Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εαρινό εξάμηνο 2024

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 05: Συναρτήσεις

1. Να υπολογισθούν οι ποσότητες

   (α΄) $\cos^{-1}(1/2)$.

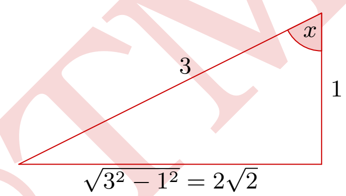
   (β΄) $\tan(\arccos(1/3))$.

Λύση

(α΄) Το $\cos^{-1}(1/2)$ είναι το τόξο στο $[0,\pi]$, όπου η $y = \cos x$ είναι ένα-προς-ένα, του οποίου το συνημίτονο είναι $1/2$, άρα

$$\cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \qquad \text{αφού} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

(β΄) Όμοια το $\arccos(1/3)$ είναι το τόξο x στο διάστημα $[0,\pi]$ του οποίου το συνημίτονο είναι $1/3$, άρα $0 < x < \pi/2$. Έτσι κατασκευάζοντας το ορθογώνιο τρίγωνο με μία κάθετη πλευρά 1 και υποτείνουσα 3 (πώς;), βλέπε Σχήμα, υπολογίζουμε



$$\tan\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \tan x = 2\sqrt{2}.$$

2. Δείξτε ότι

   (α΄) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

   (β΄) $\cos^{-1}(-x) + \cos^{-1}x = \pi$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

   (γ΄) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$, για κάθε $x \in (-\infty,\infty)$.

   (δ΄) $\cot^{-1}(-x) + \cot^{-1}x = \pi$, για κάθε $x \in (-\infty,\infty)$.

Λύση

(β΄) Αν $\theta = \cos^{-1}x$ (στο $[0,\pi]$ η $\cos$ είναι ένα-προς-ένα), τότε $0 \le \theta \le \pi$ και $\cos\theta = x$, επομένως

$$-x = -\cos\theta = \cos(\pi-\theta)$$

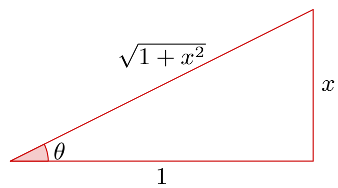
και $\pi - \theta \in [0,\pi]$ συνεπώς

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1}x \Rightarrow \cos^{-1}x + \cos^{-1}(-x) = \pi.$$

3. Να απλοποιηθεί η έκφραση $\cos(\tan^{-1} x)$.

Λύση

(α') Έστω $x > 0$, τότε $\tan^{-1} x = \theta$, με $0 < \theta < \pi/2$ και $\tan\theta = x$. Αποτυπώνοντας αυτή την πληροφορία στο σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο προκύπτει το σχήμα που ακολουθεί στο οποίο γνωρίζουμε τα μήκη όλων των πλευρών.



Έτσι υπολογίζουμε
$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(β') Αν $x = 0$, τότε $\tan^{-1} 0 = 0$, οπότε $\cos(\tan^{-1} x) = \cos 0 = 1$, αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει από την προηγούμενη σχέση, με $x = 0$.

(γ') Αν $x < 0$, επειδή η $\tan^{-1}$ είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε $\tan^{-1} x = -\tan^{-1}(-x)$, με $-x > 0$, οπότε από το (α') βρίσκουμε
$$\begin{aligned}\cos(\tan^{-1} x) = \cos(-\tan^{-1}(-x)) &= \cos(\tan^{-1}(-x))\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
$$\cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. Αποδείξτε τις ταυτότητες

(α') $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

(β') $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. Δείξτε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει
$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

6. Για $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ και $y > 0$, αποδείξτε τις ιδιότητες

(α') $\log_a 1 = 0$

(β') $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(γ') $\log_a x^r = r\log_a x$, $r \in \mathbb{R}$.

(δ') $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.