Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εαρινό εξάμηνο 2024

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 02: Μιγαδικοί αριθμοί (συνέχεια), Μαθηματική Επαγωγή

1. Δείξτε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 1$ ισχύει

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}.$$

2. Να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις σχέσεις:

(α΄) $z + \overline{z} = 1$, (β΄) $z - \overline{z} = i$, (γ΄) $z + \overline{z} = |z|^2$, (δ΄) $\overline{z} = |z|$.

Λύση

(α΄) Αν $z = x + yi$, τότε

$$z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 1,$$

οπότε οι αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση είναι εκείνοι για τους οποίους ισχύει $x = \operatorname{Re} z = 1/2$, κατά συνέπεια δοσμένη σχέση περιγράφει την ευθεία $x = 1/2$.

(β΄) Όμοια

$$z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi = i,$$

οπότε οι αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση είναι εκείνοι για τους οποίους ισχύει $y = \operatorname{Im} z = 1/2$, κατά συνέπεια η δοσμένη σχέση περιγράφει την ευθεία $y = 1/2$.

(γ΄) Αν $z = x + yi$, τότε $z + \overline{z} = |z|^2$,

$$\begin{aligned} z + \overline{z} = |z|^2 \Leftrightarrow 2x = x^2 + y^2 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1, \end{aligned}$$

κατά συνέπεια η δοσμένη σχέση περιγράφει την περιφέρεια κέντρου $(1, 0)$ και ακτίνας 1.

(δ΄) Αν $z = x + yi$, τότε

$$\overline{z} = |z| \Leftrightarrow x - yi = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{και} \quad x = \sqrt{x^2} = |x|$$

κατά συνέπεια η σχέση περιγράφει την ημιευθεία των μη αρνητικών αριθμών.

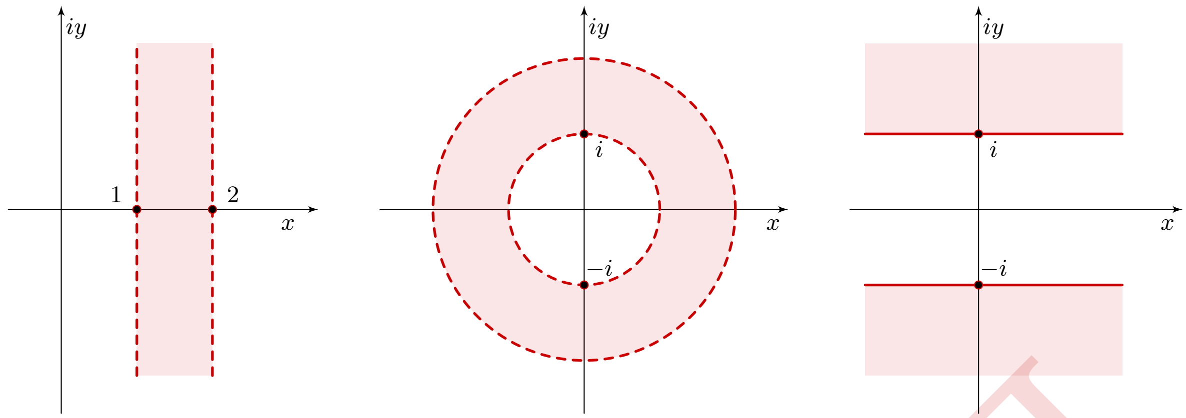
3. Να περιγραφούν γεωμετρικά οι σχέσεις:

(α΄) $1 < \operatorname{Re} z < 2$, (γ΄) $|\operatorname{Im} z| \geq 1$, (ε΄) $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$,
(β΄) $1 < |z| < 2$, (δ΄) $|z| = \operatorname{Im} z + 1$, (ϛ΄) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1$.

Λύση

Έστω $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$.

(α΄) $1 < \operatorname{Re} z < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 2$, είναι η λωρίδα αυστηρά μεταξύ των ευθειών $x = 1$ και $x = 2$.



Σχήμα 1: Άσκηση 3. (α'), (β'), (γ')

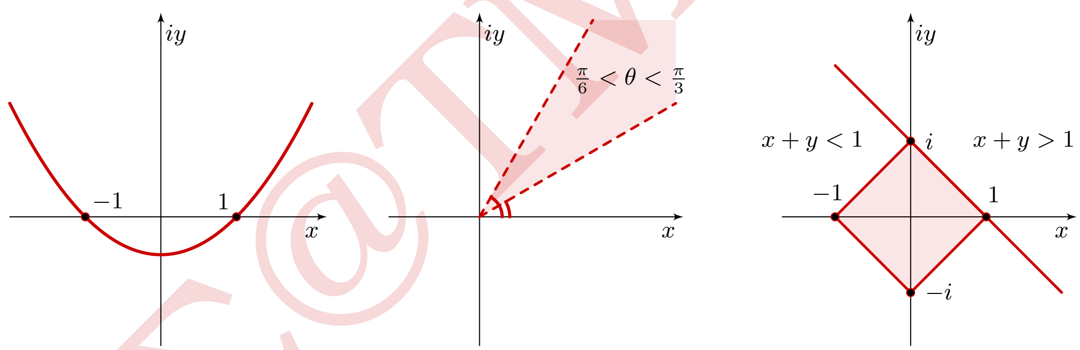
(β') $1 < |z| < 2 \Leftrightarrow 1 < r < 2$, είναι ο δακτύλιος αυστηρά μεταξύ των περιφερειών $r = 1$ και $r = 2$.

(γ') $|\operatorname{Im} z| \geq 1 \Leftrightarrow |y| \geq 1 \Leftrightarrow y \leq -1 \quad$ ή $\quad y \geq 1$, είναι το σύνολο $\mathbb{R} \times [1, +\infty) \cup \mathbb{R} \times (-\infty, -1]$.

(δ') $|z| = \operatorname{Im} z + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = y + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow y = (x^2 - 1)/2$, παραβολή.

(ε') $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$, το "εσωτερικό" γωνίας.

(ϛ') $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1 \Leftrightarrow |x| + |y| = 1$. Οι ευθείες $x + y = 1$, $-x + y = 1$, $-x - y = 1$ και $x - y = 1$ σχηματίζουν το τετράγωνο στο σχήμα και χωρίζουν το επίπεδο σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα. Ο $z = 0$ ικανοποιεί την ανισότητα, κατά συνέπεια το ζητούμενο σύνολο είναι το τετράγωνο μαζί με το σύνορο αφού επιτρέπεται η ισότητα.



Σχήμα 2: Άσκηση 3. (δ'), (ε'), (στ')

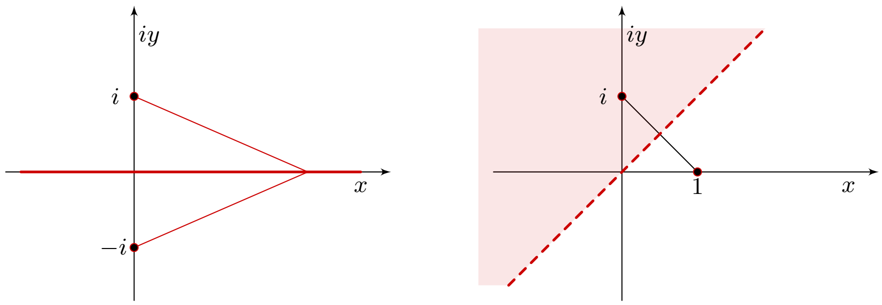
4. Να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που είναι τέτοιοι ώστε

(α') $|z - i| = |z + i|$, (β') $|z - i| < |z - 1|$, (γ') $|z - 4| \geq |z|$.

Λύση

(α') Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι αυτοί που έχουν ίσες αποστάσεις από τους i και $-i$, είναι δηλαδή τα σημεία της μεσοκαθέτου του τμήματος με άκρα τα i και i. Αυτή είναι η πραγματική ευθεία, άρα $z = x \in \mathbb{R}$. Διαφορετικά, αν $z = x + iy$, τότε

$$\begin{aligned} |z - i|^2 = |z + i|^2 &\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = x^2 + (y + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow 2y = 0 \end{aligned}$$



Σχήμα 3: Άσκηση 4. (α'), (β')

επομένως $z = x \in \mathbb{R}$.

(β') Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι αυτοί που έχουν απόσταση από το i μικρότερη εκείνης από το 1. Η μεσοκάθετος στο τμήμα με άκρα τα i και 1 χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα, κατά συνέπεια οι ζητούμενοι αριθμοί είναι τα σημεία εκείνου του "ανοικτού" (δεν περιλαμβάνει το σύνορο-μεσοκάθετο) ημιεπιπέδου που περιέχει το i.

(γ') Παρόμοια με το (β'), εδώ το ημιεπίπεδο περιλαμβάνει το σύνορο-μεσοκάθετο γιατί επιτρέπεται η ισότητα.

5. Εάν $z_0 \neq z_1$ είναι μιγαδικοί αριθμοί να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z που ικανοποιούν τις σχέσεις

(α') $\operatorname{Im}\left[\dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right] = 0$

(β') $\operatorname{Im}\left[\dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right] > 0.$

Λύση

(α') Αν ο μιγαδικός αριθμός z ικανοποιεί τη δοσμένη σχέση, τότε

$$\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} = t,$$

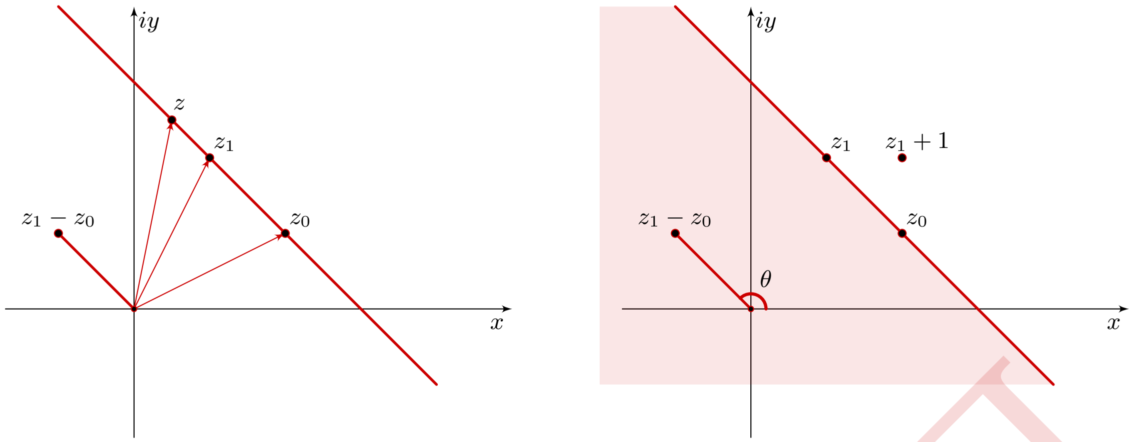
όπου t είναι πραγματικός αριθμός, επομένως

$$z - z_0 = (z_1 - z_0)t \Rightarrow z = (z_1 - z_0)t + z_0.$$

Έτσι (σκέφτομαι γραμμοαλγεβρικά) η δοσμένη σχέση περιγράφει την ευθεία που περιέχει τον αριθμό-σημείο z_0 και είναι παράλληλη στο "διάνυσμα" $z_1 - z_0$.

(β') Η σχέση με ισότητα στο (α') περιγράφει την ευθεία, ενώ η ανισότητα περιγράφει το ένα από τα δύο ημιεπίπεδα με σύνορο την ευθεία. Επιλέγοντας ένα σημείο εκτός της ευθείας το αντικαθιστούμε στη σχέση. Αν την ικανοποιεί τότε το ημιεπίπεδο που ζητάμε είναι αυτό που περιέχει το σημείο, ενώ αν δεν την ικανοποιεί το ημιεπίπεδο που ζητάμε είναι αυτό που δεν περιέχει το σημείο. Έστω ότι οι αριθμοί z_0 και z_1 είναι όπως στο σχήμα. Επιλέγουμε το σημείο $z = z_1 + 1$ που βρίσκεται στα δεξιά του z_1 και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left[\frac{z_1 + 1 - z_0}{z_1 - z_0}\right] = \operatorname{Im}\left[\frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0} + \frac{1}{z_1 - z_0}\right] = \operatorname{Im}\left[1 + \frac{1}{z_1 - z_0}\right] &= \operatorname{Im} 1 + \operatorname{Im}\left[\frac{1}{z_1 - z_0}\right] \\ &= \operatorname{Im}[(z_1 - z_0)^{-1}]\end{aligned}$$



Σχήμα 4: Άσκηση 5. (α'), (β')

Αν $z_1 - z_0 = re^{i\theta}$, με $0 < \theta < \pi$, από την τελευταία σχέση έχουμε

$$\operatorname{Im}\left[\frac{z_1 + 1 - z_0}{z_1 - z_0}\right] = \operatorname{Im}\left[\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right] = -\frac{1}{r}\sin\theta < 0$$

αφού $\sin\theta > 0$ από την υπόθεση. Κατά συνέπεια το ζητούμενο ημιεπίδεδο είναι το σκιασμένο στο σχήμα, εκείνο δηλαδή που δεν περιέχει το $z_1 + 1$.

6. Να βρεθούν οι έκτες ρίζες του $w = 1+i$, δηλαδή οι z ώστε $z^6 = 1+i$, ισοδύναμα οι λύσεις της εξίσωσης $z^6 - (1+i) = 0$.

7. Να βρεθεί η εκθετική μορφή καθενός από τους αριθμούς

(α') $z = 3$ (β') $z = 2 + 2i$ (γ') $z = \pi i$ (δ') $z = -1 - i\sqrt{3}$

8. Δείξτε ότι $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Λύση

Αν $z = x + iy$, τότε $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, επομένως

$$\begin{aligned}\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} &= e^x\overline{\cos y + i\sin y} \\ &= e^x(\cos y - i\sin y) \\ &= e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) \\ &= e^{x-iy} \\ &= e^{\overline{z}}\end{aligned}$$

9. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $\sin z = 1$.

Λύση

Από τον ορισμό έχουμε ότι για $z = x + iy$ είναι

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} \\ &= \frac{(e^{-y} - e^{y})\cos x}{2i} + \frac{i(e^{-y} + e^{y})\sin x}{2i} \\ &= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x \qquad \left(\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i\right) \end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\sin z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (e^{y} + e^{-y})\sin x = 2 \\ (e^{y} - e^{-y})\cos x = 0 \end{cases}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$e^{y} = e^{-y} \Leftrightarrow y = 0 \qquad \text{ή} \qquad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

και από την πρώτη είτε για $y = 0$, είτε για $x = 2k\pi \pm \pi/2$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως οι λύσεις της $\sin z = 1$ είναι οι $z = x = 2k\pi + \pi/2$ όπως ακριβώς στους πραγματικούς αριθμούς, δεν υπάρχουν δηλαδή νέες μιγαδικές λύσεις της εξίσωσης.

10. **Η ανισότητα του Bernoulli.** Εάν $a \geq -1$ να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Βλέπε Σημειώσεις σελίδες 17-18.

11. **Το Δυωνυμικό Θεώρημα.** Εάν a και b είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί τότε

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Βλέπε Σημειώσεις σελίδα 21.

12. Με χρήση της μαθηματικής επαγωγής να δειχθεί ότι εάν $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί τότε

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.