Ο τελεστής $A : C^N \to C^N$ είναι <u>αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις</u> όταν ισχύουν οι ισότητες

$$A(\,Tr_K(s)\,) = Tr_K(A(s)\,), \qquad 0 \le K \le N-1 .$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι: Ο τελεστής A είναι αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις *άν και μόνο άν* ο A είναι αναλλοίωτος ως προς την Tr_1 : $A(\,Tr_1(s)\,) = Tr_1(A(s)\,)$.

Ανάλυση γραμμικού τελεστή αναλλοίωτου ως προς κυκλικές ολισθήσεις

Τα σήματα P_K , $0 \le K \le N-1$, όπου: $P_K(K) = 1$, $P_K(j) = 0$ όταν $j \ne K$ αποτελούν *βάση* του διανυσματικού χώρου $(\, C^N, +, -, \mathbf{0}, \bullet\,)$.

Έστω σήμα $s : Z_N \to C$:

$$s = \sum_{0 \le K \le N-1} s(K) \bullet P_K .$$

$$A(s) = \sum_{0 \le K \le N-1} s(K) \bullet A(P_K)\,, \qquad \text{επειδή } A \text{ γραμμικός.}$$

Επειδή A αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις, και $P_K = Tr_K(P_0)$:

$$A(s) = \sum_{0 \le K \le N-1} s(K) \bullet Tr_K(\,A(P_0)\,)$$

Το σήμα $A(P_0)$ λέγεται <u>κρουστική απόκριση</u> του φίλτρου A.

Μητρώο γραμμικού τελεστή αναλλοίωτου ως προς κυκλικές ολισθήσεις

Έστω A ένα γραμμικό φίλτρο αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις,
$A(P_0)$ η κρουστική απόκριση του A : $A(P_0)(j) = h_j$, $0 \le j \le N-1$.

Υπολογίζουμε το μητρώο $\mu(A) = \big(w_0 , w_1 , \ldots w_{N-1} \big)$ ως προς τη βάση $\{ P_K \}$:

$$
\begin{aligned}
w_K &= u(A(P_K)) = u(A(Tr_K(P_0))) \\
&= u(Tr_K(A(P_0))) , \qquad 0 \le K \le N-1 .
\end{aligned}
$$

Από τον ορισμό του τελεστή Tr_K

$$
\begin{aligned}
Tr_K(A(P_0))(j) &= A(P_0)(j-K \mod N) \\
&= h_{j-K \bmod N} , \quad 0 \le j \le N-1 .
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
w_K = \big(h_{-K \bmod N} , h_{-K+1 \bmod N} , \ldots h_{-K+N-1 \bmod N)} \big)^{\mathrm{Transpose}}
$$

Άσκηση 1 Ελέγξτε ότι η στήλη $w_{K+\Lambda}$ του παραπάνω μητρώου, $\Lambda \ge 0$, προκύπτει από τη στήλη w_K με *κυκλική ολίσθηση κατά* Λ θέσεις.

Άσκηση 2 Έστω $\mu = \big(w_0 , w_1 , \ldots w_{N-1} \big)$ ένα μητρώο διαστάσεων $N \times N$, όπου η στήλη w_j προκύπτει από τη στήλη w_0 με κυκλική ολίσθηση κατά j θέσεις.

Έστω A το γραμμικό φίλτρο που περιγράφεται από το μ , ως προς τη βάση $\{ P_K \}$.

Ελέγξτε ότι: $A(P_K) = Tr_K(A(P_0))$, $\qquad 0 \le K \le N-1$.

Αποδείξτε ότι: Το φίλτρο A είναι αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις.

Σημείωση   Ένα μητρώο $(\,w_0\,,\,w_1\,,\,\ldots\,w_{N-1}\,)$ διαστάσεων $N{\times}N$,
όπου η στήλη w_j προκύπτει από τη στήλη w_0 με κυκλική ολίσθηση κατά j θέσεις,
ονομάζεται *κυκλικό* (circulant).

Από τις Ασκήσεις 1 , 2 , έχουμε το

Θεώρημα 1

Ένα γραμμικό φίλτρο A είναι αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις,
άν και μόνο άν το μητρώο $\mu(A)$ ως προς τη βάση $\{\,P_K\,\}$ είναι κυκλικό.

Άσκηση 3   Έστω A ένα γραμμικό φίλτρο αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις,
$A(P_0)$ η κρουστική απόκριση του A : $A(P_0)(j) = h_j\,,\quad 0 \le j \le N-1$.

α   Βρείτε το μητρώο $\mu(A)$ ως προς τη βάση $\{\,P_K\,\}$, για $N = 4$.

Απάντηση

$$\begin{matrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{matrix}$$

β   Βρείτε το μητρώο $\mu(A)$ ως προς τη βάση $\{\,P_K\,\}$, για γενικό N .

Πολυώνυμο γραμμικού τελεστή αναλλοίωτου ως προς κυκλικές ολισθήσεις

Έστω A ένα γραμμικό φίλτρο αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις,

$A(P_0)$ η κρουστική απόκριση του A : $A(P_0)(j) = h_j$, $0 \le j \le N-1$.

Από την Ασκηση 3 , εξετάζοντας τα μητρώα των τελεστών Tr_1 , $0 \le K \le N-1$, μπορούμε να δούμε ότι

$$\mu(A) = h_0\,\mu(Tr_0) + h_1\,\mu(Tr_1) + \dots h_{N-1}\,\mu(Tr_{N-1})$$
$$=.\ \mu(\,h_0 Tr_0 + h_1 Tr_1 + \dots h_{N-1} Tr_{N-1}\,)$$

Επομένως $\qquad A = h_0 \bullet Tr_0 + h_1 \bullet Tr_1 + \dots h_{N-1} \bullet Tr_{N-1}$

και το A είναι *πολυώνυμο της κυκλικής ολίσθησης*:

$$\boxed{\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{0 \le K \le N-1}} h_K \bullet (\mathbf{Tr_1})^K}$$

όπου $\qquad (\,Tr_1\,)^K = Tr_1 \circ \dots Tr_1$, $\quad$ K φορές

$$= Tr_K$$

$$(\,Tr_1\,)^0 = \mathbf{1}$$

Άσκηση 4 Αποδείξτε ότι: Άν ένα γραμμικό φίλτρο είναι πολυώνυμο της κυκλικής ολίσθησης, θα είναι αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις.

Από τα παραπάνω και την Ασκηση 4 , έχουμε το

Θεώρημα 2

Ένα γραμμικό φίλτρο A είναι αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις, *άν και μόνο άν* το A είναι πολυώνυμο της κυκλικής ολίσθησης.

Άσκηση 5 Αποδείξτε ότι, άν τα A1 , A2 είναι γραμμικά φίλτρα αναλλοίωτα ως προς κυκλικές ολισθήσεις: $A1 \circ A2 = A2 \circ A1$.

Άσκηση 6

Βρείτε μια βάση για τον διανυσματικό χώρο των γραμμικών φίλτρων που είναι αναλλοίωτα ως προς κυκλικές ολισθήσεις.
Ποιά είναι η διάσταση αυτού του χώρου;

□