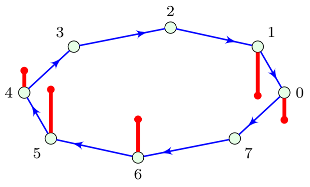
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σταύρος Κοσμαδάκης, Δημήτριος Κοσμόπουλος & Εμμανουήλ Ψαράκης

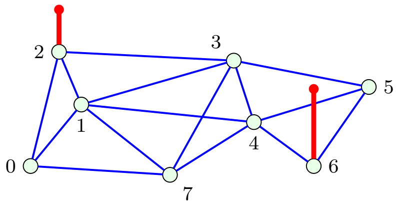
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κυκλική Συνέλιξη:



$$\boldsymbol{h}_M \; U_M \; \boldsymbol{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \boldsymbol{h}_M \, x_m = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \boldsymbol{x}_M \, h_m = \boldsymbol{x}_M \; U_M \; \boldsymbol{h}_M$$

Συνέλιξη Γειτνίασης:



$$\boldsymbol{h}_M \; \mathrm{A}_M \; \boldsymbol{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} \mathrm{A}_M^m \boldsymbol{h}_M \, x_m = \sum_{m=0}^{M-1} \mathrm{A}_M^m \boldsymbol{x}_M \, h_m = \boldsymbol{x}_M \; \mathrm{A}_M \; \boldsymbol{h}_M$$

Αποσύνθεση Μητρώου Κυκλικής Ολίσθησης:

$$U_M^0 \boldsymbol{x}_M$$
$$U_M^1 \boldsymbol{x}_M$$
$$U_M^2 \boldsymbol{x}_M$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$U_M^{M-1} \boldsymbol{x}_M$$

Το Μητρώο είναι ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ:

$$U_M = W \Lambda_M W^H$$

$$I_M \boldsymbol{x}_M$$
$$W \Lambda_M^1 W^H \boldsymbol{x}_M$$
$$W \Lambda_M^2 W^H \boldsymbol{x}_M$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$W \Lambda_M^{M-1} W^H \boldsymbol{x}_M$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Ολίσθησης Γραφημάτων:

$$A_M^0 \boldsymbol{x}_M$$
$$A_M^1 \boldsymbol{x}_M$$
$$.\ A_M^2 \boldsymbol{x}_M$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$A_M^{M-1} \boldsymbol{x}_M$$

Αν το Μητρώο Γειτνίασης είναι ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ:

$$A_M = V \Lambda_M V^{\mathrm{T}}$$

$$I_M \boldsymbol{x}_M$$
$$V \Lambda_M^1 V^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_M$$
$$V \Lambda_M^2 V^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_M$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$V \Lambda_M^{M-1} V^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_M$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες

Η ενέργεια ενός ολισθημένου γραφήματος είναι $||\boldsymbol{x}_1||_2^2 = ||\mathrm{A}\boldsymbol{x}||_2^2$ όπου Α το μητρώο γειτνίασης.

Χρησιμοποιώντας την l_2 στάθμη ενός πίνακα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ενέργεια του ολισθημένου γραφήματος και του αρχικού, ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$\max_{\boldsymbol{x}} \frac{||A\boldsymbol{x}||_2^2}{||\boldsymbol{x}||_2^2} = \max_{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{x}^t A^T A\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||_2^2} = \lambda_{max}^2, \text{ όπου } \lambda_{max} = \max_{\boldsymbol{k}} \{\lambda_k\}$$

Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες

Επομένως η ενέργεια ενός ολισθημένου γραφήματος δεν διατηρείται!

Αν θέλουμε να διατηρείται, θα πρέπει αντί να χρησιμοποιούμε το μητρώο γειτνίασης A να χρησιμοποιήσουμε το κανονικοποιημένο μητρώο:

$$A_{norm} = \frac{A}{\lambda_{max}}$$

Τώρα είναι προφανές ότι: $\max_{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{x}^t A_{norm}^T A_{norm} \boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||_2^2} = 1!$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμένη Στο Μητρώο Γειτνίασης

Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες

Επομένως η ενέργεια ενός ολισθημένου γραφήματος δεν διατηρείται!

Η ενέργεια ενός ολισθημένου σήματος γραφήματος είναι μικρότερη ή ίση με την ενέργεια του αρχικού σήματος γραφήματος.
Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το σήμα είναι ανάλογο του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_{max} .

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

Ιδιότητες

Η "έξοδος" ενός συστήματος σε ένα γράφημα με κανονικοποιημένο μητρώο γειτνίασης θα είναι της μορφής:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{m=0}^{M-1} h_m A_{norm}^{m} \boldsymbol{x}$$

Ιδιότητες

Επομένως, η έξοδος ενός συστήματος σε ένα γράφημα με κανονικοποιημένο μητρώο γειτνίασης μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\boldsymbol{y} = \left(\sum_{m=0}^{M-1} h_m A_{norm}^m\right)\boldsymbol{x} = H(A_{norm})\boldsymbol{x}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα (GFT)
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

Ιδιότητες

Ας υποθέσουμε ότι το μητρώο $H(A_{norm})$ είναι διαγωνοποιήσιμο, δηλαδή: $H(A_{norm}) = \boldsymbol{U}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}^{-1}$, τότε:

$$\boldsymbol{y} = H(A_{norm})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}^{-1}\,\boldsymbol{x}$$

ή: $$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}^{-1}\,\boldsymbol{x}$$

ή ισοδύναμα: $\boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{X}$, όπου $\boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{y}$ και $\mathbf{X} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}$

είναι οι Μετασχηματισμοί Fourier (GFT) των γραφοσημάτων $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ αντίστοιχα.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα (GFT)
6. Συνάρτηση Μεταφοράς - Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

Συνάρτηση Μεταφοράς - Απόκριση Συχνότητας;

Αν $\boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{y}$ και $\mathbf{X} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}$ είναι οι Μετασχηματισμοί Fourier των γραφημάτων (GFT) $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ αντίστοιχα, τότε το διαγώνιο μητρώο:

$$H(\Lambda)\mathbf{X} = \boldsymbol{\Upsilon}$$

αποτελεί τον GFT της “κρουστικής απόκρισης” του διακριτού χρόνου συστήματος

Αν λ_k μία ιδιοτιμή του μητρώου A_{norm}, τότε:

$$H(\lambda_k) = \sum_{m=0}^{M-1} h_m \lambda_k^m$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα (GFT)
6. Συνάρτηση Μεταφοράς - Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΟΜΑΛΑ ΓΡΑΦΟΣΗΜΑΤΑ (Smooth Graps Signals)

- Πώς μπορούμε να ορίσουμε την ομαλότητα στο χώρο του γραφήματος;
- Μπορούμε να την ορίσουμε με μοναδικό τρόπο;
- Πώς μπορούμε να ορίσουμε την ομαλότητα στο Φασματικό χώρο;
- Ποιά ποσότητα παίζει το ρόλο της συχνότητας
- Τι σημαίνει Χαμηλή και Υψηλή συχνότητα;

Μητρώο Γειτνίασης: A

Συνδυαστικό Λαπλασιανό Μητρώο Γειτνίασης: $L_C = D - A$

Μη συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Random walk): $L_{NS} = I - D^{-1}A$

Συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Κανονικοποιημένο): $L_S = I - D^{-1/2}AD^{-1/2}$

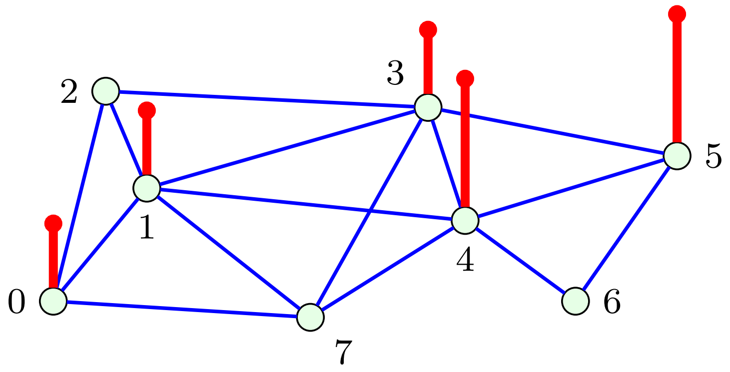
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΟΜΑΛΑ ΣΗΜΑΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ (Smooth Graps Signals)

Ομαλότητα στο χώρο του γραφήματος: $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, A, D, $L_C=D-A$, $P=D^{-1}A$

Συνδυαστικό Λαπλασιανό Μητρώο Γειτνίασης: $L_C=D-A$

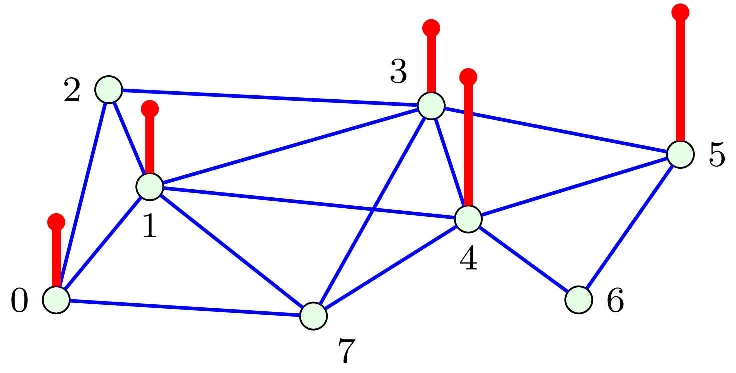
Μητρώο Μετάβασης: $P=D^{-1}A$

Έστω το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_M=[x_0 \quad x_1 \quad \ldots \quad x_{M-2} \quad x_{M-1}]^t$, το οποίο θα ονομάζουμε Σήμα Γραφήματος, με το στοιχείο x_m να αποτελεί την τιμή του *m-στού* κόμβου του γραφήματος



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΟΜΑΛΑ ΣΗΜΑΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ (Smooth Graps Signals)

Ομαλότητα στο χώρο του γραφήματος: $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, A, D, $L_C=D-A$, $P=D^{-1}A$



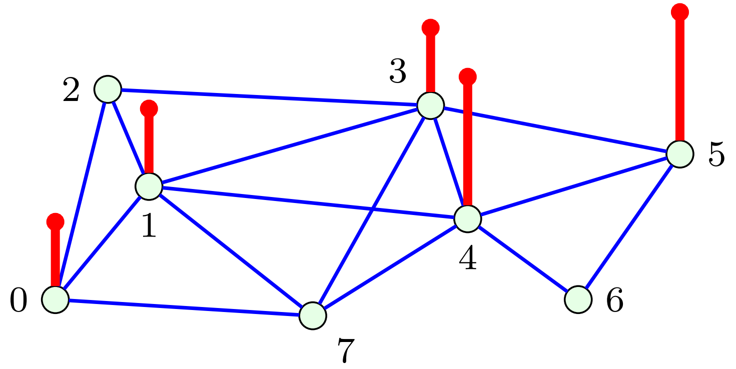
Αν:

$$|x_n - \quad x_m| \leq Kd(v_n, v_m), \forall\, n, m = 0,1, \dots, M-1$$

όπου $d(v_n, v_m)$ η απόσταση ανάμεσα στους κόμβους v_n και v_m,
Θα λέμε ότι το σήμα γραφήματος είναι **ανά ζεύγη ομαλό κατά Lipschitz** με παράμετρο K

ΟΜΑΛΑ ΣΗΜΑΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ (Smooth Graps Signals)

Ομαλότητα στο χώρο του γραφήματος: $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$, A, D, $L_C=D-A$, $P=D^{-1}A$



Αν:

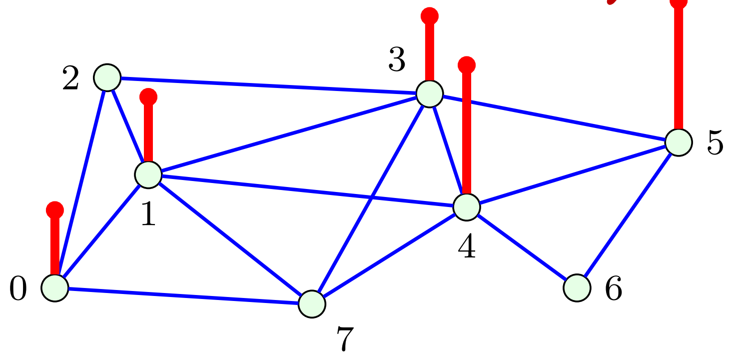
$$\sum_{(n,m)\in\mathcal{E}} a_{nm}\,|x_n - x_m|^2 \leq K$$

Θα λέμε ότι το σήμα γραφήματος είναι **συνολικά ομαλό κατά Lipschitz** με παράμετρο K

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Ομαλα Σηματα Γραφηματων (Smooth Graps Signals)

Ομαλότητα στο χώρο του γραφήματος: $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, A, D, $L_C=D-A$, $P=D^{-1}A$



Αν:

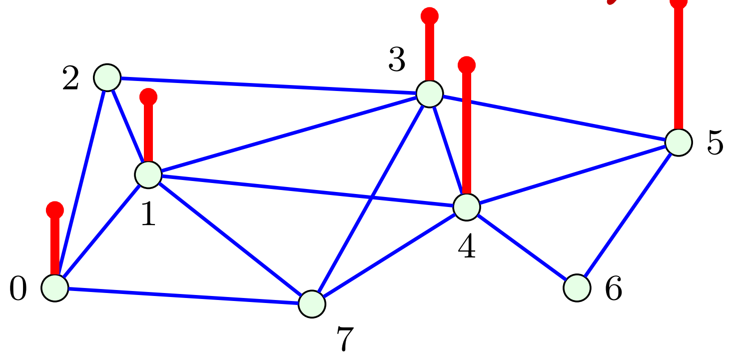
$$\sum_n \left(x_n - \frac{\sum_{m:(n,m)\in\mathcal{E}} a_{nm} x_m}{\sum_{m:(n,m)\in\mathcal{E}} a_{nm}}\right)^2 \leq K$$

Θα λέμε ότι το σήμα γραφήματος είναι ανά **γειτονιά ομαλό κατά Lipschitz** με παράμετρο K

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΟΜΑΛΑ ΣΗΜΑΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ (Smooth Graps Signals)

Ομαλότητα στο χώρο του γραφήματος: $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, A, D, $L_C=D-A$, $P=D^{-1}A$

Η τετραγωνική μορφή:



$$\boldsymbol{x}_M^t \, L_C \boldsymbol{x}_M$$

που βασίζεται στο Συνδυαστικό Λαπλασιανό Μητρώο Γειτνίασης μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί σαν μέτρο της **συνολικής ομαλότητας** του σήματος γραφήματος

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

Φασματική Κατάταξη: Spectral Ordering Χαμηλοπερατό & Υψηπερατό

Πρέπει να βρούμε ένα κριτήριο για την κατάταξη των ιδιοδιανυσμάτων σε σχέση με το πόσο αργά ή γρήγορα αλλάζουν. Στη θεωρία Σημάτων το ρόλο αυτό παίζουν οι συχνότητες στην περίπτωσή μας;

Αν λ_k μία ιδιοτιμή του μητρώου A_{norm}, τότε:

$$H(\lambda_k) = \sum_{m=0}^{M-1} h_m \lambda_k^m$$

Φασματική Κατάταξη: Spectral Ordering Χαμηλοπερατό & Υψηπερατό

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

ή ισοδύναμα:

$$E_{\Delta_{x_N}} = ||\Delta x_N||_2^2 = \boldsymbol{x_N}(\mathrm{I}-U)^T(\mathrm{I}-U)\boldsymbol{x_N} = ||\,\boldsymbol{x_N} - U\boldsymbol{x_N}||^2 = \mathrm{S}_2(\boldsymbol{x_N})$$

Η παραπάνω στάθμη είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως η τετραγωνική μορφή της συνολικής κύμανσης (quadratic form of the total variation).

Φασματική Κατάταξη: Spectral Ordering Χαμηλοπερατό & Υψηπερατό

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ένα εναλλακτικό μέτρο της κύμανσης είναι το ακόλουθο:

$$E_{\Delta_{x_N}} = ||\Delta x_N||_1 = ||(\mathrm{I} - U)x_N||_1 = \mathrm{TV}_{\mathrm{U}}(x_N)$$

Η παραπάνω στάθμη είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως η συνολική κύμανση (total variation) .

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Φασματική Κατάταξη: Spectral Ordering Χαμηλοπερατό & Υψηπερατό Γραφήματα

Έστω ξ_κ ένα ιδιοδιάνυσμα του μητρώου γειτνίασης ***A*** και:

$$\Delta\xi_\kappa=\xi_\kappa - A_{norm}\boldsymbol{\xi}_\kappa=(\mathrm{I}- A_{norm})\boldsymbol{\xi}_\kappa$$

Τότε, η ενέργεια:

$$E_{\Delta_{\xi_\kappa}}=||\Delta\boldsymbol{\xi}_\kappa||_2^2 = \xi_\kappa{}^t\,(\mathrm{I}-A_{norm})^T(\mathrm{I}-A_{norm})\xi_\kappa=(1- \frac{\lambda_\kappa}{\lambda_{max}})^2$$

είναι το κριτήριο κατάταξης ιδιοδιανυσμάτων σε αυτά των αργών και γρήγορων αλλαγών.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασης

Φασματική Κατάταξη: Spectral Ordering Χαμηλοπερατό & Υψηπερατό

Γραφήματα

Η ενέργεια: $E_{\Delta_{\xi_\kappa}} = ||\Delta \boldsymbol{\xi}_\kappa||_2^2 = (1 - \frac{\lambda_\kappa}{\lambda_{max}})^2$

$$0 = E_{\Delta_{\xi_{max}}} = E_{\Delta_{\xi_1}} \leq E_{\Delta_{\xi_2}} \leq E_{\Delta_{\xi_3}} \leq \ldots \leq E_{\Delta_{\xi_N}} = (1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}})^2$$

$$\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_N = \lambda_{min}$$

είναι το κριτήριο κατάταξης ιδιοδιανυσμάτων σε αυτά των αργών και γρήγορων αλλαγών (ισχύει πάντα αυτό;)

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

Φασματική Κατάταξη: Spectral Ordering Χαμηλοπερατό & Υψηπερατό

Γραφήματα

Η συνολική διακύμανση ενός γραφήματος:

$$E_{\Delta_{\xi_\kappa}} = ||\Delta \boldsymbol{\xi}_\kappa||_1 = ||\boldsymbol{\xi}_\kappa - A_{norm}\boldsymbol{\xi}_\kappa||_1 = \mathrm{TV}_{A_{norm}}(\xi_N)$$

$$0 = E_{\Delta_{\xi_{max}}} = E_{\Delta_{\xi_1}} \le E_{\Delta_{\xi_2}} \le E_{\Delta_{\xi_3}} \le \ldots \le E_{\Delta_{\xi_N}} = \left(1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)^2$$

$$\lambda_{max} = \lambda_1 \ \ge \ \lambda_2 \ \ge \ \lambda_3 \ \ge \ldots \ge \lambda_N = \lambda_{min}$$

είναι το κριτήριο κατάταξης ιδιοδιανυσμάτων σε αυτά των αργών και γρήγορων αλλαγών (ισχύει πάντα αυτό;)

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

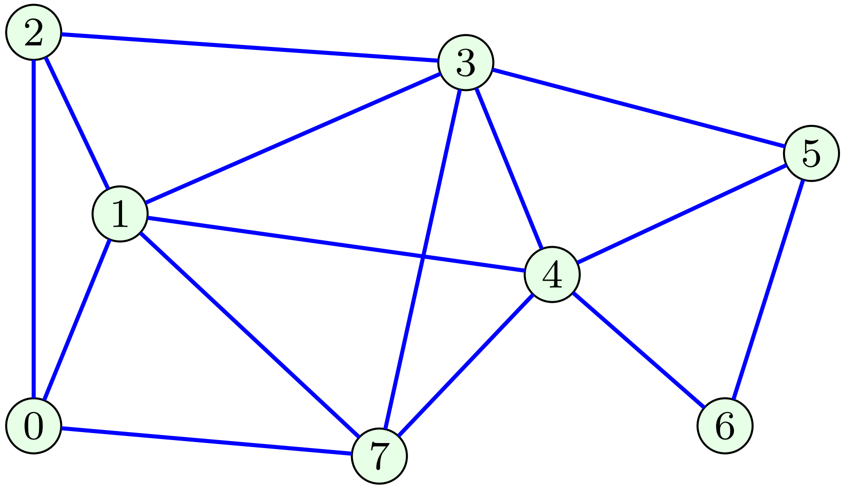
1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα (GFT)
6. Συνάρτηση Μεταφοράς - Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

Φασματική Αποθορυβοποίηση: Spectral Denoising

Γράφημα



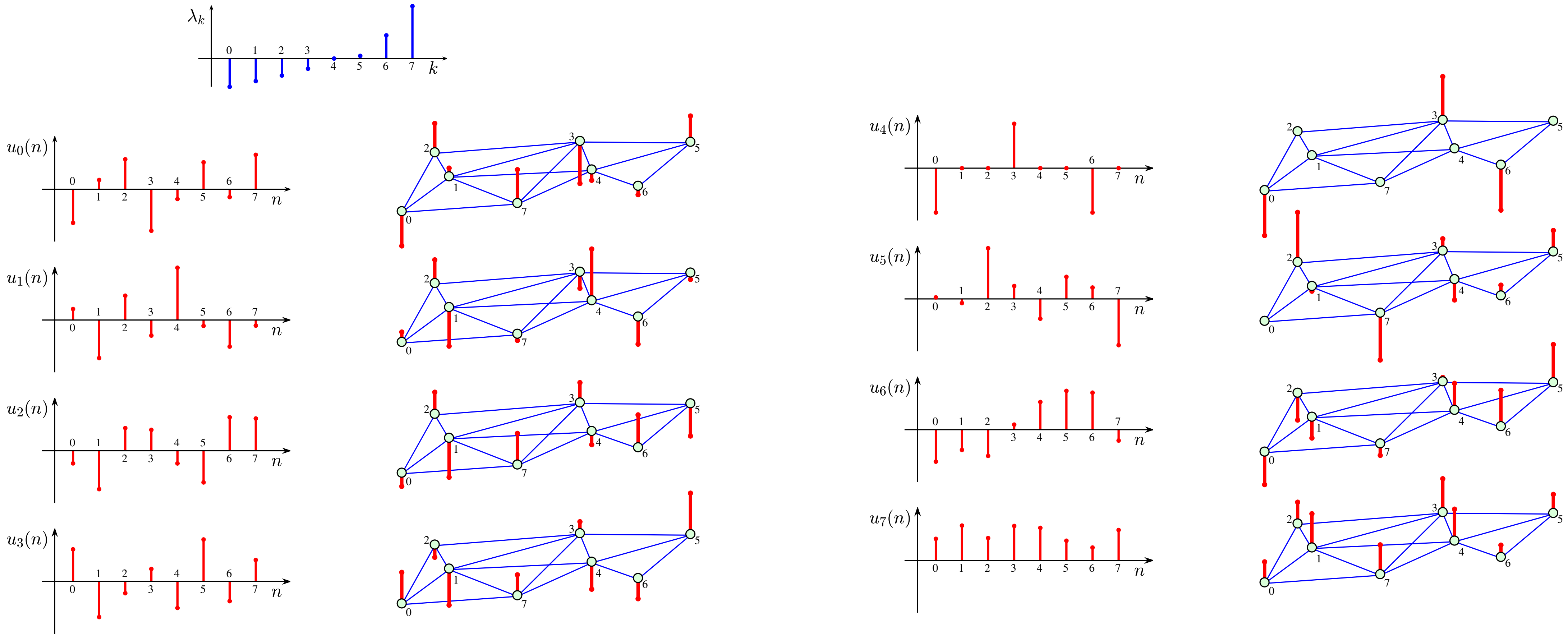
Μητρώο Γειτνίασης

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}
\end{array}
$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

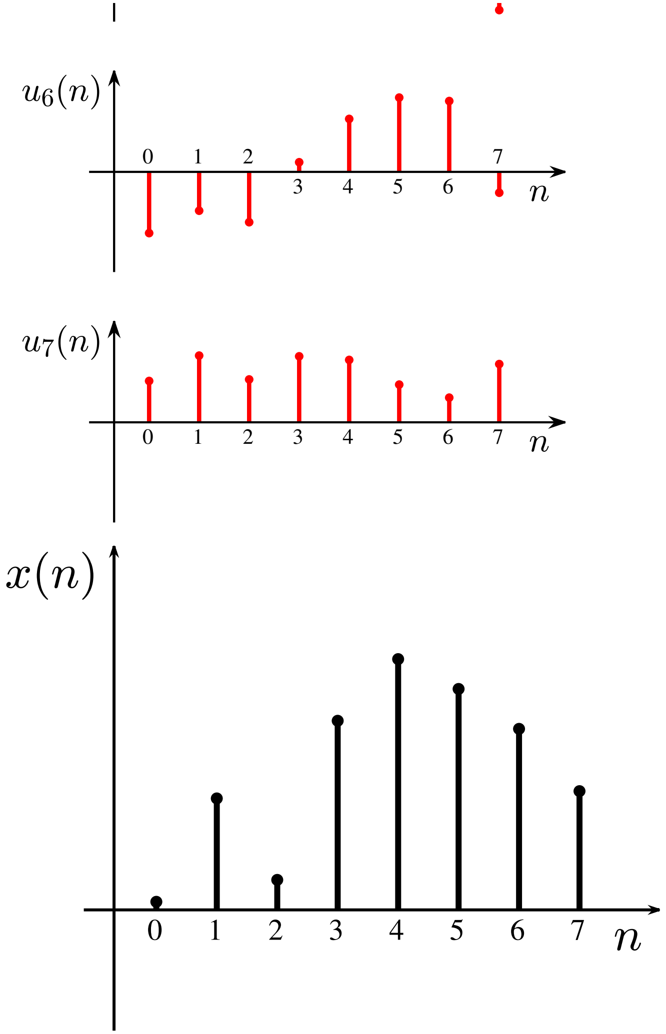
Φασματική Αποθορυβοποίηση: Spectral Denoising

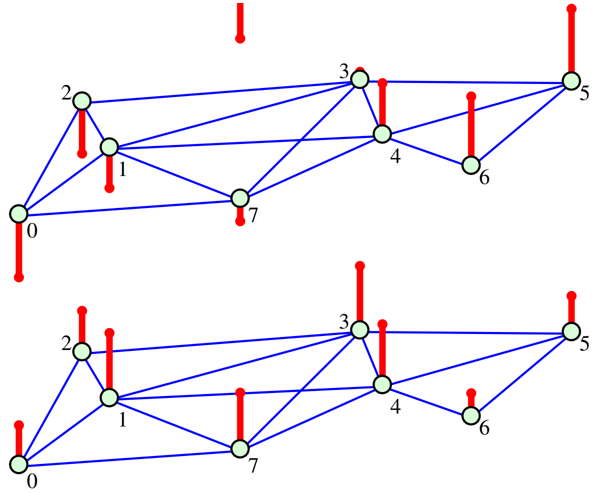
Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα του Μητρώου Γειτνίασης



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

Φασματική Αποθορυβοποίηση: Spectral Denoising



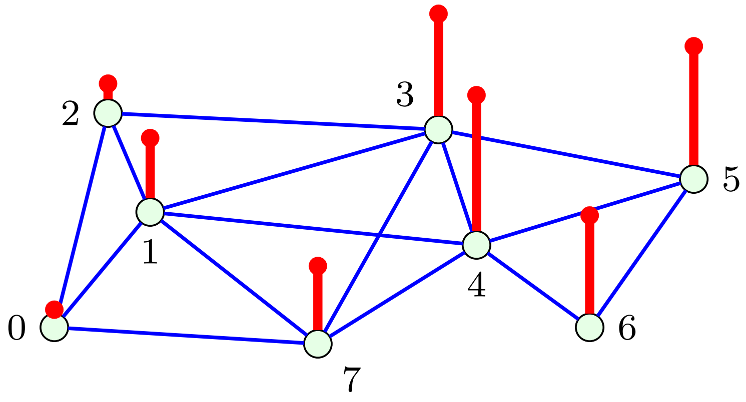


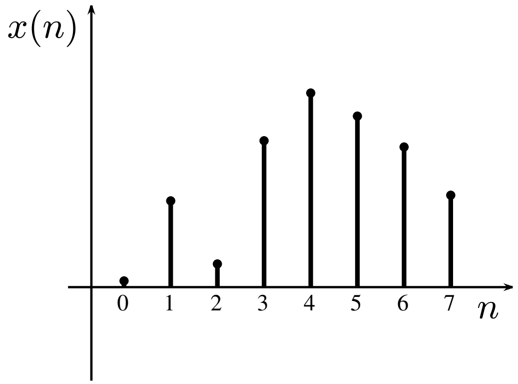
$$x(n) = 3.2u_7 + 2u_6$$

Αρχικό Σήμα

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

Φασματική Αποθορυβοποίηση: Spectral Denoising



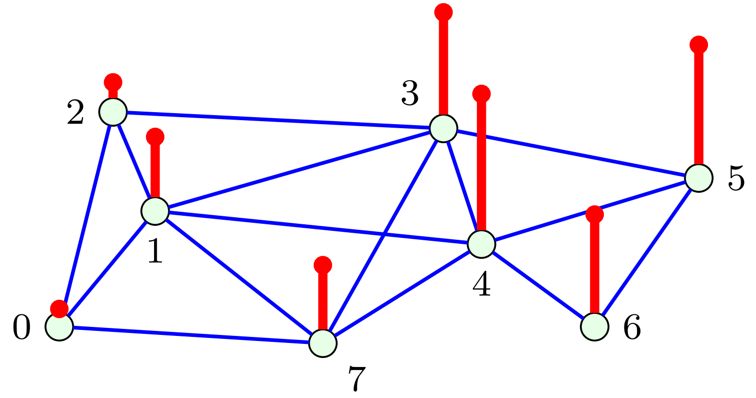


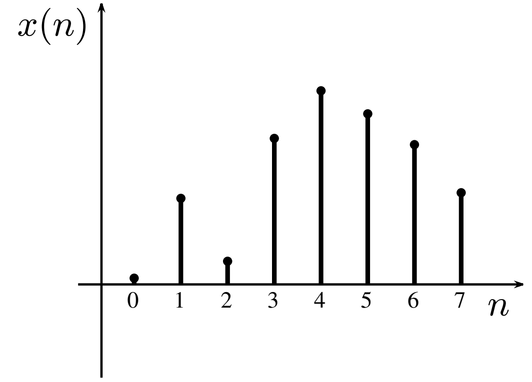
Αρχικό Σήμα

Θόρυβος: Λευκός Γκαουσιανός θόρυβος

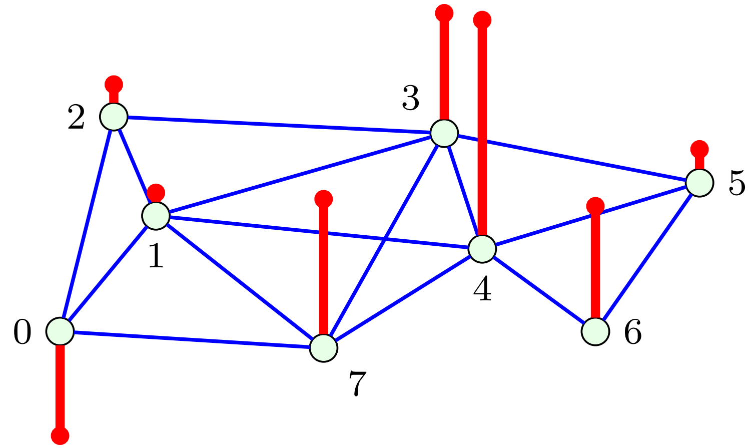
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

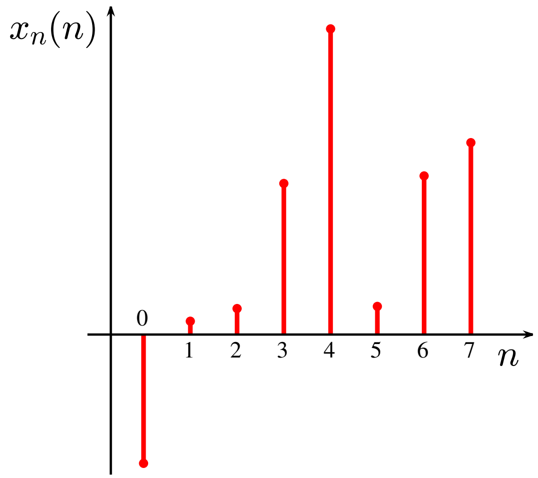
Φασματική Αποθορυβοποίηση: Spectral Denoising





Αρχικό Σήμα





Αρχικό Σήμα +Θόρυβος

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

Φασματική Αποθορυβοποίηση: Spectral Denoising-filtering

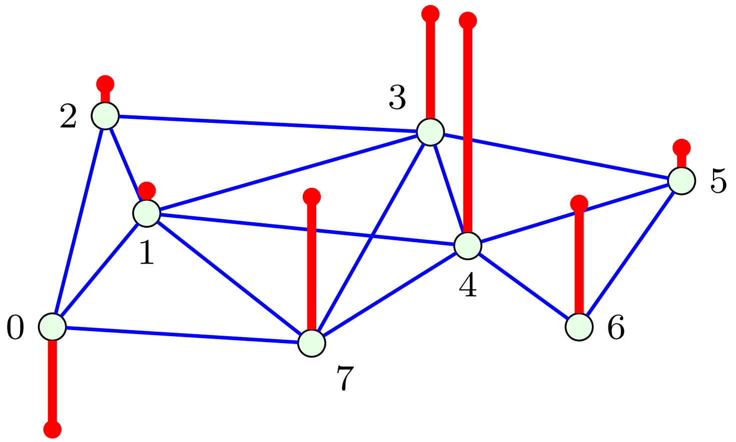
Ιδανικό χαμηλοπερατό Φίλτρο

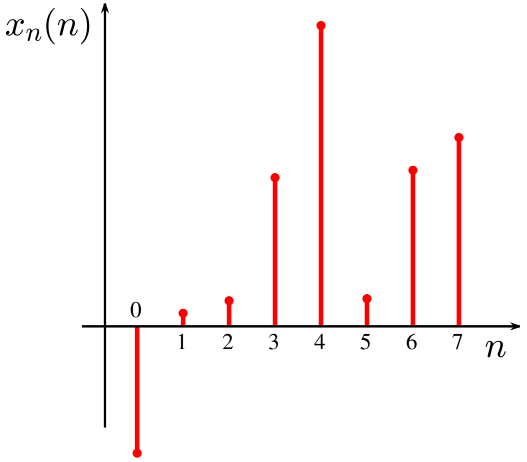
Διατηρούμε όλα τα ιδιοδιανύσματα των οποίων οι ιδιοτιμές είναι μεγαλύτερες από την ιδιοτιμή λ_*, δηλαδή:

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda > \lambda_* \\ 0 & \lambda < \lambda_*\end{cases}$$

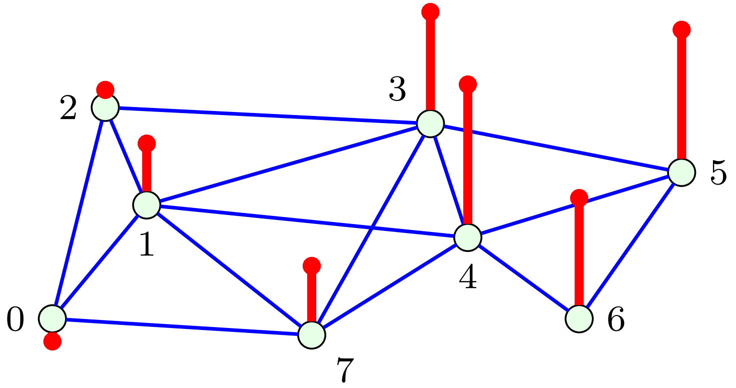
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

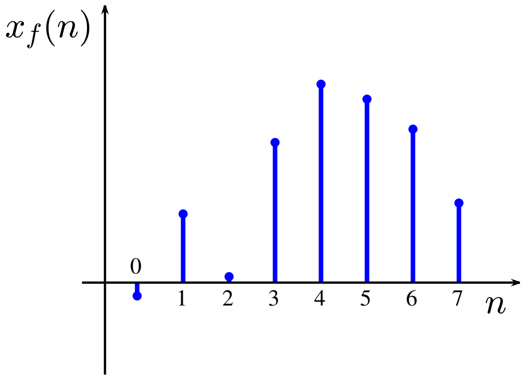
Φασματική Αποθορυβοποίηση: Spectral Denoising





Αρχικό Σήμα +Θόρυβος

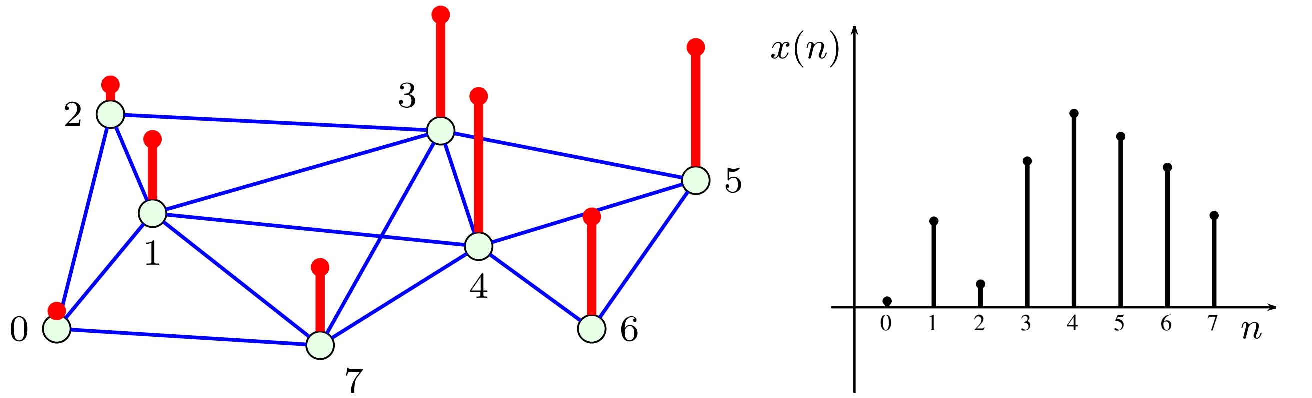




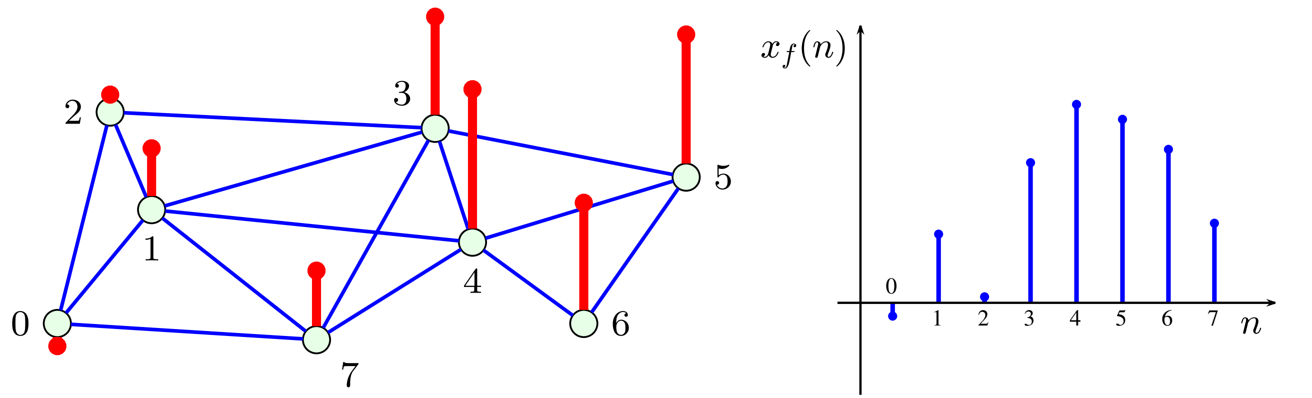
Αποθορυβοποιημένο

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Φασματική Αποθορυβοποίηση: Spectral Denoising



Αρχικό Σήμα



Αποθορυβοποιημένο

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμένη Στο Μητρώο Γειτνίασης

Αποθορυβοποίηση μέ “κανονικοποίηση” (regularization)

Ας θεωρήσουμε ότι διαθέτουμε τις παρατηρήσεις: $\boldsymbol{y}_N = \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{w}_N$

$$\min_{\boldsymbol{x}_N} ||\boldsymbol{w}_N||_2^2 + \boldsymbol{\lambda}||\,\boldsymbol{x}_N - \mathbf{A}\boldsymbol{x}_N||_2^2$$

$$\boldsymbol{x}^*_N = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^T(\mathbf{I} - \boldsymbol{A})]^{-1}\boldsymbol{y}_N$$

Ας σχολιάσουμε το κόστος της λύσης…

Σχεδίαση Φίλτρων στον Χώρο του Φάσματος

Έστω $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Lambda})$ η ιδανική ΣΜ του Γραφήματος (σε μορφή διαγώνιου μητρώου).

Η Σχεδίαση Φίλτρου στο Χώρο του Φάσματος γίνεται σε τρία (3) Βήματα:

B_1: Υπολόγισε τον GFT του γραφοσήματος εισόδου:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}^{-1}\,\boldsymbol{x}$$

B_2: Πολλαπλασίασε τον GFT του γραφοσήματος εισόδου με την ιδανική ΣΜ του Γραφήματος για να υπολογίσουμε το:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}^{-1}\,\boldsymbol{x}$$

B_3: Υπολόγισε το γραφοσήμα εξόδου από τον IGFT του $\boldsymbol{Y}$, δηλαδή:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{Y}.$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμένη Στο Μητρώο Γειτνίασης

Σχεδίαση Φίλτρων στον Χώρο των Κόμβων

Έστω $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\Lambda})$ ο ιδανικός GFT του Γραφήματος τον οποίο, στην γενική περίπτωση, θέλουμε να προσεγγίσουμε με το ακόλουθο διάνυσμα:

$$\boldsymbol{diag}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\Lambda})) = \sum_{m=0}^{M-1} \Lambda_M^m \boldsymbol{h}_M$$

ή ισοδύναμα:

$$d(\lambda_n) \sim \sum_{m=0}^{M-1} \lambda_n^m h_m, n = 1,2, \dots M$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

Σχεδίαση Φίλτρων στον Χώρο των Κόμβων

Έστω $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\Lambda})$ ο ιδανικός GFT του Γραφήματος τον οποίο, στην γενική περίπτωση, θέλουμε να προσεγγίσουμε με το ακόλουθο διάνυσμα:

$$\boldsymbol{diag}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\Lambda})) = \sum_{m=0}^{M-1} \Lambda_M^m \boldsymbol{h}_M$$

ή ισοδύναμα:

$$d(\lambda_n) \sim \sum_{m=0}^{M-1} \lambda_n^m h_m, n = 1,2, \ldots M$$

Μητρώο Γειτνίασης: A

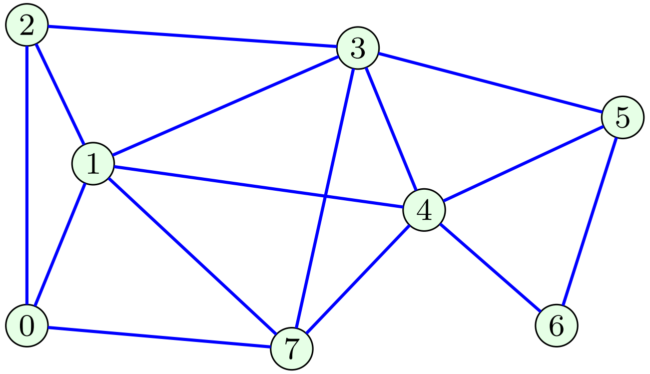
Συνδυαστικό Λαπλασιανό Μητρώο Γειτνίασης: $L_C=D-A$

Μη συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Random walk): $L_{NS}=I-D^{-1}A$

Συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Κανονικοποιημένο): $L_S=I-D^{-1/2}AD^{-1/2}$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

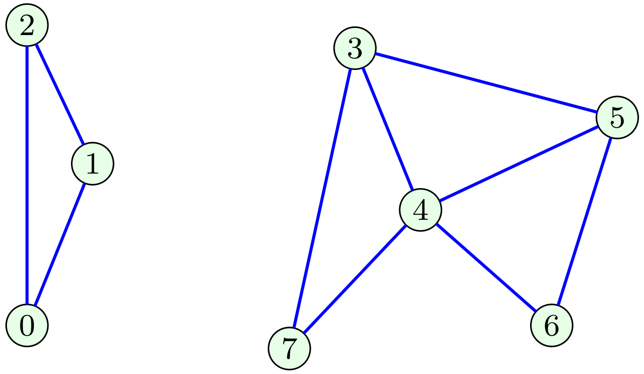
Συνδεδεμένο Γράφημα



Μητρώο Γειτνίασης

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c} \color{blue}{0} \\ \color{blue}{1} \\ \color{blue}{2} \\ \color{blue}{3} \\ \color{blue}{4} \\ \color{blue}{5} \\ \color{blue}{6} \\ \color{blue}{7} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
\begin{matrix} \color{blue}{0} & \color{blue}{1} & \color{blue}{2} & \color{blue}{3} & \color{blue}{4} & \color{blue}{5} & \color{blue}{6} & \color{blue}{7} \end{matrix}
\end{array}
$$

Μη Συνδεδεμένο Γράφημα

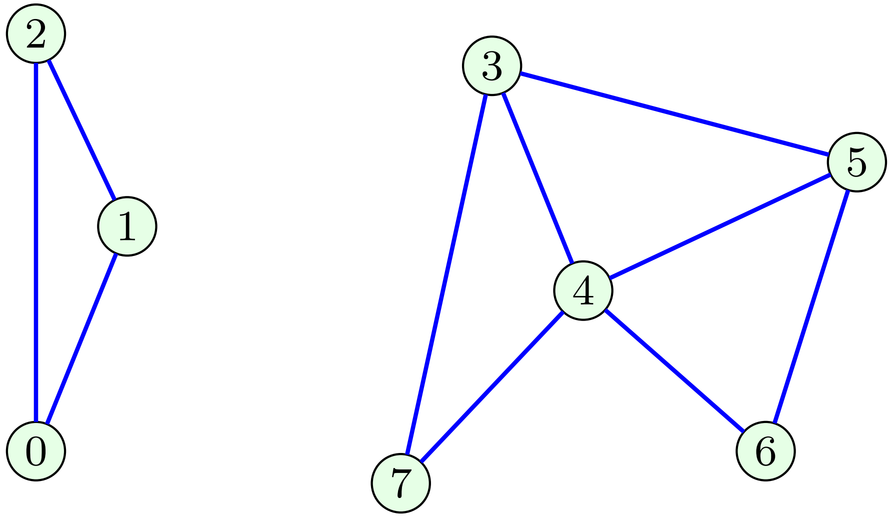


Μητρώο Γειτνίασης

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Ασύνδετο Γράφημα



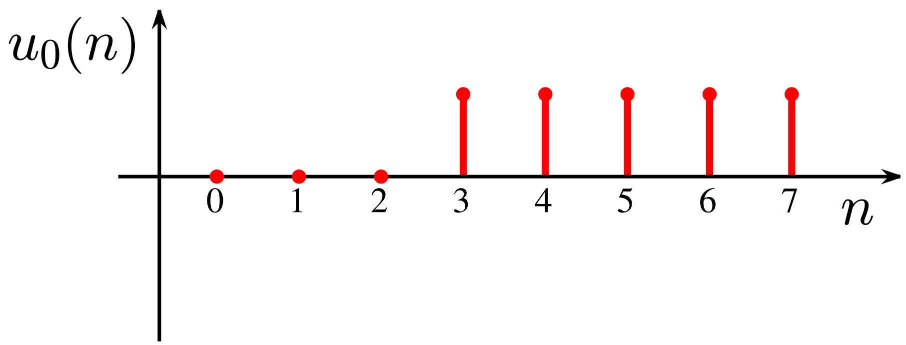
Μητρώο Γειτνίασης

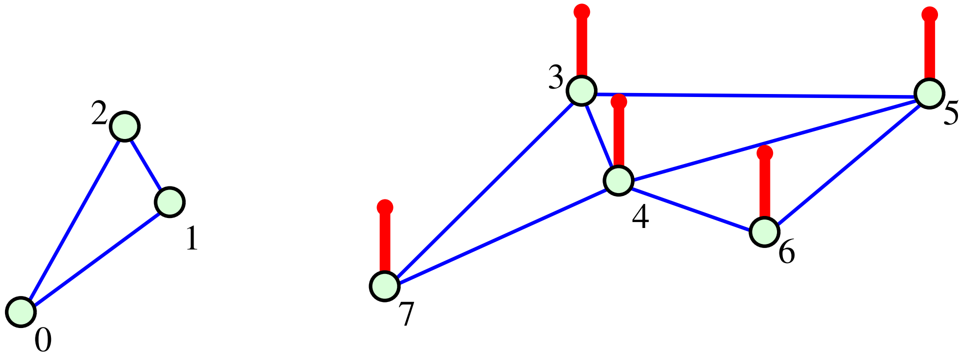
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λαπλασιανό Μητρώο Γειτνίασης

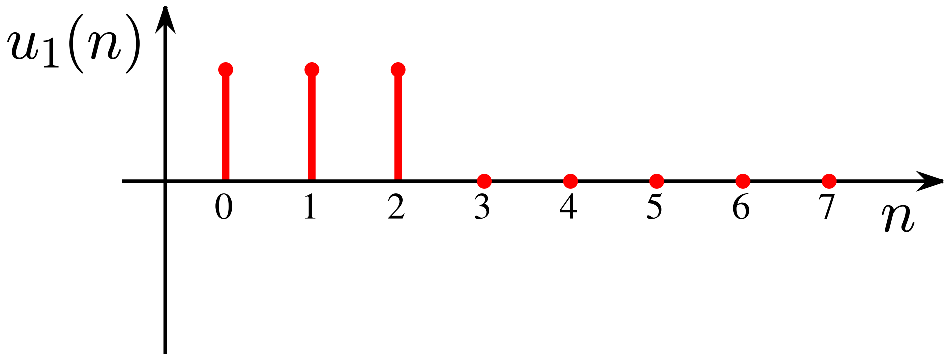
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

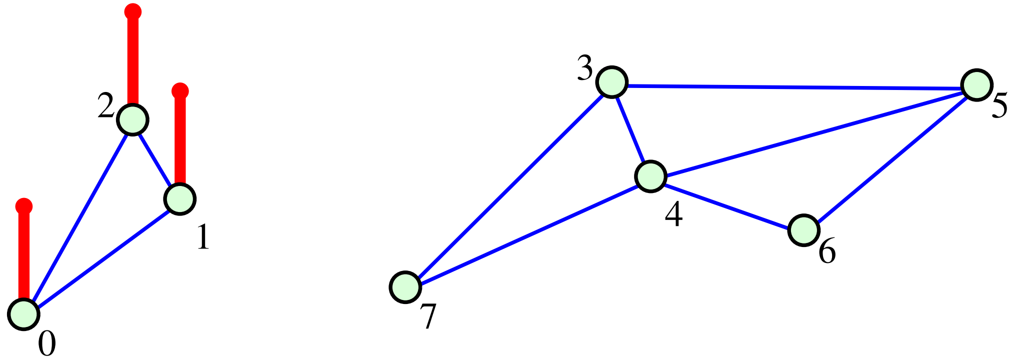
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το πρώτο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v_0}$



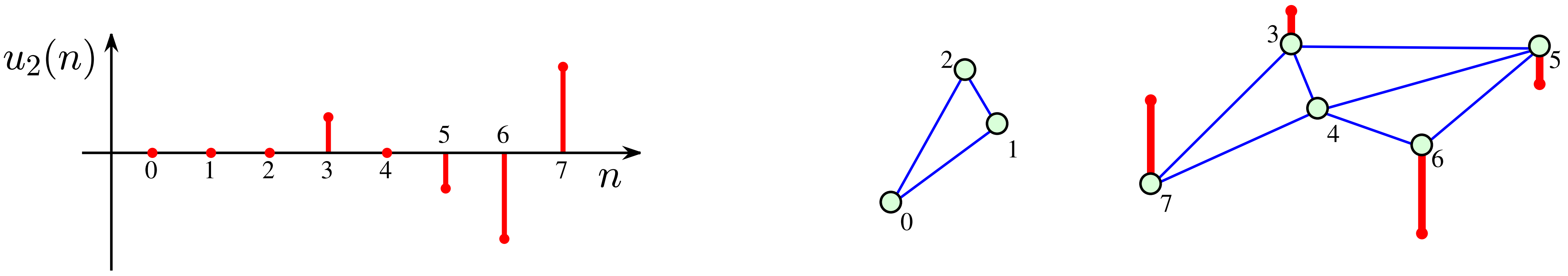


Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_1$





Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το τρίτο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v_2}$

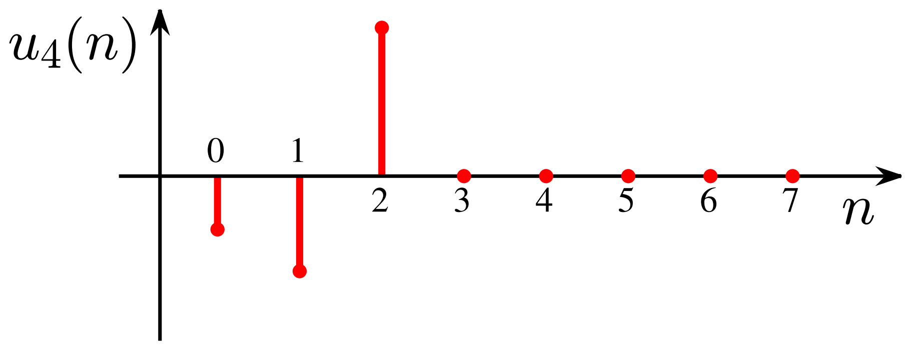


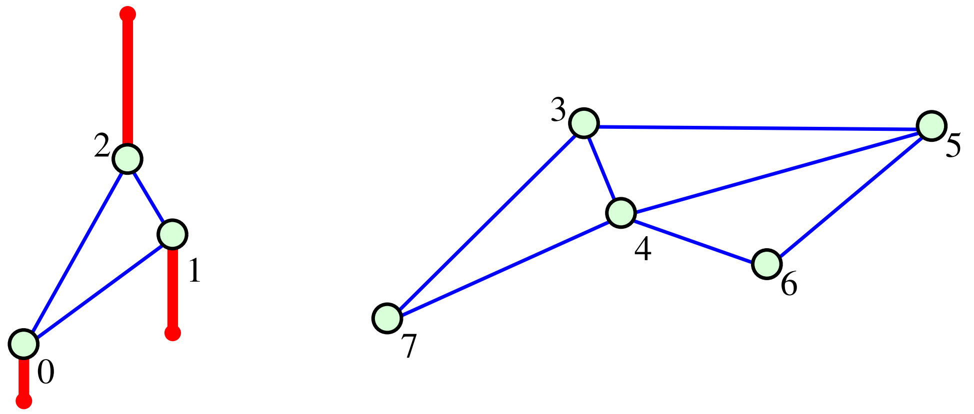
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το τέταρτο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v_3}$

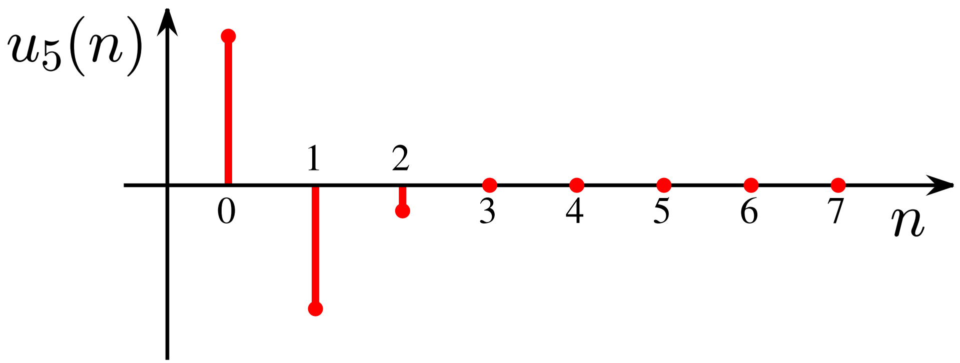
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

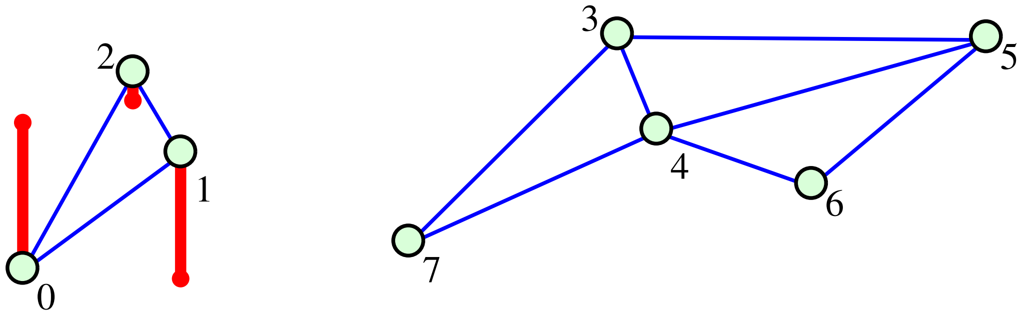
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το πέμπτο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v_4}$



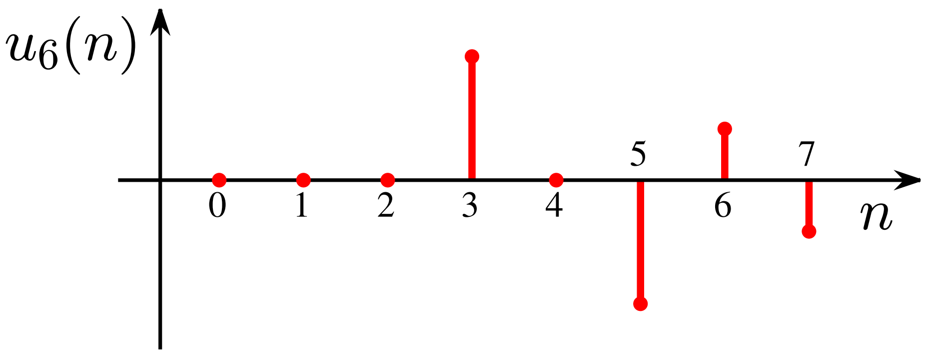


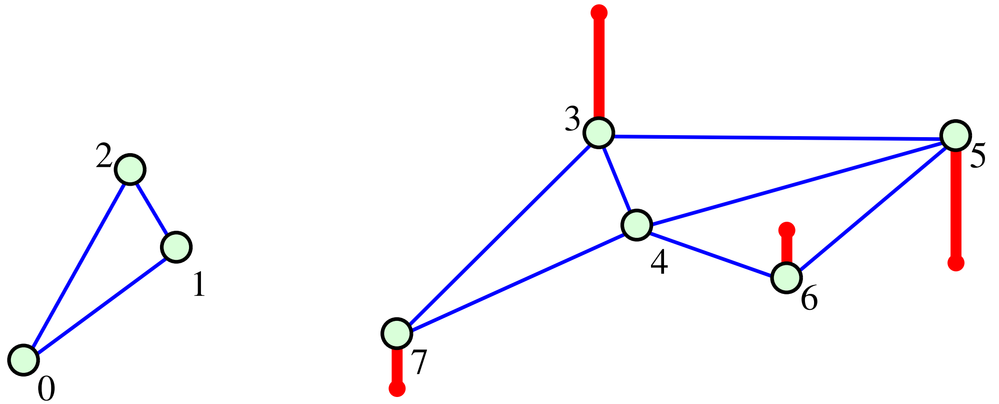
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το έκτο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_5$



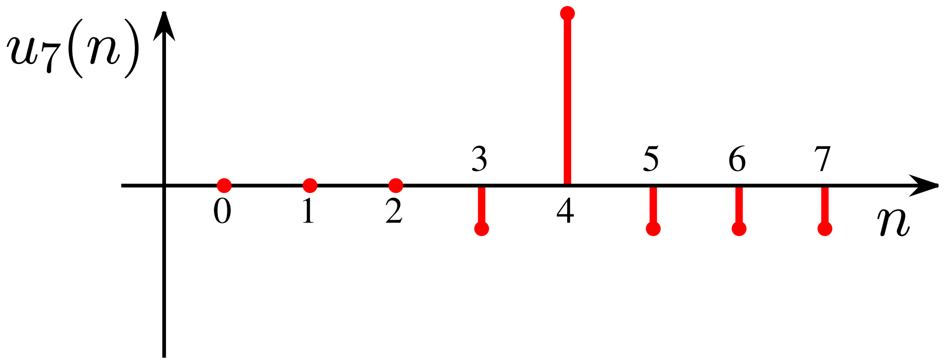


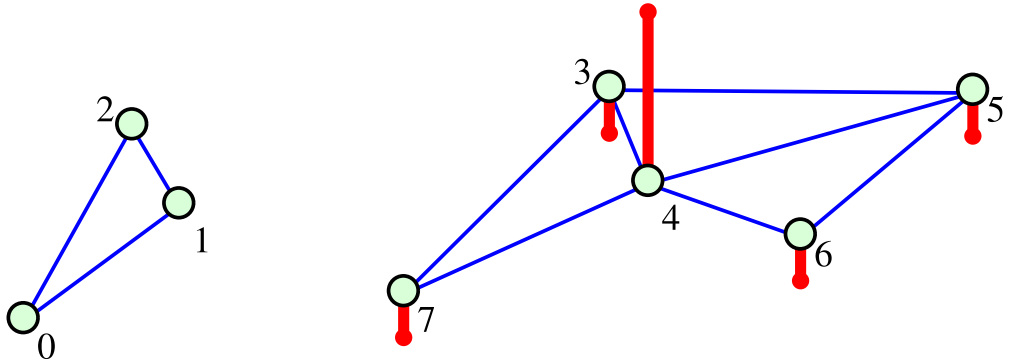
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το έβδομο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_6$





Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το όγδοο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_7$





Συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Κανονικοποιημένο): $L_S = I - D^{-1/2} A D^{-1/2}$

Βασική ιδιότητα: έχει ιδιοτιμές πάντα στο διάστημα [0 2]!!

$$d(\lambda) \sim \sum_{m=0}^{M-1} \lambda^m h_m, n = 1,2,\ldots M$$

$$d(\omega) \sim \sum_{m=0}^{M-1} (\cos(\omega)+1)^m h_m, n = 1,2,\ldots M!!!$$

Συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Κανονικοποιημένο): $L_S = I - D^{-1/2} A D^{-1/2}$

Βασική ιδιότητα: έχει ιδιοτιμές πάντα στο διάστημα [0 2]!!

$$d(\omega) \sim \sum_{m=0}^{M-1} (\cos(\omega) - 1)^m h_m, n = 1,2, \ldots M!!!$$

$$\Downarrow$$

$$d(\omega) \sim \sum_{m=0}^{M-1} \cos(m\omega) g_m, n = 1,2, \ldots M!!!$$

$$d(\omega)\sim \sum_{m=0}^{M-1} (\cos(\omega)+1)^m h_m, n = 1,2,\ldots M!!!$$

$$d(\omega)\sim \sum_{m=0}^{M-1} \cos(m\omega) g_m, n = 1,2,\ldots M!!!$$

Οι κλασσικές τεχνικές σχεδίασης φίλτρων είναι και πάλι εδώ !!