Σήματα και φίλτρα διακριτού χρόνου

<u>Χρονικές στιγμές</u> $Z_N = \{ 0 , 1 , \ldots N-1 \}$

<u>Σήμα διακριτού χρόνου</u> s *Συνάρτηση* $s : Z_N \to C$

C^N : το *σύνολο* των σημάτων (συναρτήσεων από το Z_N στο C)

<u>Πράξεις μεταξύ σημάτων</u>

$s1 + s2 = s$, όπου $s(j) = s1(j) + s2(j)$

$-s$, όπου $(-s)(j) = -s(j)$

$\alpha \bullet s1 = s$, όπου $s(j) = a\, s1(j)$, $\alpha \in C$

Η *αλγεβρική δομή* $(C^N, + , - , \mathbf{0})$ είναι ***αβελιανή ομάδα***:

Ισχύουν οι ισότητες

$$(s1 + s2) + s = s1 + (s2 + s)$$
$$s + \mathbf{0} = \mathbf{0} + s = s$$
$$s + (-s) = (-s) + s = \mathbf{0}$$
$$s1 + s2 = s2 + s1$$

Παραδείγματα αβελιανών ομάδων

R , C , Z ως προς *πρόσθεση*

$R-\{0\} , C-\{0\}$ ως προς *πολλαπλασιασμό*

Τα πολυώνυμα με συντελεστές στο R / C / Z ως προς *πρόσθεση*

Τα μονώνυμα $\{ x^n \mid n \in Z \}$ ως προς *πολλαπλασιασμό*:

$$x^0 = 1 , \qquad x^n \circ x^m = x^{n+m}$$

Οι *N-στές ρίζες του* 1 (οι ρίζες του πολυωνύμου x^N-1) :

$\{ 1, \zeta , \zeta^2 , \ldots \zeta^{N-1} \}$, $\zeta = e^{-2\pi\iota / N}$ ως προς *πολλαπλασιασμό*

Η *αλγεβρική δομή* $(C^N , + , - , \mathbf{0} , \bullet)$, με *βαθμωτά* στο R είτε στο C ,
είναι ***διανυσματικός χώρος*** :

1 $(C^N , + , -, \mathbf{0})$ είναι *αβελιανή ομάδα*

2 Ισχύουν οι ισότητες

$$\alpha \bullet (s1 + s2) = (\alpha \bullet s1) + (\alpha \bullet s2)$$
$$(\alpha 1 + \alpha 2) \bullet s = (\alpha 1 \bullet s) + (\alpha 2 \bullet s)$$
$$\alpha \bullet (\beta \bullet s) = (\alpha \bullet \beta) \bullet s$$
$$1 \bullet s = s$$

Άσκηση 1

α Αποδείξτε ότι τα σήματα P_K , $0 \leq K \leq N-1$, όπου:

$P_K(K) = 1$, $P_K(j) = 0$ όταν $j \neq K$

αποτελούν *βάση* του διανυσματικού χώρου $(C^N , + , - , \mathbf{0} , \bullet)$.

β Επιβεβαιώστε ότι ο διανυσματικός χώρος $(C^N , + , - , \mathbf{0} , \bullet)$
έχει *διάσταση* N .

<u>Φίλτρο</u> A $\qquad$ *Τελεστής* $A: C^N \to C^N$

<u>Πράξεις μεταξύ τελεστών</u>

$A1 + A2$ $\qquad$ *συνδεσμολογία εν παραλλήλω*

$-A$

$A1 \circ A2$ $\qquad$ $(A1 \circ A2)(s) = A1(A2(s))$

συνδεσμολογία εν σειρά (σύνθεση)

$\alpha \bullet A, \quad \alpha \in C$ $\qquad$ *ενίσχυση*

Οι πράξεις $+, -, \mathbf{0}, \bullet$ μεταξύ τελεστών ορίζονται μέσω των αντίστοιχων πράξεων μεταξύ σημάτων: για κάθε σήμα $s: Z_N \to C$,

$$(A1 + A2)(s) = A1(s) + A2(s)$$

κοκ

Άσκηση 2

α $\quad$ Ελέγξτε ότι η αλγεβρική δομή των τελεστών, με τις πράξεις $+, -, \mathbf{0}, \bullet$ και με βαθμωτά στο R είτε στο C, είναι διανυσματικός χώρος.

β $\quad$ Ποιά είναι η *διάσταση* αυτού του χώρου; Μπορείτε να βρείτε μία *βάση* του;

Άσκηση 3 Βρείτε δύο τελεστές A, B, ώστε $A \circ B \neq B \circ A$.

Ο τελεστής $A: C^N \to C^N$ είναι γραμμικός όταν ισχύουν οι ισότητες

$$A(s1 + s2) = A(s1) + A(s2)$$

$$A(-s) = -A(s)$$

$$A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$A(\alpha \bullet s) = \alpha \bullet A(s), \qquad \alpha \in C$$

Παραδείγματα γραμμικών τελεστών

Ο *ταυτοτικός* τελεστής $\mathbf{1}$: $\quad \mathbf{1}(s) = s$

Ο τελεστής $\alpha\mathbf{1}$, $\alpha \in C$: $\quad \alpha\mathbf{1}(s) = \alpha \bullet s$

Οι τελεστές *κυκλικής ολίσθησης* Tr_K, $0 \le K \le N-1$:

$$Tr_K(s)(j) = s(j-K) \qquad \text{όταν } j \ge K$$

$$Tr_K(s)(j) = s(j-K+N) \qquad \text{όταν } j < K$$

Άσκηση 4 Επιβεβαιώστε ότι:

α Όταν ο A είναι γραμμικός, $A \circ \alpha\mathbf{1} = \alpha \bullet A$.

β Για κάθε τελεστή A, $\alpha\mathbf{1} \circ A = \alpha \bullet A$.

γ Οι τελεστές στα παραπάνω παραδείγματα είναι γραμμικοί.

Άσκηση 5 Ελέγξτε ότι $Tr_K = Tr_1 \circ Tr_1 \ldots \circ Tr_1$ (K φορές)

Ελέγξτε ότι $\quad Tr_K(s)(j) = s(j-K \mod N)$

$m \mod N$ είναι το *υπόλοιπο της διαίρεσης* ενός ακέραιου m με τον ακέραιο $N > 0$.
$m \mod N$ είναι ο *μοναδικός* ακέραιος υ, $0 \le \upsilon \le N-1$, όπου $m = qN + \upsilon$.

Άσκηση 6 Επιβεβαιώστε ότι: τα αποτελέσματα των πράξεων μεταξύ γραμμικών τελεστών είναι γραμμικοί τελεστές.

Άσκηση 7 Ελέγξτε ότι οι γραμμικοί τελεστές, με τις πράξεις $+, -, \bullet, \mathbf{0}$ και με βαθμωτά στο R είτε C, είναι διανυσματικός χώρος. Μπορείτε να βρείτε μία βάση αυτού του χώρου; Ποιά είναι η διάστασή του;

***Περιγραφή σημάτων και φίλτρων μέσω* συντεταγμένων**

Ένα *σήμα* διακριτού χρόνου $s : Z_N \to C$ μπορεί να περιγραφεί,

ως προς μία *βάση* $\{ B_K \}$ του διανυσματικού χώρου $(C^N , + , - , \mathbf{0} , \bullet)$,

με μία *στήλη* $u(s) = (u_0 , u_1 , \ldots u_{N-1})^{\text{Transpose}}$, $u_K \in C$

για την οποία $s = \sum_{0 \le K \le N-1} u_K \bullet B_K$.

Οι τιμές $u_0 , u_1 , \ldots u_{N-1}$ υπολογίζονται, επιλύοντας
ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

Όταν $\{ B_K \} = \{ P_K \}$ θα έχουμε $u_K = s(K)$, $0 \le K \le N-1$.

Άσκηση 8 Αποδείξτε ότι: για κάθε σήμα s και κάθε βάση $\{ B_K \}$,
υπάρχει *ακριβώς μία* αντίστοιχη στήλη $u(s)$.

Ένα *γραμμικό φίλτρο* $A : C^N \to C^N$ μπορεί να περιγραφεί,

ως προς μία βάση $\{ B_K \}$ του διανυσματικού χώρου $(C^N , + , - , \mathbf{0} , \bullet)$,

με ένα *μητρώο* $\mu(A)$ διαστάσεων $N \times N$.

Η στήλη που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα του φίλτρου $A(s)$,

είναι το *γινόμενο* του μητρώου $\mu(A)$ επί την στήλη που αντιστοιχεί στο s :

$$\underset{N\times N}{\mu(A)} \quad \underset{N\times 1}{u(s)} \quad = \quad \underset{N\times 1}{u(A(s))}$$

Το μητρώο $\mu(A) = (w_0 \;\; w_1 \;\; \ldots \;\; w_{N-1})$ (όπου η στήλη w_K έχει διάσταση $N \times 1$)
υπολογίζεται: θέτοντας ως w_K *την στήλη που αντιστοιχεί στο σήμα* $A(B_K)$.

Άσκηση 9 Επιβεβαιώστε ότι για $N = 4$, τα μητρώα $\mu(Tr_1)$ και $\mu(Tr_2)$ ως προς την βάση $\{ P_K \}$ είναι :

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Άσκηση 10 Βρείτε το μητρώο $\mu(Tr_K)$ ως προς τη βάση $\{ P_K \}$.

Άσκηση 11 Έστω $\text{reverse}_N : C^N \to C^N$ το φίλτρο που *αντιστρέφει* το σήμα εισόδου: $\text{reverse}_N(s)(j) = s(N-1-j)$, $0 \le j \le N-1$.

Βρείτε το μητρώο $\mu(\text{reverse}_N)$ ως προς τη βάση $\{ P_K \}$.

Άσκηση 12 Επιβεβαιώστε ότι: άν τα A , B είναι γραμμικά φίλτρα,

$$\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad\qquad \mu(\alpha \bullet A) = \alpha A$$

$$\mu(A \circ B) = \mu(A)\, \mu(B) .$$

Άσκηση 13 Βρείτε μια βάση για τον διανυσματικό χώρο των γραμμικών φίλτρων. Ποιά είναι η διάσταση αυτού του χώρου;