Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εαρινό εξάμηνο 2024

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 06: Όριο και Συνέχεια

1. (α΄) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
   (β΄) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$
   (γ΄) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$
   (δ΄) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$

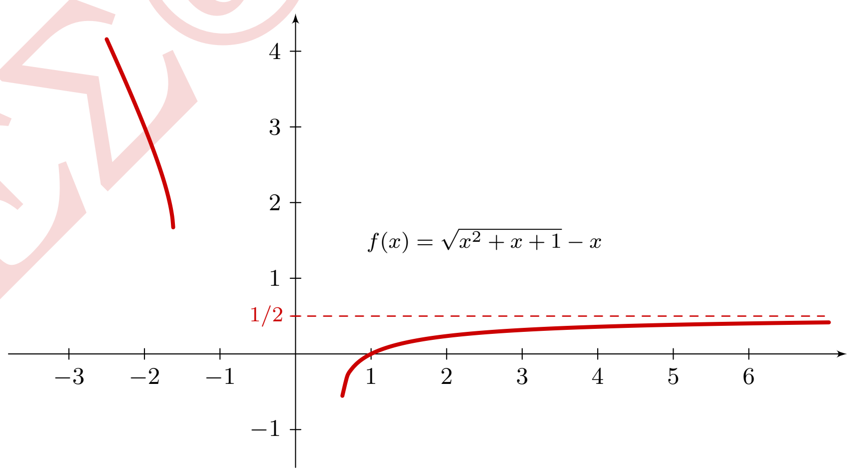
2. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-x).$$

Λύση

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x-1}-x &= \frac{(\sqrt{x^2+x-1}-x)(\sqrt{x^2+x-1}+x)}{\sqrt{x^2+x-1}+x}\\
&= \frac{x^2+x-1-x^2}{\sqrt{x^2+x-1}+x} \qquad \text{(διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με } x\text{)}\\
&= \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}\\
&\to \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

καθώς $x\to\infty$. Το αποτέλεσμα φαίνεται και στη γραφική παράσταση της $f(x)=\sqrt{x^2+x-1}$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;



3. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n+a}{x^m+b},$$

όπου n και m είναι φυσικοί αριθμοί και a και b πραγματικοί.

4. Αποδείξτε τον ισχυρισμό ή δώστε αντιπαράδειγμα

   (α') Εάν το όριο $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ υπάρχει τότε τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν.

   (β') Εάν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ υπάρχουν τότε το όριο $\lim_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχει.

5. Επάνω στον χάρτη της Ελλάδας ζωγραφήστε ένα κύκλο ο οποίος περιέχεται στην επικράτεια. Δείξτε ότι σε κάθε χρονική στιγμή υπάρχουν δύο διαμετρικά αντίθετες τοποθεσίες οι οποίες έχουν ίδια θερμοκρασία. **Υπόδειξη:** Αν R είναι η ακτίνα της περιφέρειας και $T(\theta)$ είναι η θερμοκρασία τη χρονική στιγμή t της τοποθεσίας $(R\cos\theta, R\sin\theta)$ επάνω στην περιφέρεια, όπου $0 \le \theta \le 2\pi$, θεωρήστε τη συνάρτηση $f(\theta) = T(\theta) - T(\theta+\pi)$.

   Λύση

   Η θερμοκρασία T είναι συνεχής συνάρτηση της θέσης, κοντινά σημεία έχουν κοντινές θερμοκρασίες, συνεπώς η συνάρτηση $f(\theta) = T(\theta) - T(\theta+\pi)$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Παρατηρούμε ότι

$$f(0) = T(0) - T(\pi) \qquad \text{και} \qquad f(\pi) = T(\pi) - T(2\pi) = T(\pi) - T(0)$$

   επομένως

$$f(0)f(\pi) = -[T(0) - T(\pi)]^2.$$

   (α') Αν $T(0) = T(\pi)$, τότε τα σημεία $(R,0)$ και $(-R,0)$ στην περιφέρεια έχουν την ίδια θερμοκρασία.

   (β') Αν $T(0) \neq T(\pi)$, τότε $f(0)f(\pi) < 0$, οπότε από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει θ_0 μεταξύ 0 και π, ώστε $f(\theta_0) = 0$, ισοδύναμα $T(\theta_0) = T(\theta_0+\pi)$, δηλαδή τα αντιδιαμετρικά σημεία $(R\cos\theta_0, R\sin\theta_0)$ και $(R\cos(\theta_0+\pi), R\sin(\theta_0+\pi)) = (-R\cos\theta_0, -R\sin\theta_0)$ στην περιφέρεια έχουν την ίδια θερμοκρασία.

6. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και τέτοια ώστε $f(0) = f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο x στο $[0,1]$ ώστε $f(x) = f(x+1/2)$. **Υπόδειξη:** Θεωρήστε την $g(x) = f(x) - f(x+1/2)$.

7. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^{-x^2} = x$ έχει μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.