Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΑΕΣ 25 Ιουνίου 2024

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης	
ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΟΝΟΜΑ :
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ : . . . . . .

ΑΙΘΟΥΣΑ :	ΑΦΕ	ΣΤΗΛΗ :	ΜΟΝΑΔΕΣ:	116

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν τριών ειδών ερωτήσεις που απαρτίζουν έξι θέματα.

1. Ερωτήσεις με την ένδειξη ■. Σε αυτά πρέπει να δώσετε τη λύση με ένα σύντομο υπολογισμό, ή δίχως αιτιολόγηση αν κρίνετε ότι δεν χρειάζεται. 5 ΜΟΝΑΔΕΣ Η ΚΑΘΕΜΙΑ.

2. Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό/Λάθος" ή πολλαπλής επιλογής και καλείσθε, μετά από ένα σύντομο έλεγχο να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση. 4 ΜΟΝΑΔΕΣ Η ΚΑΘΕΜΙΑ.

3. Ερωτήσεις στις οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται. 10 ΜΟΝΑΔΕΣ Η ΚΑΘΕΜΙΑ.

Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτηση ή υποερώτηση στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.
Ερωτήσεις του τύπου 1 και 2 είναι ισοδύναμες.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Σε οποιοδήποτε πρόβλημα με τριγωνομετρικές συναρτήσεις ο τριγωνομετρικός κύκλος δίνει πολλές πληροφορίες και αναμφισβήτητα βοηθάει.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί κάποιων γωνιών

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Λύσεις και Σχόλια

Θ1. Δώστε την απάντηση.

(α΄) ■ $\lim_{N\to\infty} \arctan(e^N) = \frac{\pi}{2}$

Η συνάρτηση $f(x) = \arctan x$ είναι συνεχής, κατά συνέπεια αφού $e^N \to +\infty$, καθώς $N \to +\infty$ θα έχουμε

$$\lim_{N\to+\infty} \arctan(e^N) = \arctan\left(\lim_{N\to+\infty} e^N\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(β΄) ■ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin x)}{x} = 1$

$$\frac{\tan(\sin x)}{x} = \frac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)}\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos(\sin x)}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x} \to 1\cdot 1\cdot 1 = 1,$$

καθώς $x \to 0$, αφού $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ και $(\sin x)/x \to 1$, καθώς $x \to 0$.

(γ΄) ■ $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n + (n/2)}\right)^n = e^{2/3}$

$$\left(1 + \frac{1}{n + (n/2)}\right)^n = \left(1 + \frac{2/3}{n}\right)^n \to e^{2/3}$$

(δ΄) Αν $r \in \mathbb{R}$, και $\alpha = \ldots$ (συμπληρώστε) είναι το μέγιστο των ψηφίων του αριθμού μητρώου σας, πότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^r)^n$ συγκλίνει;

Η σειρά είναι γεωμετρική και συγκλίνει αν και μόνο αν $|\alpha^r| < 1$. Εδώ, σύμφωνα με τους καταλόγους είναι $1 < \alpha \le 9$, κατά συνέπεια για να είναι $0 < a^r < 1$ πρέπει $r < 0$.

i. Αν $r = 0$ ii. Αν $r < 0$ iii. Αν $r > 0$ iv. Για όλα τα r

■ Για τα r για τα οποία συγκλίνει $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^r)^n = \frac{1}{1-\alpha^r}$, για το δικό σας α.

Υπάρχουν γραπτά που έχουν $\alpha = 0$ άρα ΑΜ $= 0000000$, ή $\alpha = 1$ που σημαίνει ότι ο ΑΜ είναι στο δυαδικό σύστημα, αποτελείται δηλαδή από 0 και 1. Μα υπάρχει κάποιος/κάποια με τέτοιο αριθμό μητρώου; Στο progress πάντως δεν υπάρχει τέτοιος ΑΜ. Υπάρχει και γραπτό με $\alpha = 15$, μα είναι δυνατόν; Μήπως να σοβαρευτούμε, αν γίνονται λάθη εδώ θα γίνουν σίγουρα και στα υπόλοιπα.

Θ2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x - x + 2,, \qquad x > 0.$$

(α΄) Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού P_2 που προσεγγίζει την f σε διάστημα γύρω από το $x_0 = 1$.

Το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού P_2 που προσεγγίζει την f γύρω από το σημείο $x_0 = 1$ είναι

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

έτσι υπολογίζοντας

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3},$$

βρίσκουμε

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

(β') Να εκτιμηθεί το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης της f από το P_2 στο διάστημα $(1/2, 3/2)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής Taylor έχουμε για κάποιο ξ μεταξύ ένα (το κέντρο του διαστήματος) και x

$$f(x) - P_2(x) = R_2(x) = \frac{2}{3!\xi^3}(x-1)^3$$

επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - P_2(x)| &\le \max_{x,\xi\in[1/2,3/2]} \left| \frac{2}{3!\,\xi^3}(x-1)^3 \right| \\ &= \frac{1}{3(1/2)^3}\left(\frac{3}{2} - 1\right)^3 \qquad (\max x \;\&\; \min \xi) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Θ3. Αν α είναι το μέγιστο των ψηφίων του αριθμού μητρώου σας, να βρεθεί το μέγιστο διάστημα I_α ώστε

$$|e^{x+\alpha} - e^{x-\alpha}| > \alpha$$

για όλα τα σημεία x του διαστήματος.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε

$$e^t - e^s = e^\xi(t-s), \qquad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } t \text{ και } s$$

έτσι για $t = x + \alpha$ και $s = x - \alpha$ βρίσκουμε

$$|e^{x+\alpha} - e^{x-\alpha}| = e^\xi 2\alpha, \qquad x - \alpha < \xi < x + \alpha$$

επομένως για να ισχύει η δοσμένη σχέση θα πρέπει να ισχύει

$$e^\xi 2\alpha > \alpha \Leftrightarrow e^\xi > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi > -\ln 2$$

για όλα τα ξ στο διάστημα $(x-\alpha, x+\alpha)$, γεγονός που επιβάλλει να ισχύει $x - \alpha > -\ln 2$, ισοδύναμα $x > \alpha - \ln 2$. Έτσι το ζητούμενο μέγιστο διάστημα είναι το $(\alpha - \ln 2, +\infty)$.

Θ4. Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha}{x}y = 1, \qquad x > 0$$

όπου α είναι το μέγιστο των ψηφίων του αριθμού μητρώου σας. Να βρεθούν **όλες** οι λύσεις της εξίσωσης.

Η εξίσωση είναι γραμμική, και για να βρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu = \mu(x)$ πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με την μ και βρίσκοντας

$$\mu\frac{dy}{dx} + \mu\frac{\alpha}{x}y = \mu, \qquad x > 0 \tag{1}$$

θέλουμε να έχουμε

$$\begin{aligned} \mu' = \mu\frac{\alpha}{x} \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\alpha}{x} &\Rightarrow \ln|\mu| = \alpha\ln x + c, \qquad x > 0 \\ &\Rightarrow |\mu| = e^c x^\alpha \\ &\Rightarrow \mu = \pm e^c x^\alpha \end{aligned}$$

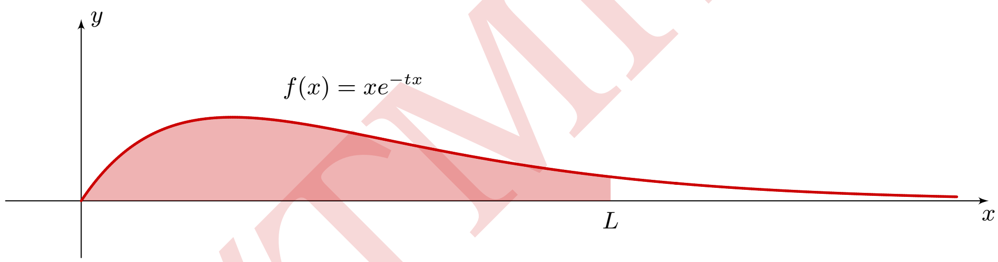
Επιλέγοντας $\mu = x^\alpha$ από την (1) βρίσκουμε

$$x^\alpha y' + \alpha x^{\alpha-1}y = x^\alpha \Rightarrow (x^\alpha y)' = x^\alpha \Rightarrow x^\alpha y = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \Rightarrow y = \frac{x}{\alpha+1} + \frac{c}{x},$$

όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

Θ5. Για $t > 0$ και $L > 0$ θέτουμε

$$A_L(t) = \int_0^L xe^{-tx}\,dx.$$



Σχήμα 1: $A_L(t)$ = Εμβαδόν σκιασμένης περιοχής.

Το ολοκλήρωμα-εμβαδόν είναι αύξουσα συνάρτηση του άκρου L.

(α') $L_1 < L_2 \Rightarrow A_{L_1}(t) < A_{L_2}(t)$. Σ Λ

Αφού για $L_1 < L_2$

$$A_{L_2} = A_{L_1} + \int_{L_1}^{L_2} xe^{-tx}\,dx$$

και $xe^{-tx} > 0$, βλέπε Σχήμα 1.

(β') ■ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{L-h}^{L+h} xe^{-tx}\,dx = Le^{-tL}$

αφού από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για το ολοκλήρωμα έχουμε

$$\frac{1}{2h}\int_{L-h}^{L+h} xe^{-tx}\,dx = \xi e^{-t\xi}, \qquad L-h < \xi < L+h.$$

(γ') Υπολογίστε το $A_L(t)$.

$$
\begin{aligned}
A_L(t) = \int_0^L x e^{-tx}\,dt &= \int_0^L x\left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)'\,dx \\
&= -\frac{x}{t}e^{-tx}\Big|_0^L + \int_0^L \frac{1}{t}e^{-tx}\,dx \\
&= -\frac{L}{t}e^{-tL} - \frac{1}{t^2}e^{-tx}\Big|_0^L \\
&= -\frac{L}{te^{tL}} - \frac{1}{t^2e^{tL}} + \frac{1}{t^2}.
\end{aligned}
$$

(δ′) ■ $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-tx}\,dx = \lim_{L\to\infty}\int_0^L x e^{-tx}\,dx = \lim_{L\to\infty}\left(-\frac{L}{te^{tL}} - \frac{1}{t^2e^{tL}} + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t^2}.$

Θ6. Κυκλώστε κατάλληλα, ή δώστε την απάντηση.

(α′) ■ $e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

(β′) $e^{x+iy} = e^x e^{i(y+2k\pi)}$, όπου k είναι φυσικός αριθμός. Σ Λ

αφού

$$e^{i(y+2k\pi)} = e^{iy}e^{i2k\pi} = e^{iy}(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)) = e^{iy}.$$

(γ′) ■ $|e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x.$

(δ′) ■ $(1-i)^{16} = \left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^{16} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{16} = 2^8$

αφού

$$
\begin{aligned}
\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{16} &= (\sqrt{2})^{16}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^{16} \\
&= 2^8(\cos(28\pi) + i\sin(28\pi)) \qquad \text{(De Moivre)} \\
&= 2^8(1+0i).
\end{aligned}
$$

(ε′) Αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2+\cos(a_n)}$ συγκλίνει. Σ Λ

αφού $2+\cos(a_n) \geq 1$, έπεται ότι

$$\left|\frac{a_n}{2+\cos(a_n)}\right| \leq |a_n|,$$

άρα η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2+\cos(a_n)}$ συγκλίνει απολύτως, άρα συγκλίνει.

(ϛ′) ■ Αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ συγκλίνει, τότε $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-a_n} = e^0 = 1$

αφού από τη σύγκλιση της σειράς έχουμε ότι $a_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$.