

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σταύρος Κοσμάδης, Δημήτριος Κοσμόπουλος & Εμμανουήλ Ψαράκης

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

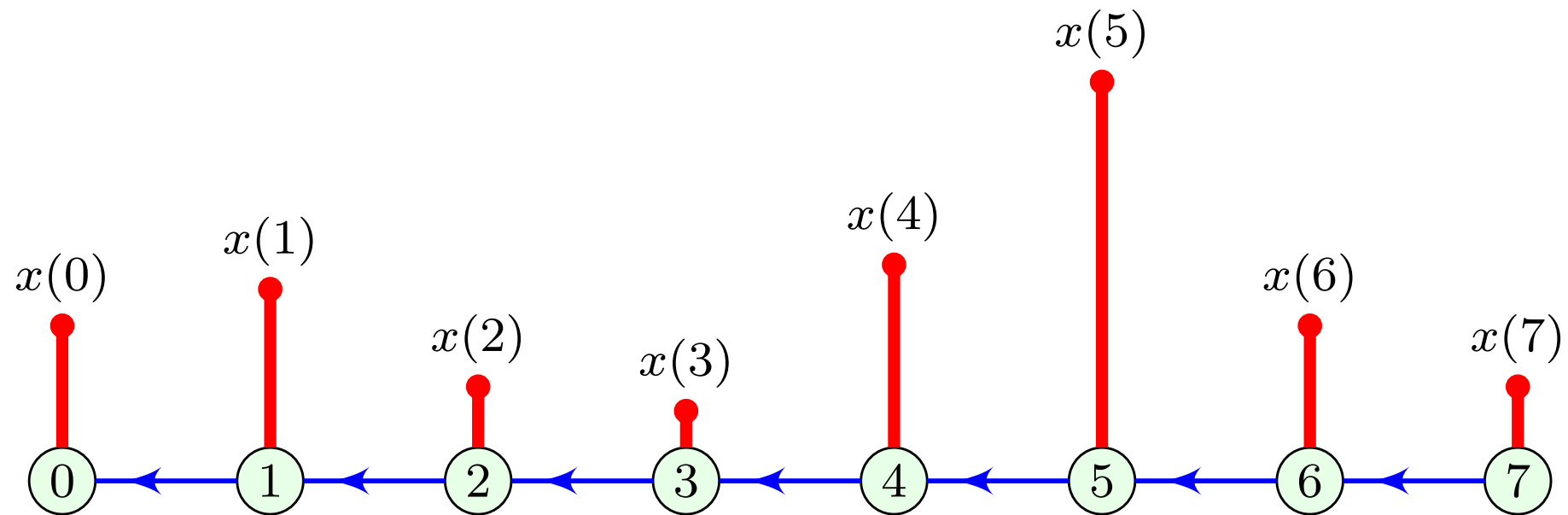
Το **Βασικό Ερώτημα** που θα προσπαθήσουμε να **απαντήσουμε** είναι:

Πώς μπορούμε να **γενικεύσουμε** τεχνικές:

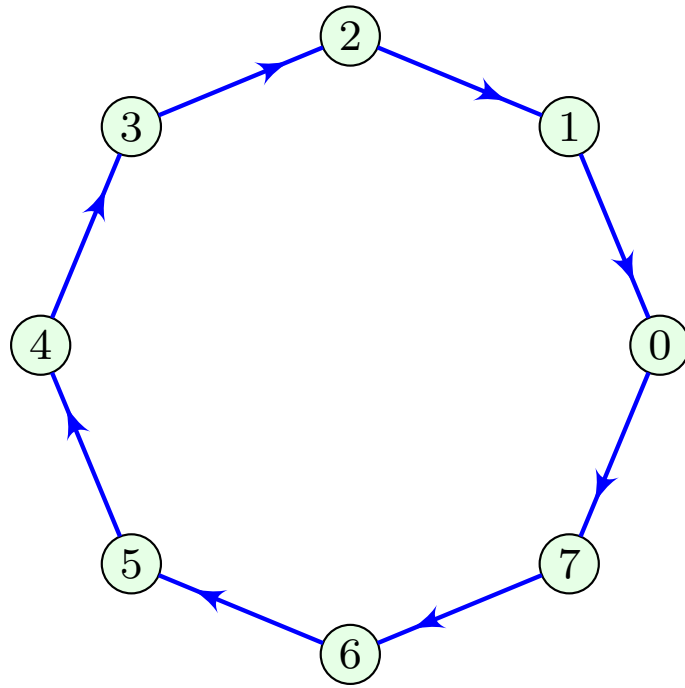
- της **κλασσικής** και
- της **στατιστικής** επεξεργασίας σημάτων
σε **δεδομένα** που είναι **πιο γενικά δομημένα**;

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

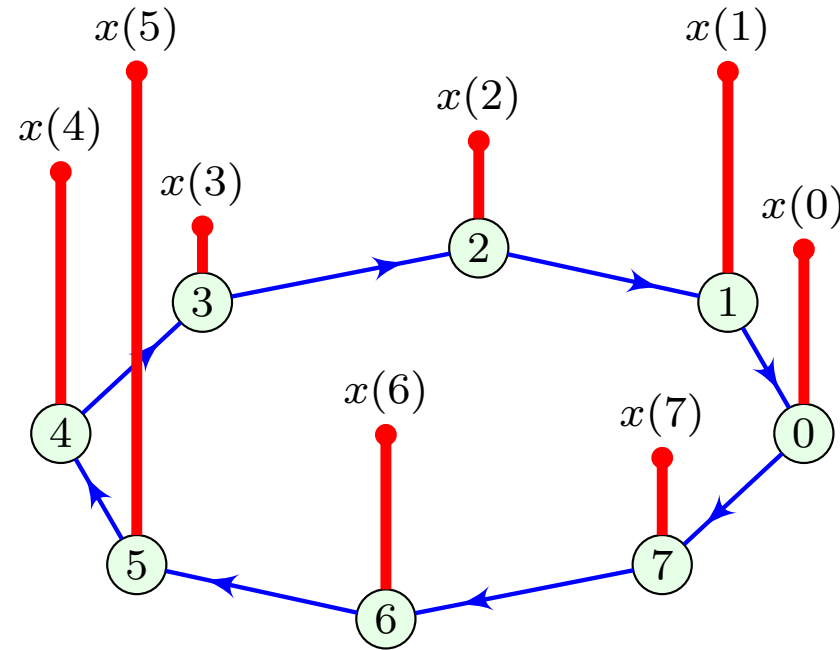
Αναπαράσταση ενός σήματος διακριτού χρόνου σε μορφή γραφήματος



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ



(α)



(β)

(α): **Κυκλικό** Γράφημα και

(β): η αναπαράσταση ενός **περιοδικού** σήματος διακριτού χρόνου πάνω στο γράφημα

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης:

$$\mathcal{V}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

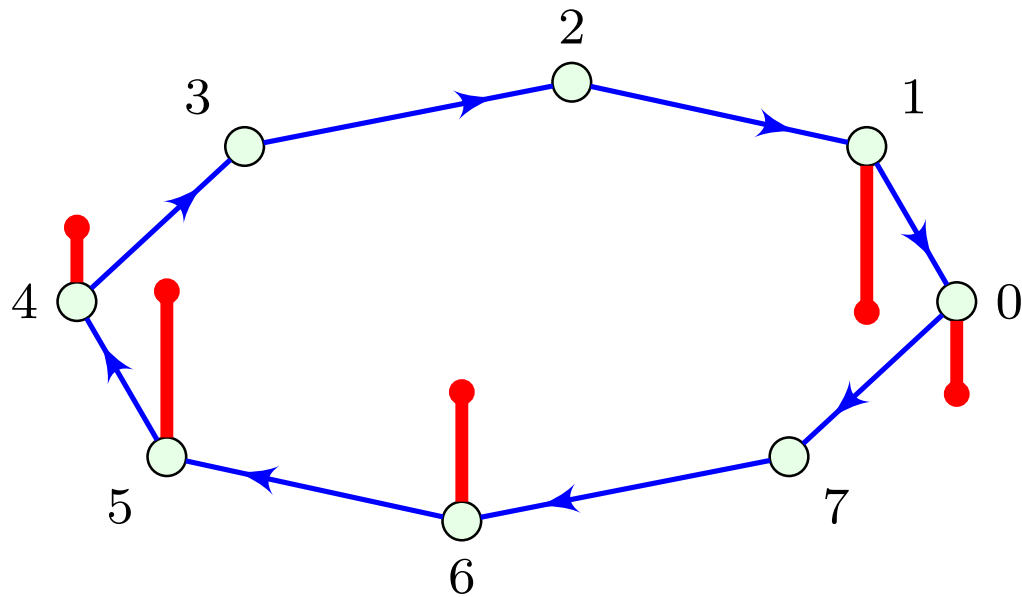
Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Κυκλική Ολίσθηση Σημάτων

Αν $\mathbf{x}_M = [x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{M-2} \quad x_{M-1}]^t$, τότε:

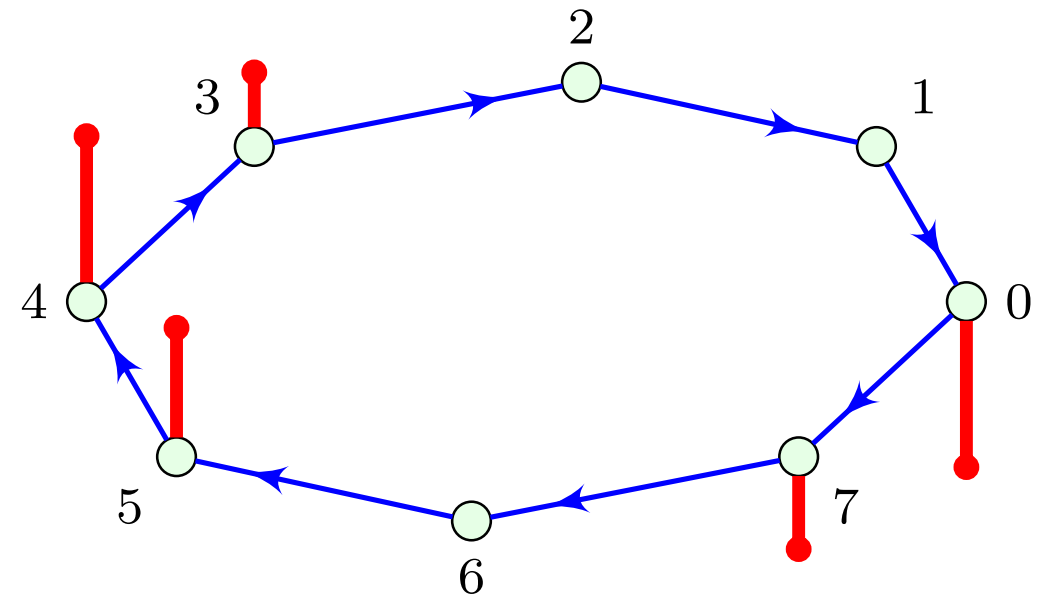
$$U_M \mathbf{x}_M = \begin{bmatrix} x_{M-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{M-2} \end{bmatrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αναπαράσταση Περιοδικού
Σήματος σε Κυκλικό Γράφημα



Ολίσθηση του Περιοδικού
Σήματος σε Κυκλικό Γράφημα



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Κυκλικής Συνέλιξης H_M

Αν $\mathbf{h}_M = [h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{M-2} \ h_{M-1}]^t$, τότε το μητρώο Κυκλικής Συνέλιξης μπορεί να γραφεί ως ακολούθως :

$$H_M = [U_M^0 \mathbf{h}_M \quad U_M^1 \mathbf{h}_M \quad \dots \quad U_M^{M-2} \mathbf{h}_M \quad U_M^{M-1} \mathbf{h}_M]$$

Κυκλική Συνέλιξη

Αν $\mathbf{x}_M = [x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{M-2} \quad x_{M-1}]^t$ ένα σήμα και H_M το μητρώο Κυκλικής Συνέλιξης, τότε :

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_M \circledast \mathbf{x}_M = H_M \mathbf{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \mathbf{h}_M x_m$$

Κυκλική Συνέλιξη

$$\mathbf{y} = \sum_{m=0}^{M-1} (U_M^m \mathbf{h}_M x_m) = \left(\sum_{m=0}^{M-1} x_m U_M^m \right) \mathbf{h}_M$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κυκλική Συνέλιξη:

Όμως:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_M \circledast \mathbf{x}_M = H_M \mathbf{x}_M = \mathbf{x}_M \circledast \mathbf{h}_M = X_M \mathbf{h}_M = \mathbf{y}$$

όπου:

$$H_M = [U_M^0 \mathbf{h}_M \quad U_M^1 \mathbf{h}_M \quad \dots \quad U_M^{M-2} \mathbf{h}_M \quad U_M^{M-1} \mathbf{h}_M]$$

$$X_M = [U_M^0 \mathbf{x}_M \quad U_M^1 \mathbf{x}_M \quad \dots \quad U_M^{M-2} \mathbf{x}_M \quad U_M^{M-1} \mathbf{x}_M]$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κυκλική Συνέλιξη:

ή ισοδύναμα:

$$\mathbf{h}_M \circledast \mathbf{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \mathbf{h}_M \mathbf{x}_m = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \mathbf{x}_M h_m = \mathbf{x}_M \circledast \mathbf{h}_M$$

$$\mathbf{h}_M \circledast_{U_M} \mathbf{x}_M = \dots \quad \dots = \mathbf{x}_M \circledast_{U_M} \mathbf{h}_M$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Κυκλικής Ολίσθησης:

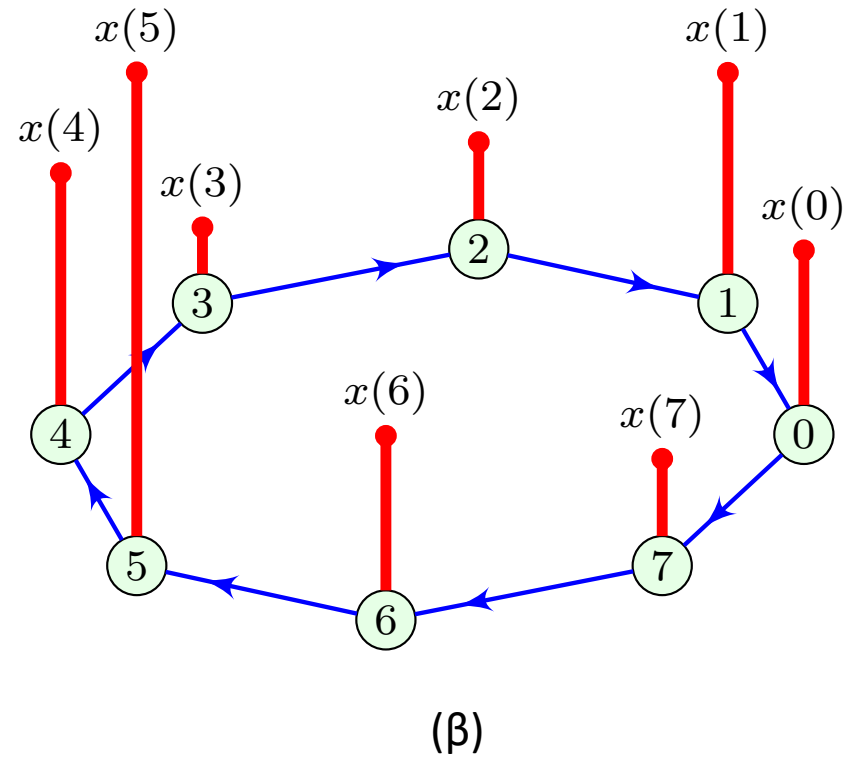
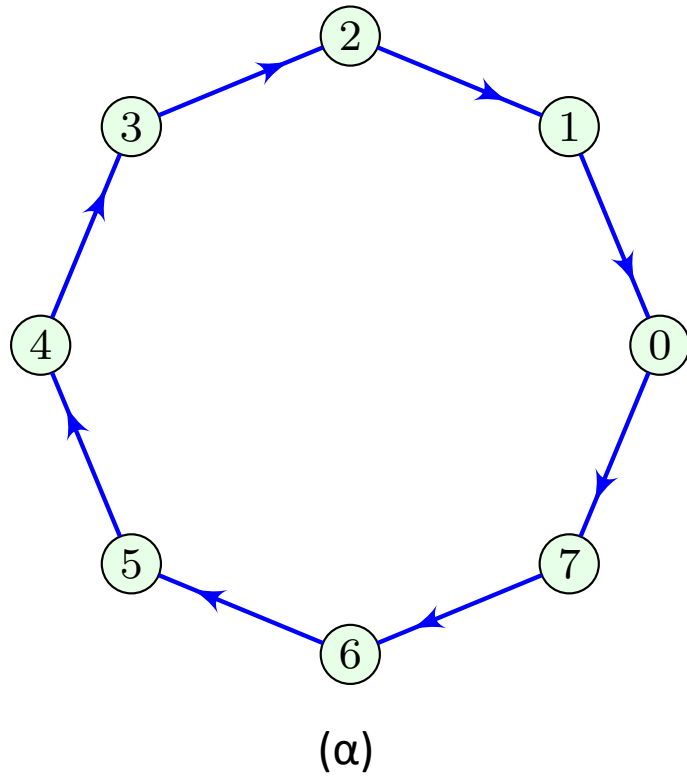
$$\begin{array}{l} U_M^0 \mathbf{x}_M \\ U_M^1 \mathbf{x}_M \\ U_M^2 \mathbf{x}_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_M^{M-1} \mathbf{x}_M \end{array}$$

Το Μητρώο είναι
ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ:

$$U_M = W \Lambda_M W^H$$

$$\begin{array}{l} I_M \mathbf{x}_M \\ W \Lambda_M^1 W^H \mathbf{x}_M \\ W \Lambda_M^2 W^H \mathbf{x}_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ W \Lambda_M^{M-1} W^H \mathbf{x}_M \end{array}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

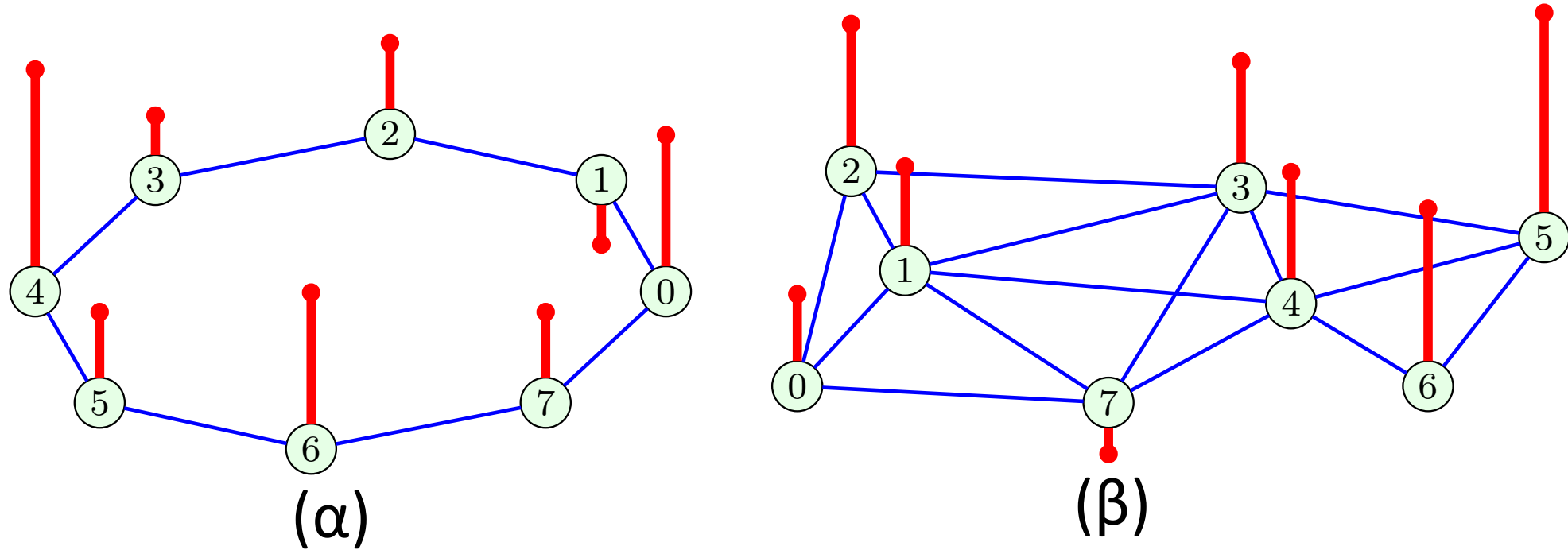


ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης, ή....:

$$\mathcal{V}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

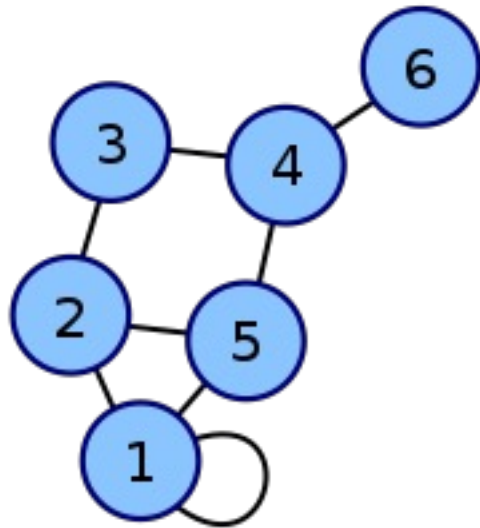


(α): **Περιοδικό** Σήμα Διακριτού Χρόνου τοποθετημένο σε ένα **μη κατευθυνόμενο Κυκλικό** Γράφημα

(β): **Μη κατευθυνόμενο** Γράφημα και η αναπαράσταση ενός **Περιοδικού (;)** σήματος διακριτού χρόνου πάνω του

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα



Μητρώο Γειτνίασης

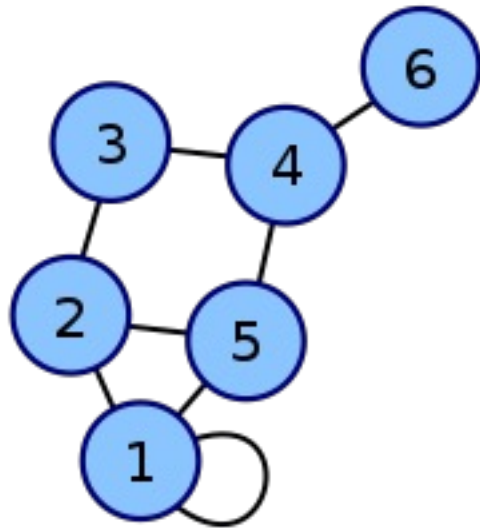
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Το μητρώο γειτνίασης A έχει διαστάσεις $M \times M$ (6×6 στο παράδειγμά μας) και η τιμή του στοιχείου a_{ij} του μητρώου υποδηλώνει την ύπαρξη ή όχι της ακμής (i, j) , δηλαδή:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν υπάρχει η ακμή} \\ 0, & \text{αν δεν υπάρχει} \end{cases}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα



Μητρώο Γειτνίασης

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	0

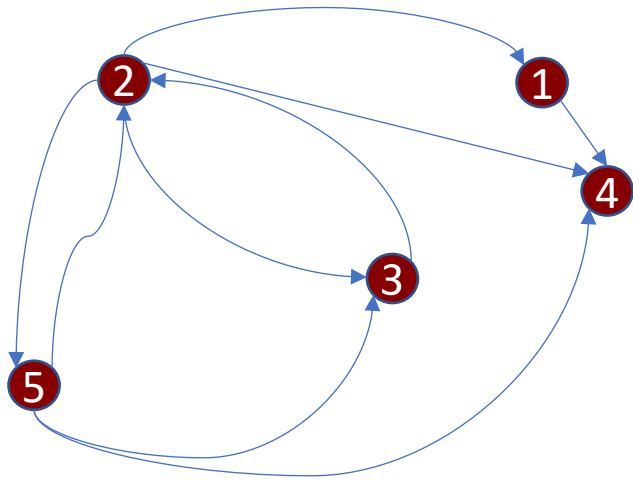
Το μητρώο **γειτνίασης** ενός **μη κατευθυνόμενου** γραφήματος είναι **συμμετρικό**, και επομένως έχει:

- ένα πλήρες σύνολο από **πραγματικές ιδιοτιμές** και
- **μια ορθογώνια** βάση ιδιοδιανυσμάτων

Το σύνολο των **ιδιοτιμών** του μητρώου αποτελεί το **φάσμα** του.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα



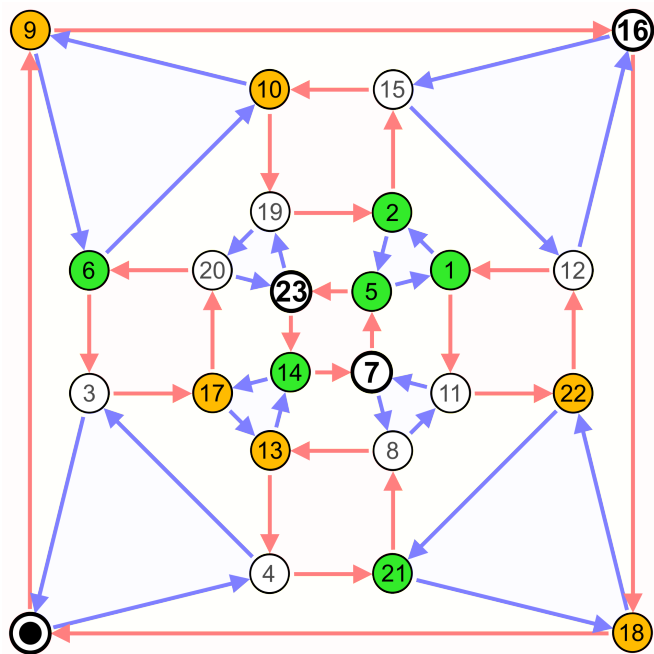
Μητρώο Γειτνίασης

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	1	1	1	0

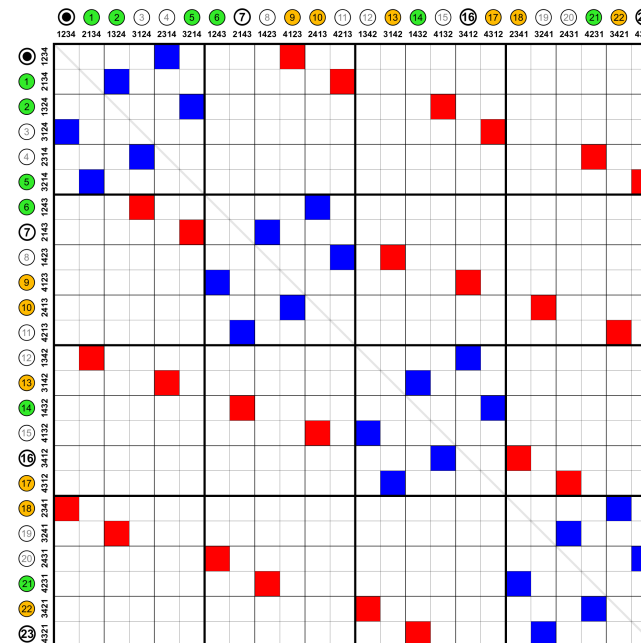
Συμπληρώστε το **μητρώο Γειτνίασης** για το παραπάνω **Γράφημα**

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα



Μητρώο Γειτνίασης



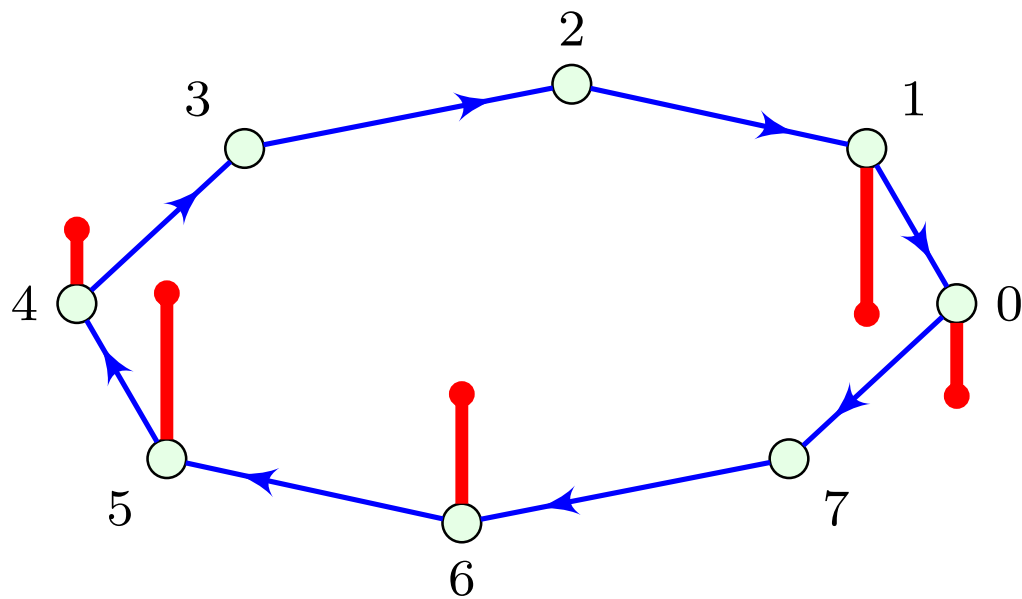
Το μητρώο γειτνίασης ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος είναι **συμμετρικό**, και επομένως έχει ένα πλήρες σύνολο από **πραγματικές ιδιοτιμές** και μια ορθογώνια βάση ιδιοδιανυσμάτων. Τι μπορούμε να πούμε για τα **ιδιοδιανύσματα** ενός κατευθυνόμενου γραφήματος;

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

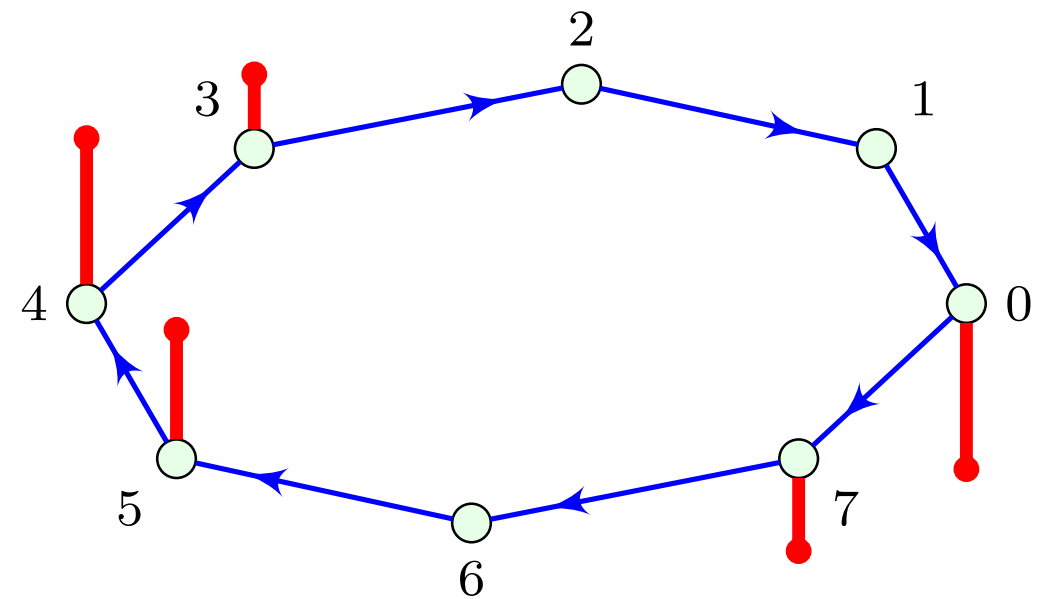
1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
3. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
4. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα
5. Απόκριση Συχνότητας
6. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
7. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αναπαράσταση Περιοδικού Σήματος
σε Κυκλικό Γράφημα



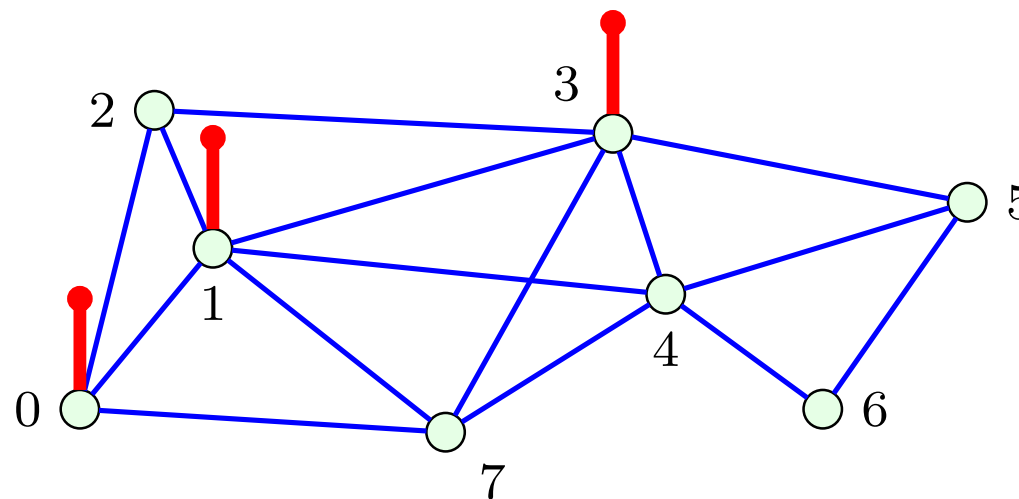
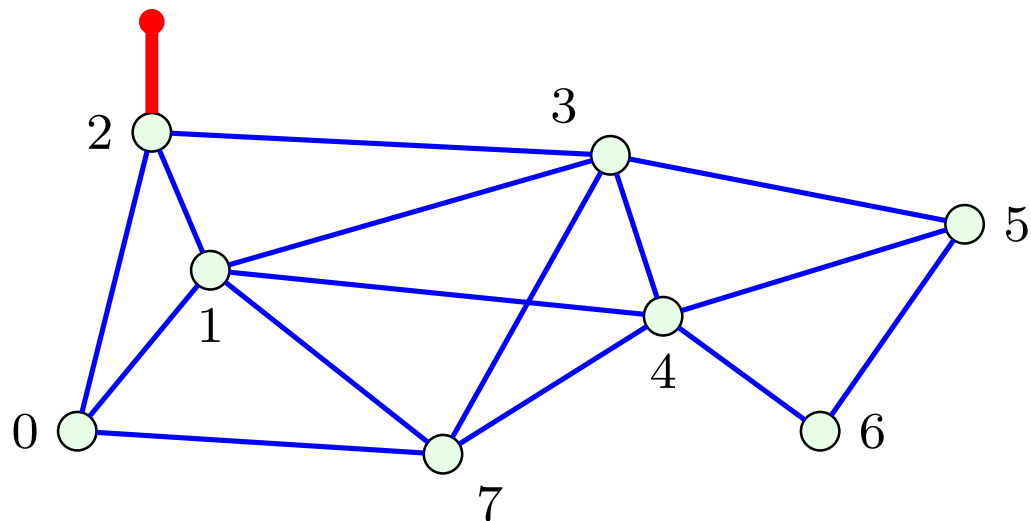
Ολίσθηση του Περιοδικού Σήματος
σε Κυκλικό Γράφημα



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

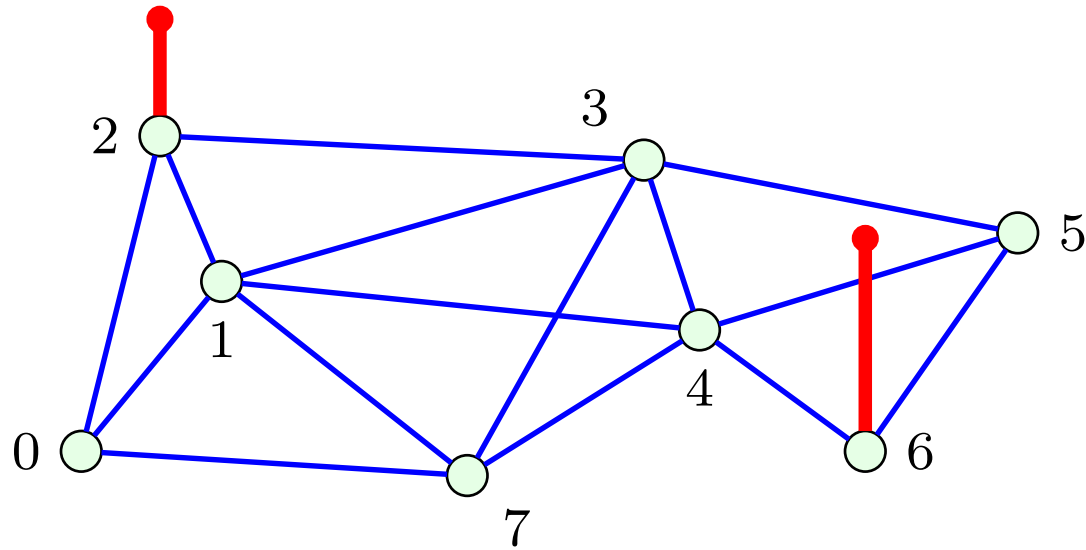
Αναπαράσταση δεξιά ολισθημένης ακολουθίας Kronecker ($\delta(n-2)$) σε Γράφημα

Ολίσθηση (πώς;) ενός βήματος της ακολουθίας στο Γράφημα (αποδείξτε το)

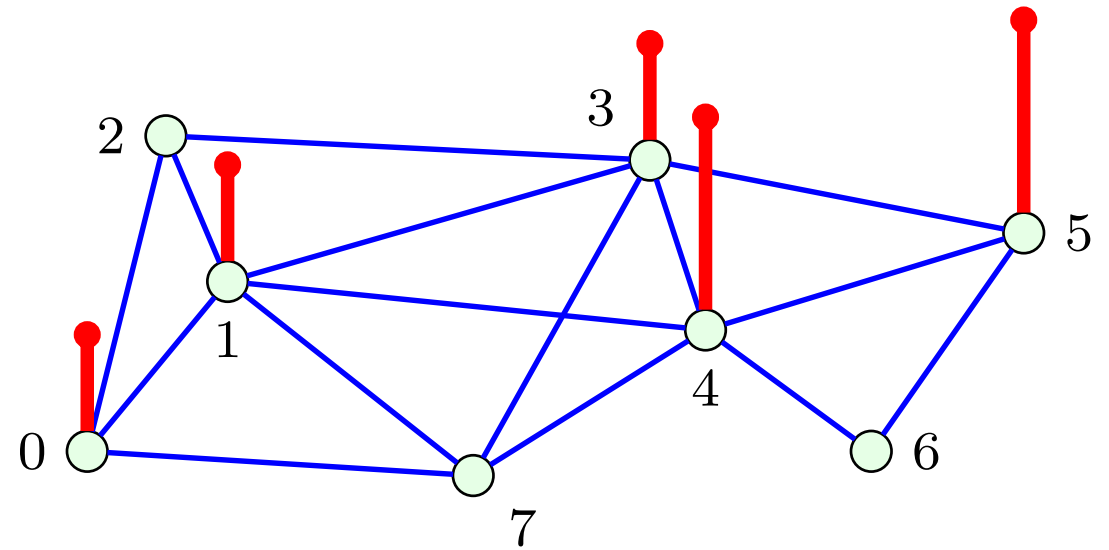


ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αναπαράσταση Περιοδικού Σήματος
σε Γράφημα

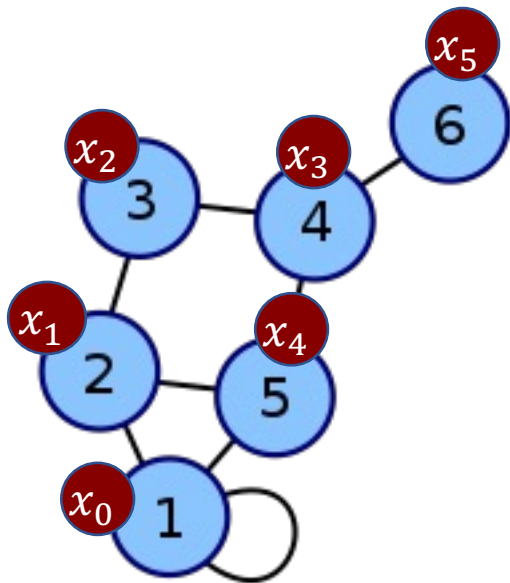


Ολίσθηση Σήματος στο Γράφημα



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Ολίσθησης Γραφημάτων:



$$A\mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

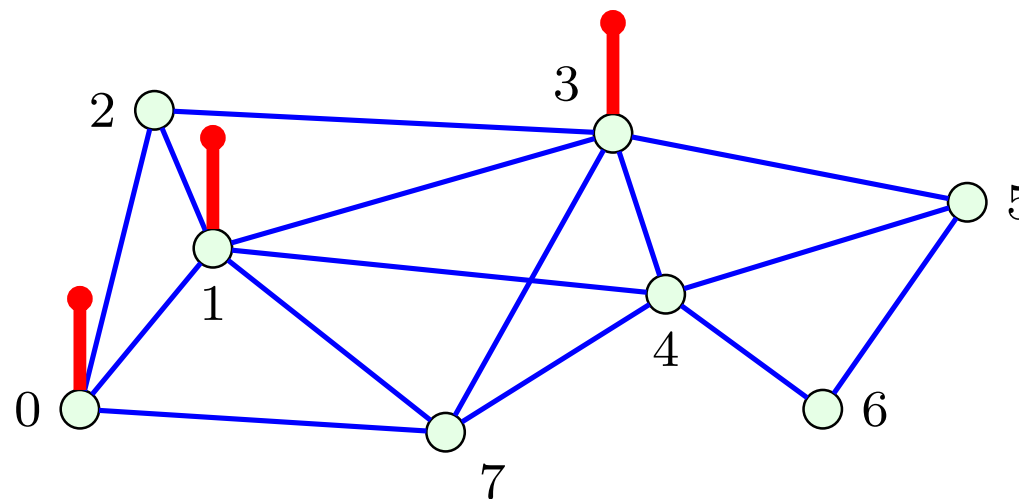
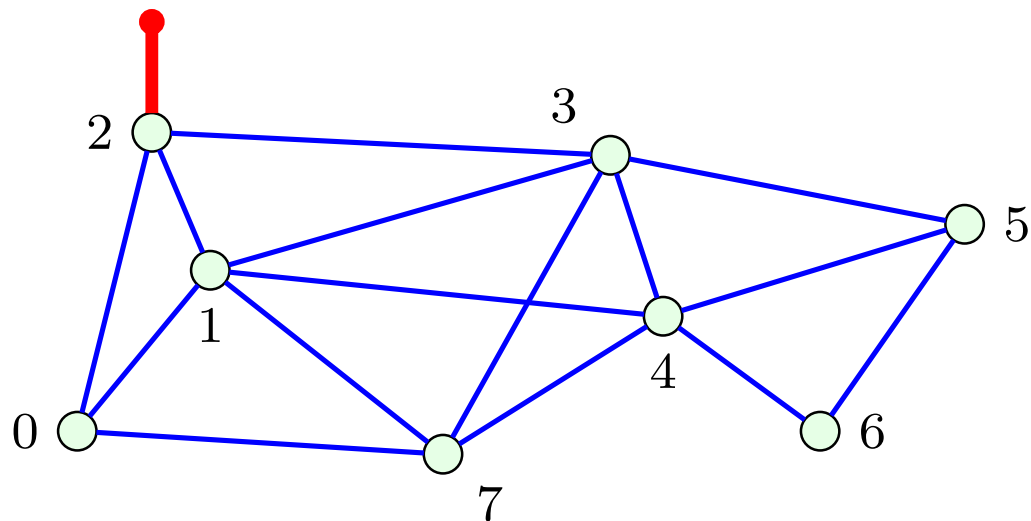
Μητρώο Ολίσθησης Γραφημάτων:

$$A\mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 + x_4 \\ x_0 + x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 + x_5 \\ x_0 + x_1 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

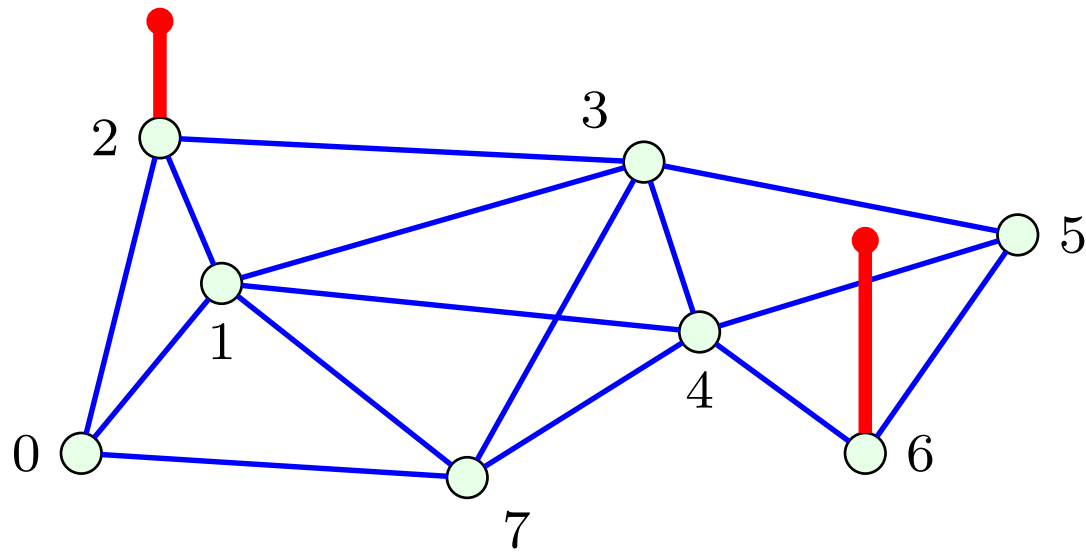
Αναπαράσταση δεξιά ολισθημένης ακολουθίας Kronecker ($\delta(n-2)$) σε Γράφημα

Ολίσθηση (πώς;) ενός βήματος της ακολουθίας στο Γράφημα (αποδείξτε το)

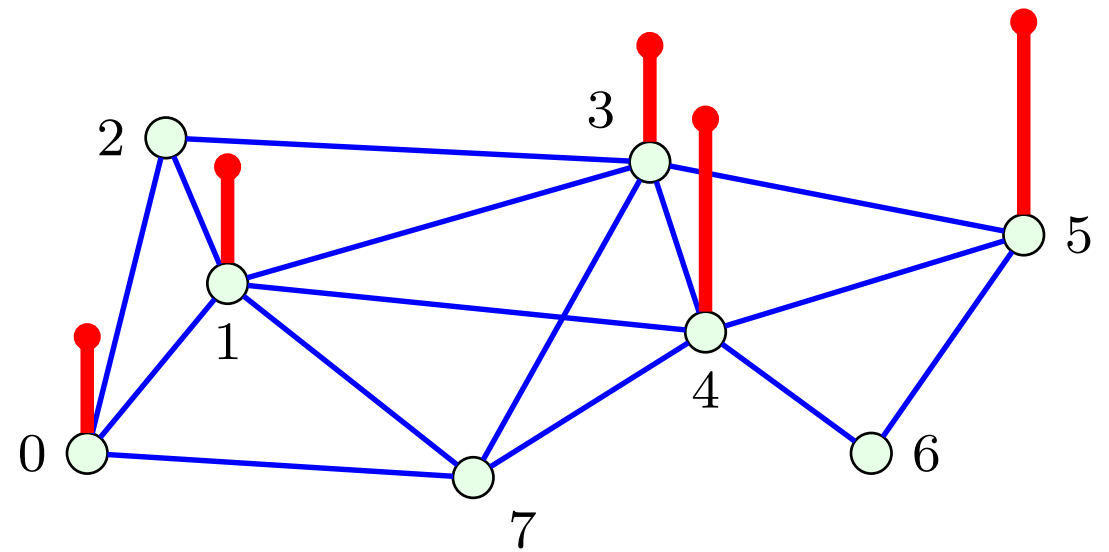


ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αναπαράσταση Περιοδικού Σήματος
σε Γράφημα



Ολίσθηση του Περιοδικού Σήματος
στο Γράφημα



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Συνέλιξη Γειτνίασης:

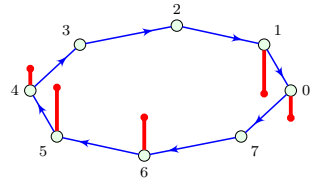
ή ισοδύναμα:

$$\mathbf{h}_M \circledast \mathbf{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} A_M^m \mathbf{h}_M \mathbf{x}_m = \sum_{m=0}^{M-1} A_M^m \mathbf{x}_M h_m = \mathbf{x}_M \circledast \mathbf{h}_M$$

$$\mathbf{h}_M \circledast_{A_M} \mathbf{x}_M = \dots \qquad \dots = \mathbf{x}_M \circledast_{A_M} \mathbf{h}_M$$

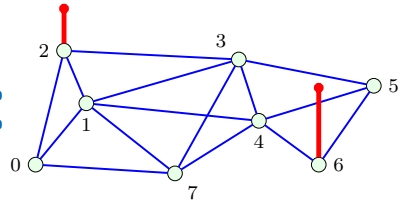
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κυκλική Συνέλιξη:



$$\mathbf{h}_M \circledast_U \mathbf{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \mathbf{h}_M x_m = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \mathbf{x}_M h_m = \mathbf{x}_M \circledast_U \mathbf{h}_M$$

Συνέλιξη Γειτνίασης:



$$\mathbf{h}_M \circledast_A \mathbf{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} A_M^m \mathbf{h}_M x_m = \sum_{m=0}^{M-1} A_M^m \mathbf{x}_M h_m = \mathbf{x}_M \circledast_A \mathbf{h}_M$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Κυκλικής Ολίσθησης:

$$\begin{matrix} U_M^0 \mathbf{x}_M \\ U_M^1 \mathbf{x}_M \\ U_M^2 \mathbf{x}_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_M^{M-1} \\ \mathbf{x}_M \end{matrix}$$

Το Μητρώο είναι
ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ:

$$U_M = W \Lambda_M W^H$$

$$\begin{matrix} I_M \mathbf{x}_M \\ W \Lambda_M^1 W^H \mathbf{x}_M \\ W \Lambda_M^2 W^H \mathbf{x}_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ W \Lambda_M^{M-1} W^H \mathbf{x}_M \end{matrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Ολίσθησης Γραφημάτων:

$$\begin{aligned} & A_M^0 \mathbf{x}_M \\ & A_M^1 \mathbf{x}_M \\ \cdot & A_M^2 \mathbf{x}_M \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & A_M^{M-1} \mathbf{x}_M \end{aligned}$$

Αν το Μητρώο Γειτνίασης
είναι ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ:

$$A_M = V \Lambda_M V^T$$

$$\begin{aligned} & I_M \mathbf{x}_M \\ & V \Lambda_M^1 V^T \mathbf{x}_M \\ & V \Lambda_M^2 V^T \mathbf{x}_M \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & V \Lambda_M^{M-1} V^T \mathbf{x}_M \end{aligned}$$