Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εαρινό εξάμηνο 2024

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10: Διαφορικές εξισώσεις

1. Να βρεθούν οι τιμές του m για τις οποίες η $y = x^m$ είναι λύση της

   (α') $x^2 y'' - y = 0.$

   (β') $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0.$

2. Για τη διαφορική εξίσωση

$$y = ty' + (y')^2$$

   (α') Να δειχθεί ότι $y = ct + c^2$, όπου c είναι μία σταθερά, είναι μία μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων.

   (β') Να εξετασθεί εάν υπάρχει λύση της μορφής $y = kt^2$, όπου k είναι κάποια σταθερά.

3. Να δειχθεί ότι η y είναι λύση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης.

   (α') $2y' + y = 0, \qquad y = e^{-x/2}.$

   (β') $y' = 25 + y^2, \qquad y = 5\tan 5x.$

   (γ') $\frac{dy}{dt} = (2-y)(1-y), \qquad t = \ln\frac{2-y}{1-y}.$

   (δ') $y'' + (y')^2 = 0, \qquad y = \ln|x + c_1| + c_2.$

Λύση

(γ) Πρώτος τρόπος:

$$t = \ln\frac{2-y}{1-y} \Rightarrow e^t = \frac{2-y}{1-y} \Rightarrow \cdots \Rightarrow y = \frac{2-e^t}{1-e^t}$$

οπότε παραγωγίζουμε και αντικαθιστούμε στην εξίσωση.
Δεύτερος τρόπος:

$$t = \ln(2-y) - \ln(1-y)$$

οπότε παργωγίζοντας ως προς t παίρνουμε

$$1 = \frac{-y'}{2-y} - \frac{-y'}{1-y} = y'\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y}\right) = \frac{y'}{(1-y)(2-y)}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

4. Να εξετασθεί εάν η δοσμένη σχέση είναι πεπλεγμένη λύση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης.

(α') $y - \ln y = t^2 + 1, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}.$

(β') $x^2 - \sin(x+y) = 1, \qquad \frac{dy}{dx} = 2x\sec(x+y) - 1.$

(γ') $e^{xy} + y = x - 1, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy}-y}{e^{-xy}+x}.$

5. Να προσδιοριστούν όλες οι συναρτήσεις $f : [0,\, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, των οποίων η μέση τιμή σε κάθε διάστημα $[0,\, x]$, $x > 0$, είναι ίση με τον αριθμητικό μέσο των $f(0)$ και $f(x)$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Οι ζητούμενες συναρτήσεις f ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds = \frac{f(0)+f(x)}{2}.$$

Λύση

Από την υπόδειξη παραγωγίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(s)\,ds = \frac{f(0)+f(x)}{2}x \Rightarrow \left(\int_0^x f(s)\,ds\right)' &= \left(\frac{f(0)+f(x)}{2}x\right)' \\
&\Rightarrow f(x) = \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{2}(f(x)x)' \\
&\Rightarrow f(x) = \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{2}(f'(x)x + f(x)) \\
&\Rightarrow \frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2} + \frac{f'(x)x}{2} \\
&\Rightarrow f'(x)x - f(x) = -f(0) \\
&\Rightarrow \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = -\frac{f(0)}{x^2} \\
&\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = -\frac{f(0)}{x^2} \\
&\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(0)}{x} + c \\
&\Rightarrow f(x) = f(0) + cx,
\end{aligned}$$

όπου το c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

6. Έχει παρατηρηθεί ότι αν ο πληθυσμός ελαφιών σε μια περιοχή πέσει κάτω από ένα ορισμένο επίπεδο m το είδος απειλείται με εξαφάνιση, ενώ αν υπερβεί μια ορισμένη οριακή τιμή M ο πληθυσμός θα ελαττωθεί ξανά προς το M εξαιτίας ασθενιών και κακής διατροφής.

(α') Εξετάστε αν το μοντέλο εξέλιξης του πληθυσμού

$$\frac{dP}{dt} = rP(M-P)(P-m),$$

όπου r είναι μια θετική σταθερά αναλογίας, περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού.

(β') Επιλύστε την εξίσωση και επιβεβαιώστε την ορθότητα του μοντέλου.