ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

12η Διάλεξη

Το ολοκλήρωμα ΙΙΙ

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

23 Απριλίου 2024

Ορισμός

Θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει απολύτως** αν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει. Εάν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ αποκλίνει θα λέμε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει υπό συνθήκη**.

Θεώρημα

Εάν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, δηλαδή εάν ένα ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

συγκλίνει.

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, κατά συνέπεια για κάθε $a > 0$ το ολοκλήρωμα $\int_0^a f(x)\,dx$ υπάρχει. Έτσι γράφοντας

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{2\pi}^t \frac{\sin x}{x}\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\cos x}{x}\Big]_{2\pi}^t - \int_{2\pi}^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{1}{2\pi} - \frac{\cos t}{t} - \int_{2\pi}^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{1}{2\pi} - \lim_{t\to+\infty} \int_{2\pi}^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \qquad (1)$$

Επειδή

$$0 \leq \int_{2\pi}^{t} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_{2\pi}^{t} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big]_{2\pi}^{t} = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2\pi}$$

έπεται ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως, κατά συνέπεια από το Θεώρημα 2 έπεται ότι το

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{2\pi}^{t} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

υπάρχει, επομένως από την (1) συνεπάγεται το ζητούμενο.

Άσκηση (Η συνάρτηση Γάμμα)

Για $s > 0$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt.$$

(α') Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $s > 0$.
Υπόδειξη: αν $s \geq 1$ τότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p}\, dt, \qquad p = s - 1 \geq 0$$

αν $0 < s < 1$ τότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{t^{p}}\, dt, \qquad p = 1 - s > 0.$$

(β') Δείξτε ότι $\Gamma(n) = (n+1)!$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$

Μετασχηματισμός Laplace

Αν η f είναι μια ``καλή'' συνάρτηση ορισμένη στο $[0,+\infty)$, και $s \in \mathbb{R}$ είναι μια παράμετρος η σχέση

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$

ορίζει μια συνάρτηση του s, για όλες τις τιμές του s για τις οποίες το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Η $F(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)$, λέγεται **μετασχηματισμός Laplace** της f.

Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x) = \sin ax$, $x \geq 0$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\mathscr{L}\{\sin ax\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin ax\,dx = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$$

Για $L > 0$ και $s \neq 0$ υπολογίζουμε

$$\int_0^L e^{-sx} \sin ax\,dx = \int_0^L \left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right)' \sin ax\,dx = -\frac{e^{-sx}\sin ax}{s}\Bigg]_0^L + \frac{a}{s}\int_0^L e^{-sx}\cos ax\,dx$$

$$= -\frac{e^{-sx}\sin ax}{s}\Bigg]_0^L - a\frac{e^{-sx}\cos ax}{s^2}\Bigg]_0^L - \frac{a^2}{s^2}\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx$$

οπότε

$$\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx = -\frac{e^{-sx}\sin ax}{s}\Big]_0^L - a\frac{e^{-sx}\cos ax}{s^2}\Big]_0^L$$
$$= -\frac{e^{-sL}\sin aL}{s} - a\frac{e^{-sL}\cos aL}{s^2} + \frac{a}{s^2},$$

επομένως

$$\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx = \frac{a}{s^2+a^2} - \left[\frac{s\sin aL}{s^2+a^2} + \frac{a\cos aL}{s^2+a^2}\right]\frac{1}{e^{sL}}.$$

Για $s>0$ παίρνοντας το όριο $L\to+\infty$ προκύπτει, τελικά, ότι

$$\mathscr{L}\{\sin ax\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin ax\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx = \frac{a}{s^2+a^2},$$

αφού

$$\left|\frac{s\sin aL}{s^2+a^2} + \frac{a\cos aL}{s^2+a^2}\right|\frac{1}{e^{sL}} \le \frac{s+|a|}{s^2+a^2}\frac{1}{e^{sL}} \to 0,$$

καθώς $L\to+\infty$. Για $s\le 0$ το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

Άσκηση

Δείξτε ότι

- (α΄) $\mathscr{L}\{a\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} a \, dx = \frac{a}{s}, \quad s > 0.$
- (β΄) $\mathscr{L}\{e^{ax}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{ax} \, dx = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$
- (γ΄) $\mathscr{L}\{x\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x \, dx = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$
- (δ΄) $\mathscr{L}\{x^n\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n \, dx = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$
- (ε΄) $\mathscr{L}\{\cos ax\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos ax \, dx = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$

Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ και $f(x) \geq 0$ στο ίδιο διάστημα, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ δίνει το εμβαδόν της περιοχής ή χωρίου R του επιπέδου μεταξύ του γραφήματος της f και του x-άξονα και των ευθειών $x = a$ και $x = b$. Έτσι αν $a \leq x \leq b$ το

$$dA = f(x)\,dx$$

εκφράζει το εμβαδό του ``στοιχειώδους παραλληλογράμμου΄΄ στο x βάσης dx και ύψους $f(x)$.

Στη συνέχεια συζητάμε τις εξής εφαρμογές του ολοκληρώματος

1. Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων.
2. Όγκος στερεού εκ περιστροφής.
3. Η αρχή του Cavalieri.
4. Μήκος καμπύλης.

Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων

Αν οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$ και R είναι το χωρίο μεταξύ των γραφημάτων των f και g και των ευθειών $x=a$ και $x=b$, το R αποτελείται από ``στοιχειώδη παραλληλόγραμμα''. Το εμβαδόν κάθε τέτοιου στο $x \in [a,b]$ είναι

$$dA = [\max\{f(x),g(x)\} - \min\{f(x),g(x)\}]\,dx = |f(x)-g(x)|\,dx,$$

έτσι το εμβαδόν $A(R)$ του χωρίου R είναι

$$A(R) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx. \tag{2}$$

Η αυστηρή απόδειξη του (2) γίνεται με χρήση των αθροισμάτων Riemann.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του γραφήματος της $y = \sin x$ του x-άξονα και των ευθειών $x = 0$ και $x = 2\pi$.

Εδώ είναι $g(x) = 0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$A(R) = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\, dx = -\cos x \Big]_0^{\pi} + \cos x \Big]_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

´Ογκος στερεού εκ περιστροφής

Αν το χωρίο R του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ μεταξύ του γραφήματος της f, του x-άξονα και των ευθειών $x = a$ και $x = b$ περιστραφεί γύρω από τον x-άξονα ή τον y-άξονα παράγεται ένα στερεό, το **στερεό εκ περιστροφής**. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τον όγκο V του στερεού αυτού.

- Περιστροφη γυρω απο τον x-αξονα.
  Αν $x \in [a, b]$ το ``στοιχειώδες'' παραλληλόγραμμο στο $x$ καθώς κάνει μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον $x$-άξονα παράγει ένα ``στοιχειώδη'' κυκλικό στερεό κύλινδρο με εμβαδό βάσης $\pi[f(x)]^2$ και ύψος dx, έτσι ο όγκος του ``στοιχειώδους'' κυλίνδρου στο x είναι $dV = \pi[f(x)]^2\,dx$, κατά συνέπεια ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής, όπως στη περίπτωση του εμβαδού, είναι
  $$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx. \tag{3}$$

Η αυστηρή απόδειξη των όσων αναφέραμε γίνεται με χρήση αθροισμάτων Riemann.

- Περιστροφη γυρω απο τον y-αξονα.
  Αν $x \in [a, b]$ το ``στοιχειώδες΄΄ παραλληλόγραμμο στο $x$ καθώς κάνει μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον $y$-άξονα παράγει ένα ``στοιχειώδη΄΄ φλοιό κυκλικού κυλίνδρου με μήκος $2\pi x$, ύψος $f(x)$ και πάχος dx, έτσι ο όγκος του ``στοιχειώδους΄΄ φλοιού στο x είναι $dV = 2\pi x f(x)\, dx$, κατά συνέπεια ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής είναι

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx. \tag{4}$$

Η αυστηρή απόδειξη των όσων αναφέραμε γίνεται με χρήση αθροισμάτων Riemann.

Η αρχή του Cavalieri

Ας υποθέσουμε ότι ένα στερεό βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $x = a$ και $x = b$, με $a < b$. Αν για $x_0 \in [a, b]$ γνωρίζουμε το εμβαδόν $A(x_0)$ του χωρίου $R(x_0)$ που είναι η τομή του στερεού με το επίπεδο $x = x_0$, τότε η ποσότητα $A(x_0)\,dx$ εκφράζει τον όγκο μιας ``στοιχειώδους φέτας'' του στερεού στο $x = x_0$. Έτσι ο όγκος V του στερεού θα δίνεται από τη σχέση

$$V = \int_a^b A(x)\,dx. \tag{5}$$

Αναφέρουμε και πάλι ότι για μια αυστηρή απόδειξη της (5) ανατρέχουμε στον ορισμό του ολοκληρώματος και τα αθροίσματα Riemann. Το χωρίο $R(x_0)$, δηλαδή την τομή του στερεού με το επίπεδο $x = x_0$, θα το λέμε **διατομή** στο $x = x_0$. Έτσι, σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri στερεά ίσου ύψους και ίσων εμβαδών διατομής σε κάθε ύψος, έχουν ίσους όγκους.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό σφαίρας ακτίνας R και είναι τέτοιο ώστε οι διατομές του κατά μήκος ενός άξονα που περιέχει το κέντρο της σφαίρας είναι τετράγωνα εγγεγραμμένα στη σφαίρα.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο της σφαίρας είναι το $(0,0,0)$. Το επίπεδο κάθετο στον x-άξονα στο σημείο $x = x_0$ με $-R \leq x_0 \leq R$, τέμνει τη σφαίρα κατά μήκος ενός κύκλου με κέντρο το $(x_0, 0)$ και ακτίνα $r(x_0) = (R^2 - x_0^2)^{1/2}$. Έτσι η διατομή του στερεού στο $x = x_0$ είναι τετράγωνο με διαγώνιο $d = 2r(x_0)$, κατά συνέπεια το εμβαδόν της διατομής είναι

$$A(x_0) = 2r(x_0)r(x_0) = 2(R^2 - x_0^2),$$

οπότε ο ζητούμενος όγκος είναι

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = 2\int_{0}^{R} 2(R^2 - x^2)\,dx = 4\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = \frac{8}{3}R^3.$$

Μήκος καμπύλης

Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$ τη συνάρτηση $\gamma_f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)), \qquad a \leq x \leq b$$

τη λέμε **καμπύλη**. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [a,b]$ το $(x, f(x))$ είναι σημείο του γραφήματος G_f της f και ότι η γραφική παράσταση της f είναι η γεωμετρική εικόνα της καμπύλης γ στο επίπεδο. Για τον λόγο αυτό, παραβιάζοντας τον ορισμό, λέγοντας καμπύλη εννοούμε το γεωμετρικό αντικείμενο που είναι η γραφική παράσταση της f και αναφερόμαστε στην καμπύλη $y = f(x)$. Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι αν μπορούμε να ορίσουμε μια έννοια μήκους καμπύλης και τι είναι αυτό. Θυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει το μήκος περιφέρειας και τόξου τα οποία είναι ειδική περίπτωση καμπύλης.

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι γραμμική. Τότε η γραφική παράσταση της σχετικής καμπύλης είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα (στο επίπεδο) με άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, κατά συνέπεια το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος είναι λογικό να ορίζεται σαν το μήκος της σχετικής καμπύλης γ_f. Έτσι αν με $L(\gamma_f)$ συμβολίσουμε το μήκος της καμπύλης, τότε

$$L(\gamma_f) = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2} = (b-a)\sqrt{1+m^2},$$

αν $f(x) = mx + c$ και $b > a$.

Αν η γραφική παράσταση της f είναι μια πολυγωνική γραμμή που απαρτίζεται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ και $(x_k, f(x_k))$, με $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, τότε γενικεύοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα ορίζουμε το μήκος της πολυγωνικής καμπύλης με τη σχέση

$$L(\gamma_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Έτσι αν $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ και η f στο $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $f(x) = m_k x + c_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, τότε

$$L(\gamma_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + m_k^2}\, \Delta x_k.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος είναι συνεχής. Αν $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ τότε η πολυγωνική καμπύλη που συνδέει τα σημεία $(x_k, f(x_k))$ με $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ είναι μια ``προσέγγιση'' της γ_f, οπότε είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι

$$L(\gamma_f) \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

οπότε από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})]^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}\, \Delta x_k$$

όπου $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Η τελευταία έκφραση είναι άθροισμα Riemann για την συνεχή συνάρτηση $\sqrt{1 + (f')^2}$, κατά συνέπεια παίρνοντας το όριο του $n \to \infty$ θα είναι

$$L(\gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{6}$$