Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εαρινό εξάμηνο 2024

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 03: Ακολουθίες

1. Έστω ότι η ακολουθία a_n, $n = 1, 2, 3, \dots$ είναι φραγμένη. Να δειχθεί ότι

   (α΄) Η ακολουθία a_n/n συγκλίνει στο μηδέν.

   (β΄) Εάν η ακολουθία b_n, $n = 1, 2, 3, \dots$ συγκλίνει στο μηδέν, τότε η $a_n b_n$ συγκλίνει στο μηδέν.

2. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, με $0 < a < 1$ συγκλίνει και να βρεθεί το όριο. **Υπόδειξη**: $a = 1/(1 + \delta)$, όπου $\delta > 0$.

   Λύση

   Από την ανισότητα του Bernoulli ($(1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta$, με $\delta > -1$) υπολογίζουμε

   $$0 < a_n = a^n = \frac{1}{(1+\delta)^n} \leq \frac{1}{1+n\delta} < \frac{1/\delta}{n} \to 0$$

   κατά συνέπεια $a_n \to 0$.

3. Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες και στην περίπτωση σύγκλισης να βρεθεί το όριο

   (α΄) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

   (β΄) $a_n = \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}}$

   (γ΄) $a_n = \dfrac{n^{\sqrt{2}}}{\sqrt{n}}$

   (δ΄) $a_n = \dfrac{n^e}{e^n}$

   (ε΄) $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$

   (ϛ΄) $a_n = \dfrac{2^n + 1}{3^n - 1}$

   Λύση

   (α΄)

   $$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}} \to \frac{0}{1+0} = 0$$

   (β΄)

   $$a_n \to 1.$$

   (γ΄)

   $$a_n = \frac{n^{\sqrt{2}}}{n^{1/2}} = n^{\sqrt{2}-1/2}.$$

   Επειδή $\sqrt{2} - 1/2 > 0$ η ακολουθία είναι αύξουσα και μη φραγμένη, έπομένως αποκλίνει στο $+\infty$.

   (δ΄)

   $$a_n \to 0.$$

   Βλέπε Άσκηση 9 με $p = r = e$.

(ε')

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = \frac{\dfrac{2^n}{2^n} - \dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{2^n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}} \to \frac{1-0}{1+0} = 1$$

(ϛ')

$$a_n = \frac{2^n - 1}{3^n + 1} = \frac{\dfrac{2^n}{3^n} - \dfrac{1}{3^n}}{\dfrac{3^n}{3^n} + \dfrac{1}{3^n}} = \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{3^n}}{1 + \dfrac{1}{3^n}} \to \frac{0+0}{1+0} = 0$$

4. ♣ Θυμίζουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}, \qquad a \neq 1.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. **Υπόδειξη**: Θεωρήστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $|a| < 1$, $|a| = 1$, $|a| > 1$.

5. ♣ Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $a > 0$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Λύση

Θεωρούμε τις περιπτώσεις $a = 1$, $a > 1$, και $a < 1$.

(i) $a = 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(ii) $a > 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \sqrt[n]{a} = 1 + r_n, \quad r_n > 0.$$

Υψώνοντας αρχικά στη n–οστη δύναμη και κάνοντας χρήση της ανισότητας του Bernoulli υπολογίζουμε

$$a = (1 + r_n)^n \geq 1 + nr_n > nr_n \Rightarrow 0 < r_n < \frac{a}{n}$$

απ' όπου έπεται ότι $r_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Έτσι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1 + r_n) = 1.$$

(iii) $a < 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{1} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + s_n}, \quad s_n > 0.$$

Όπως στη προηγούμενη περίπτωση υπολογίζουμε

$$a = \frac{1}{(1 + s_n)^n} \leq \frac{1}{1 + ns_n} < \frac{1}{ns_n} \Rightarrow 0 < s_n < \frac{1}{a}\frac{1}{n}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $s_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$, επομένως

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + s_n} = 1.$$

6. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $0 < a \leq b$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

7. Να προσδιοριστεί η τιμή του πραγματικού αριθμού r έτσι ώστε η ακολουθία

$$a_n = \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^r}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(i) Να συγκλίνει στο μηδέν. (ii) Να συγκλίνει σε αριθμό διάφορο του μηδενός. (iii) Να αποκλίνει.

8. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία με όρους $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

9. Αν p και r είναι πραγματικοί αριθμοί με $r > 1$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{r^n} = 0.$$

Λύση

Έστω $r = 1 + \delta$ με $\delta > 0$, από το δυωνυμικό θεώρημα έχουμε

$$r^n = (1+\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\delta^k$$

και επειδή οι όροι του αθροίσματος είναι θετικοί βρίσκουμε

$$\begin{aligned} r^n &\geq \frac{n!}{k!(n-k)!}\delta^k & k = 0, 1, \ldots, n \\ &= \frac{(n-k+1)\cdots(n-1)n}{k!}\delta^k & k = 0, 1, \ldots, n \\ &> \frac{(n-k+1)^k}{k!}\delta^k & k = 0, 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{n^p}{r^n} < \frac{k!n^p}{\delta^k (n-k+1)^k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

Επιλέγουμε N μεγάλο και k ώστε

$$\frac{N}{2} + 1 \geq k > p,$$

τότε για $n \geq N$ έχουμε

$$\frac{n}{2} + 1 \geq \frac{N}{2} + 1 \geq k \Rightarrow n - k + 1 \geq \frac{n}{2}$$

επομένως από την (1) βρίσκουμε

$$\frac{n^p}{r^n} < \frac{k!}{\delta^k} \frac{n^p}{(n/2)^k} = k!\left(\frac{2}{\delta}\right)^k \frac{1}{n^{k-p}}, \qquad n \geq N. \tag{2}$$

Από την (2) έπεται το συμπέρασμα καθότι $k - p > 0$ και η ακολουθία στο δεξί μέλος τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$.

10. Να δειχθεί ότι κάθε μία από τις ακολουθίες που ορίζονται με τις σχέσεις

(α′) $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $\quad a_1 = 1$

(β′) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $\quad a_1 = 1$

είναι αύξουσα και φραγμένη. Να υπολογισθεί το όριο κάθε μίας ακολουθίας.

Λύση

Οι Ασκήσεις 10 και 11 είναι παραδείγματα αναδρομικών ακολουθιών, βλέπε Σημειώσεις σελίδες 63-64. Λύνουμε την 10 (α').

Μερικοί πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad a_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$$

επίσης από την τελευταία ανισότητα βρίσκουμε

$$a_4 = \sqrt{1+a_3} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3}.$$

• Ισχυριζόμαστε ότι $a_n \leq \sqrt{3}$, για κάθε n. Ο ισχυρισμός ισχύει για $n=1$, από τον ορισμό. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποιο τυχαίο k ισχύει $a_k \leq \sqrt{3}$, τότε από την υπόθεση της επαγωγής βρίσκουμε

$$a_{k+1} = \sqrt{1+a_k} < \sqrt{1+\sqrt{3}} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3}.$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι $a_n \leq \sqrt{3}$ για κάθε $n \geq 2$, δηλαδή η ακολουθία είναι άνω φραγμένη.

• Επειδή $a_1 < a_2 < a_3$ εξετάζουμε αν η ακολουθία είναι αύξουσα. Ισχύει ήδη ότι $a_1 < a_2$ οπότε υποθέτουμε ότι $a_k < a_{k+1}$ για κάποιο k, τότε από την υπόθεση της επαγωγής έπεται ότι

$$a_{k+1} = \sqrt{1+a_k} < \sqrt{1+a_{k+1}} = a_{k+2},$$

κατά συνέπεια $a_n < a_{n+1}$ για όλα τα n.

• Δείξαμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, κατά συνέπεια συγκλίνει. Αν α είναι το όριο της ακολουθίας, τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} = \sqrt{1+\lim_{n\to\infty} a_n}$$

ισοδύναμα

$$\alpha = \sqrt{1+\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

κατά συνέπεια, αφού $a_n > 0$, έπεται ότι

$$a_n \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{καθώς } n \to \infty.$$

11. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 3}, \quad a_1 = 5$ είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της.

12. Δείξτε ότι

$$\log n \leq n - 1$$

για κάθε θετικό ακέραιο n. Κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία με όρους $a_n = \sqrt[n]{\log n}$.

Λύση

Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή.

(i) Για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει αφού

$$\log 1 = 0 \leq 1 - 1.$$

(ii) Υποθέτουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $n = k \geq 1$, έχουμε δηλαδή ότι $\log k \leq k-1$ και αποδεικνύουμε ότι $\log(k+1) \leq (k+1)-1$. Πράγματι

$$\begin{aligned}
\log(k+1) &= \log\left(\frac{k+1}{k}k\right) \\
&= \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + \log k \qquad \text{(από τις ιδιότητες του λογαρίθμου)} \\
&\leq \log\left(1+\frac{1}{k}\right) + k - 1 \qquad \text{(από την υπόθεση της επαγωγής)} \\
&\leq \log e + k - 1 \qquad \text{(η συνάρτηση } \log \text{ είναι αύξουσα και } 1 + 1/k \leq 2 < e\text{)} \\
&= 1 + k - 1
\end{aligned}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε. Κατά συνέπεια η ανισότητα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n.

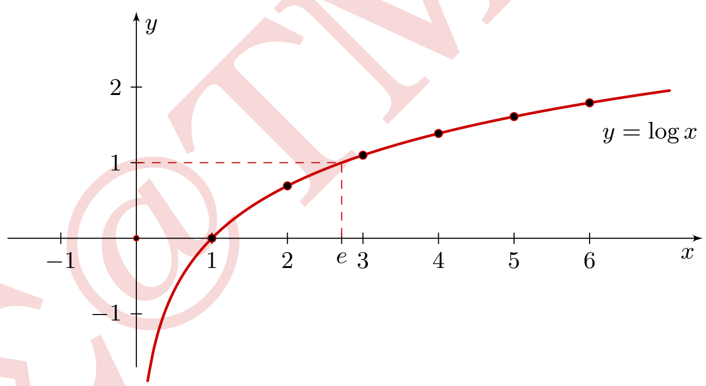
Για $n \geq 3$, έχουμε

$$1 = \log e \leq \log n \leq n - 1 < n$$

οπότε παίρνοντας τις ρίζες τάξης n βρίσκουμε

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\log n} < \sqrt[n]{n}.$$

Το δεξί μέλος της ανισότητας συγκλίνει στο 1, βλέπε διάλεξη 4 διαφάνεια 19, οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής έπεται ότι $a_n \to 1$, καθώς $n \to \infty$.



Σχήμα 1: Άσκηση 12.

13. Να βρεθεί, εφόσον υπάρχει, το όριο κάθε μιας από τις ακολουθίες

(α') $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ (γ') $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (ε') $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

(β') $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/\sqrt{n}}$ (δ') $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n^2}$ (ϛ') $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

Λύση

Η έκφραση $s_n \sim t_n$ σημαίνει ότι για μεγάλο n ο s_n είναι περίπου σαν τον t_n.

(α') $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{1/\sqrt{n}} \sim e^{1/\sqrt{n}} \to 1$

(β') $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/\sqrt{n}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/n\sqrt{n}}$

(γ') $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n \sim e^n$

(δ') $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n^2} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/n^3}$

(ε') $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$. Είναι υπακολουθία της $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, αφού $n^2 \in \mathbb{N}$, οπότε $a_n \to e$

(ϛ') $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} \sim e^{1/n} = \sqrt[n]{e} \to 1$

14. Εάν p είναι πραγματικός αριθμός να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^p}$$

για τις διάφορες τιμές του p.

Λύση

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^p} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{n^{p-1}}$$

και διακρίνουμε τις περιπτώσεις $p-1<0$, $p-1=0$, και $p-1>0$, ισοδύναμα $p<1$, $p=1$, και $p>1$, βλέπε Άσκηση 13.