac{r_i}{d_i}$
- για τον κόμβο j το βάρος του r_j θα είναι το άθροισμα των βαρών των εισερχόμενων κόμβων



Το μοντέλο της ροής

Σύνδεσμοι από σημαντικές σελίδες θα πρέπει να έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα

Το βαρος του κόμβου j δίνεται από: $r_j = \sum_{i \to j} \frac{r_j}{d_i}$



Αναπαράσταση με μητρώα

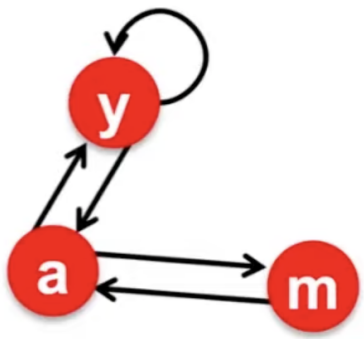
Το βαρος του κόμβου j δίνεται από: $r_j = \sum_{i \to j} \frac{r_i}{d_i}$

- και σε μορφή πίνακα:

$$\mathbf{r} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}$$

- όπου $M_{i,j} = \frac{1}{d_j}$
- το άθροισμα κάθε στήλης είναι ίσο με 1

Αναπαράσταση με μητρώα



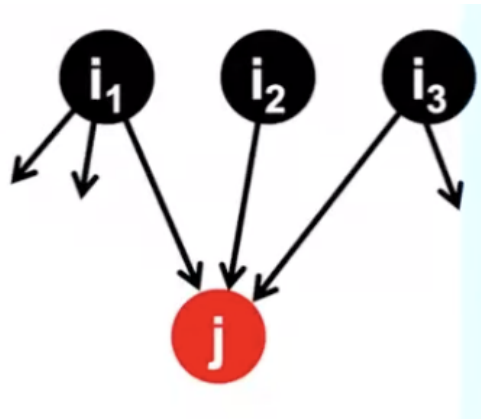
	r_y	r_a	r_m
r_y	½	½	0
r_a	½	0	1
r_m	0	½	0

$$r_y = r_y/2 + r_a/2$$
$$r_a = r_y/2 + r_m$$
$$r_m = r_a/2$$

$$\begin{bmatrix} r_y \\ r_a \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ½ & ½ & 0 \\ ½ & 0 & 1 \\ 0 & ½ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_y \\ r_a \\ r_m \end{bmatrix}$$

$$r \qquad M \qquad r$$

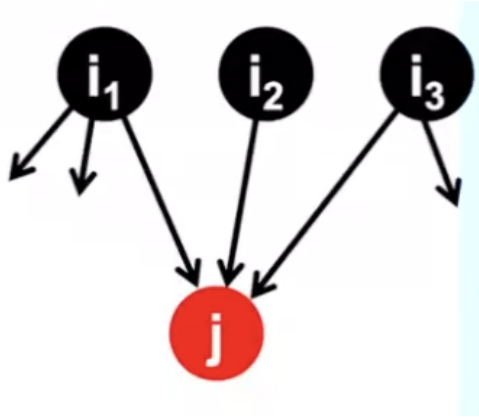
Συσχέτιση με *RW*



- Τη χρονική στιγμή t βρισκόμαστε στη σελίδα i
- Τη χρονική στιγμή $t+1$ ακολουθούμε σύνδεσμο με ομοιόμορφη κατανομή
- Καταλήγουμε σε σελίδα j που συνδέεται με τη σελίδα i
- Η διαδικασία επαναλαμβάνεται

Θεωρούμε ότι $p_i(t)$ η πιθανότητα να βρισκόμαστε στη σελίδα i τη χρονική στιγμή t.

Στατική συνάρτηση πιθανότητας



Που βρισκόμαστε τη χρονική στιγμή $t+1$;

$$\mathbf{p}(t+1) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{p}(t)$$

Αν φτάσουμε σε σημείο όπου $\mathbf{p}(t+1) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{p}(t)$ τότε η $\mathbf{p}(t)$ είναι στατική σ.π.π. του *RW*

Η σχέση

$$\mathbf{r} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}$$

ικανοποιείται και το $\mathbf{r}$ εκφράζει την στατική σ.π.π. του *RW*.

Ιδιοδιανύσματα πίνακα γειτνίασης

- Το ιδιοδιάνυσμα ικανοποιεί τη σχέση
  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \lambda \cdot \mathbf{c}$
- ο ορισμός της κεντρικότητας βάσει ιδιοδιανύσματος για μη κατευθυντικό γράφημα
- Ο *PageRank* αφορά κατευθυντικό γράφημα
- Σύγκλιση *RW* στατικής σ.π.π., αναπαράστασης ροής, αναπαράστασης ιδιοδιανύσματος

Αναπαράσταση ιδιοδιανύσματος

- Η εξίσωση ροής μπορεί να γραφεί

$$1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}$$

- Άρα το διάνυσμα $\mathbf{r}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbf{M}$ και αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1
- Ξεκινώντας από οποιοδήποτε διάνυσμα $\boldsymbol{\upsilon}$ το όριο $\mathbf{M}(\mathbf{M}(\mathbf{M}...\mathbf{M}\boldsymbol{\upsilon}))$ δίνει εξ ορισμού τη σ.π.π. για $t \to \infty$
- Θυμηθείτε τα μονοπάτια άπειρου μήκους και το δείκτη *Katz*
- Ο *PageRank* δίνει την στατική σ.π.π. του *RW*, που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα ιδιοτιμής 1

Υπολογισμός *PageRank*

1. Ανάθεσε σε κάθε ένα από τους N κόμβους μια τιμή r_j^0
2. Υπολόγισε

$$r_j^{t+1} = \sum_{i \to j} \frac{r_i^t}{d_i}$$

   όπου d_i είναι ο αριθμός των εξερχόμενων ακμών.
3. Επανάλαβε μέχρι να ισχύσει η συνθήκη:
   $\sum_i |r_i^{t+1} - r_i^{t+1}| < \epsilon$

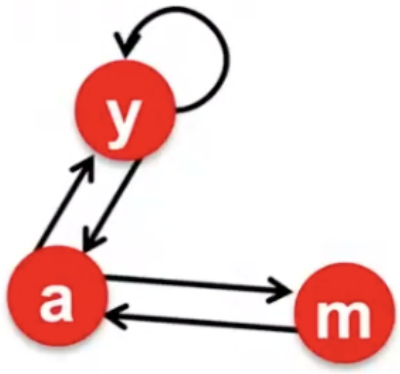
Υπολογισμός *PageRank*

Σε διανυσματική μορφή:

1. Ανάθεσε τιμή $\mathbf{r}^0 = [\frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N}]$
2. Υπολόγισε
$$\mathbf{r}^{t+1} = \mathbf{M}\mathbf{r}^t$$
3. Επανάλαβε μέχρι να ισχύσει η συνθήκη: $|\mathbf{r}^{t+1} - \mathbf{r}^t| < \epsilon$

Συγκλίνει για περίπου 50 επαναλήψεις.

Παράδειγμα υπολογισμού



	y	a	m
y	½	½	0
a	½	0	1
m	0	½	0

$$r_y = r_y/2 + r_a/2$$
$$r_a = r_y/2 + rm$$
$$r_m = r_a/2$$

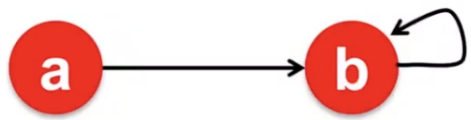
$$\begin{pmatrix} r_y \\ r_a \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 3/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/12 \\ 1/3 \\ 3/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/24 \\ 11/24 \\ 1/6 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 6/15 \\ 6/15 \\ 3/15 \end{pmatrix}$$

Iteration 0, 1, 2, …

Προβλήματα

Η παγίδα της αράχνης (spider trap)

$$r_j^{t+1} = \sum_{i \to j} \frac{r_i^t}{d_i}$$



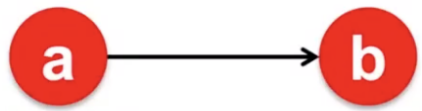
Iteration:	0,	1,	2,	3…
r_a =	1	0	0	0
r_b =	0	1	1	1

Δεν βλάπτει την μαθηματική αναπαράσταση, αλλά δεν δίνει το αποτέλεσμα που θέλουμε.

Προβλήματα

Το αδιέξοδο (dead end)

$$r_j^{t+1} = \sum_{i \to j} \frac{r_i^t}{d_i}$$



Iteration:	0,	1,	2,	3...
r_a =	1	0	0	0
r_b	0	1	0	0

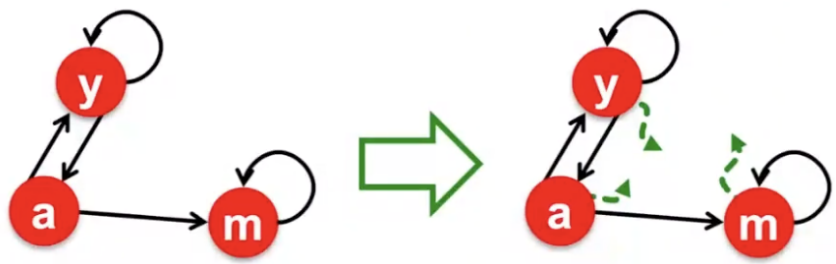
Βλάπτει τη μαθηματική αναπαράσταση: η στήλη του πίνακα πιθανοτήτων δεν αθροίζει πια στο 1 και μηδενίζεται.

Λύση στο πρόβλημα παγίδας της αράχνης

Σε κάθε βήμα έχουμε 2 επιλογές

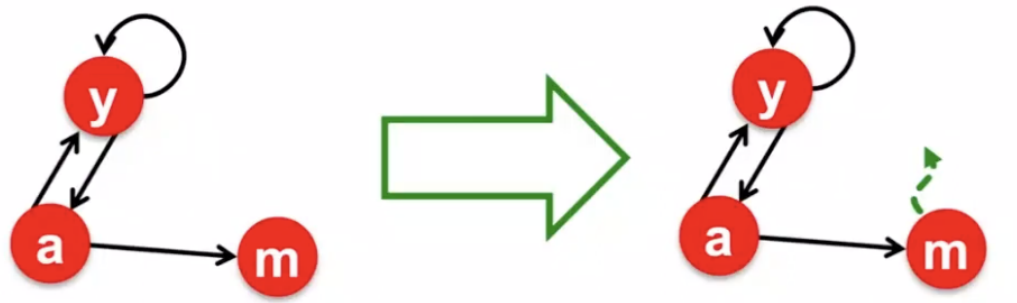
1. Με πιθανότητα β ακολούθησε ένα τυχαίο σύνδεσμο
2. Με πιθανότητα 1-β διακτινίσου σε τυχαίο κόμβο

- Τυπική τιμή β=0.9
- Η διακτίνιση από την παγίδα γίνεται σε λίγα βήματα.



Λύση στο πρόβλημα αδιεξόδου

- Διακτίνιση σε κόμβο με ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας αν φτάσεις σε αδιέξοδο.
- Αναπροσαρμογή πίνακα



	y	a	m
y	½	½	0
a	½	0	0
m	0	½	0

	y	a	m
y	½	½	⅓
a	½	0	⅓
m	0	½	⅓

Συνολική λύση

Σε κάθε βήμα έχουμε 2 επιλογές:

1. Με πιθανότητα β ακολούθησε ένα τυχαίο σύνδεσμο
2. Με πιθανότητα 1-β διακτινίσου σε τυχαίο κόμβο

$$r_j^{t+1} = \beta \sum_{i \to j} \frac{r_i^t}{d_i} + (1 - \beta)\frac{1}{N}$$

Η αναπαράσταση υποθέτει ότι δεν υπάρχουν αδιέξοδα και ότι έχει ήδη προσαρμοστεί ο πίνακας M.

Συνολική λύση

- Η εξίσωση *PageRank*:

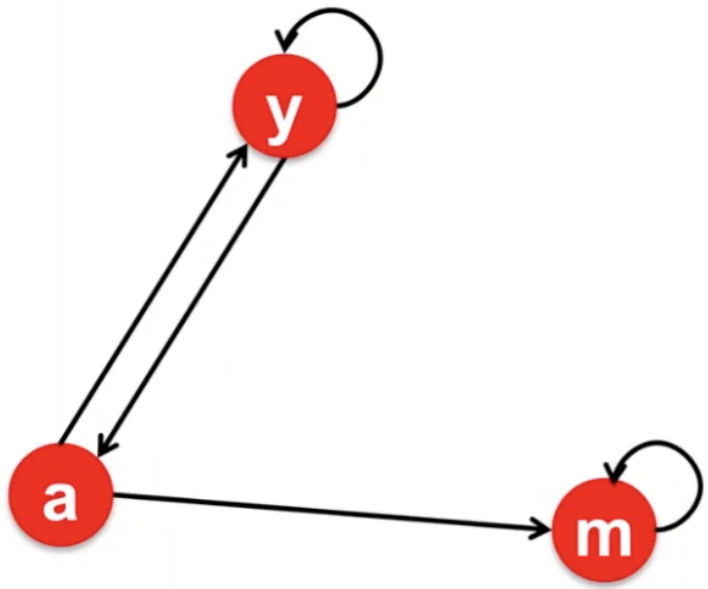
$$r_j^{t+1} = \beta \sum_{i \to j} \frac{r_i^t}{d_i} + (1 - \beta)\frac{1}{N}$$

- Ο πίνακας *Google* $G = \beta M + (1 - \beta)[\frac{1}{N}]_{N \times N}$
- Έχουμε αναδρομικό πρόβλημα:

$$\mathbf{r} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}$$

- $\beta \approx 0.9$

Παράδειγμα



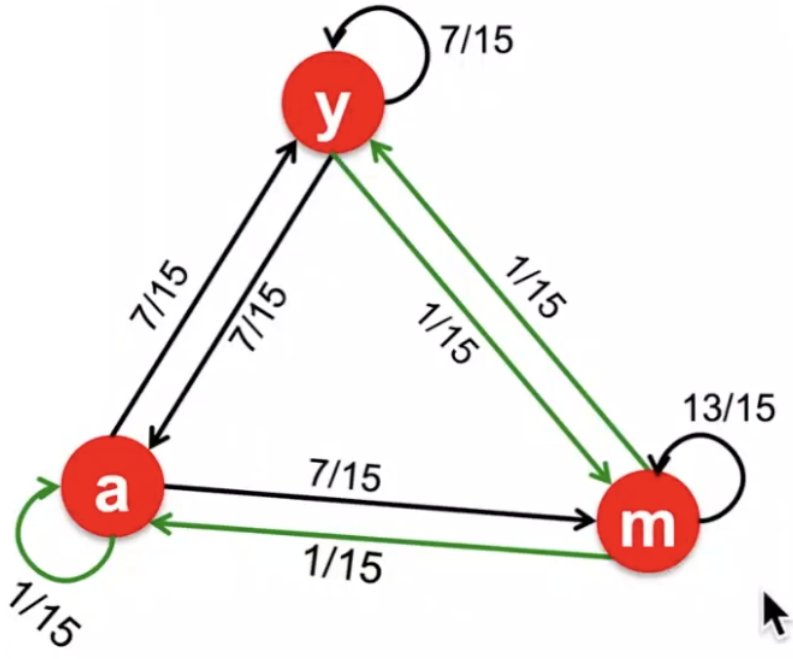
M

1/2	1/2	0
1/2	0	0
0	1/2	1

$[1/N]_{NxN}$

y		1/3
a	=	1/3
m		1/3

Παράδειγμα



$$
\mathbf{M} \qquad\qquad [1/N]_{NxN}
$$

$$
0.8 \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c} \\ y \\ a \\ m \end{array} \begin{bmatrix} 7/15 & 7/15 & 1/15 \\ 7/15 & 1/15 & 1/15 \\ 1/15 & 7/15 & 13/15 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{G}
$$

$$
\begin{array}{lcccccc} y & & 1/3 & 0.33 & 0.24 & 0.26 & & 7/33 \\ a & = & 1/3 & 0.20 & 0.20 & 0.18 & \ldots & 5/33 \\ m & & 1/3 & 0.46 & 0.52 & 0.56 & & 21/33 \end{array}
$$

Παράδειγμα

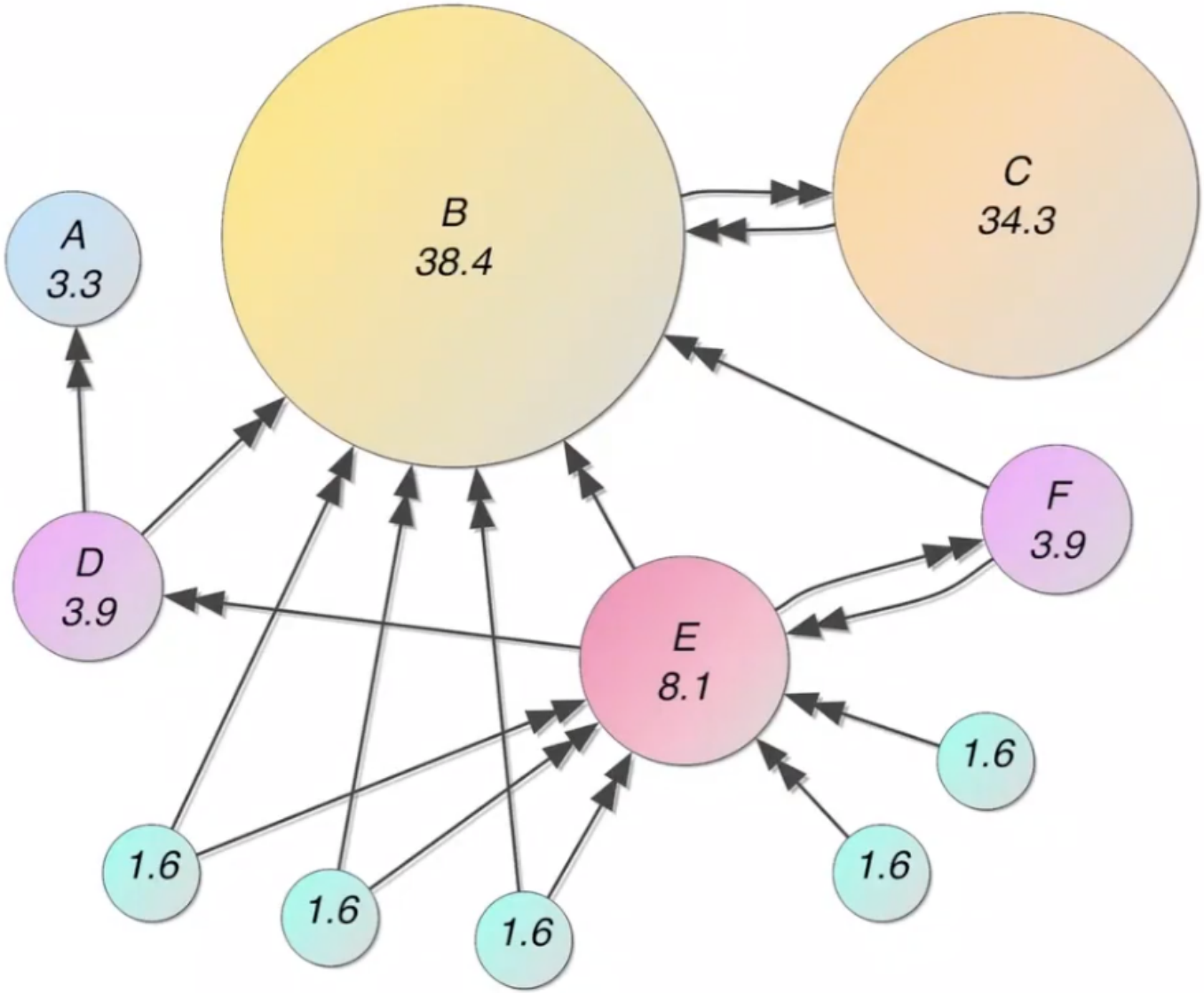


Image credit: Wikipedia

Βιβλιογραφία

1. Brin, S.; Page, L. (1998). "The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine" (PDF). Computer Networks and ISDN Systems. 30 (1–7): 107–117.
2. J. Leskovec, Machine Learning with Graphs, Stanford University, Fall 2023