ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

11η Διάλεξη

Το ολοκλήρωμα ΙΙ

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

22 Απριλίου 2024

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παρατήρηση (ΘΘ1+ΘΘ2)

1. Αν αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, η
$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \qquad a\le x\le b$$
είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $F'(x)=f(x)$.
2. Επιπλέον
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big]_a^b = F(b)-F(a).$$
Ειδικά αν η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε
$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(t)\Big]_a^b f(b)-f(a).$$

ΕΣ/ΜΗΥΠ

Παρατήρηση

Εάν η f είναι συνεχής και οι u, v παραγωγίσιμες τότε

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Πράγματι αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ορίσουμε $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, τότε

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \int_{u(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Παραγωγίζοντας και παίρνοντας υπόψη ότι $F' = f$ έπεται το ζητούμενο.

Θεώρημα (Τύπος της αντικατάστασης)

Αν οι f και g' είναι συνεχείς, τότε

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

ΕΣΠΙΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x\,dx.$$

Από το ΘΘ2 έχουμε

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)' dx = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \sin x\,dx.$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \int_0^\pi (-\cos x)'\,dx = -\cos x\Big]_0^\pi = -(-1)-(-1) = 2.$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx.$$

Όπως πριν υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{-\cos' x}{\cos x} \, dx &= -\int_0^{\pi/4} \frac{\cos' x}{\cos x} \, dx \\
&= -\int_0^{\pi/4} \big(\log|\cos x|\big)' \, dx \\
&= -\log|\cos x| \Big]_0^{\pi/4} \\
&= -\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \log 1 \\
&= \frac{1}{2} \log 2.
\end{aligned}$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx.$$

Αν δούμε ότι

$$\sin^5 x \cos x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}\sin^6 x\right)$$

τότε από το ΘΘ2 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx &= \int_a^b \left(\frac{1}{6}\sin^6 x\right)' dx \\ &= \frac{1}{6}\sin^6 b - \frac{1}{6}\sin^6 a.\end{aligned}$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα (συνέχεια)

Διαφορετικά γράφοντας

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx = \int_a^b \sin^5 x \sin' x \, dx$$

και θέτοντας $u = \sin x$ έχουμε ότι $du = \cos x \, dx$, οπότε από τον τύπο της αντικατάστασης παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&= \int_{u(a)}^{u(b)} u^5 \, du \\
&= \int_{\sin a}^{\sin b} u^5 \, du \\
&= \int_{\sin a}^{\sin b} \left(\frac{1}{6} u^6\right)' du \\
&= \frac{1}{6} \sin^6 b - \frac{1}{6} \sin^6 a.
\end{aligned}$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Θα λέμε ότι η F είναι μια **παράγουσα** της f αν $F' = f$. Γράφοντας

$$\int f(x)\,dx$$

εννοούμε τη συλλογή όλων των παραγουσών της f. Έτσι αν $F'(x) = f(x)$, τότε

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

όπου C είναι μια σταθερά. Έτσι αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$$

Σημειώνουμε ότι αν η f είναι συνεχής η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

είναι η (μοναδική) παράγουσα της f με $F(a) = 0$.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράγουσες βασικών συναρτήσεων

1. $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, \quad r \neq -1.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C, \quad x \neq 0.$
3. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
4. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
5. $\displaystyle\int \tan x\,dx = \log|\sec x| + C.$
6. $\displaystyle\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + C.$
7. $\displaystyle\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C.$
8. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$
9. $\displaystyle\int e^x = e^x + C.$
10. $\displaystyle\int a^x = \frac{1}{\log a}a^x + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C = -\cos^{-1} x + C.$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C.$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

- **Ολοκλήρωση κατά μέρη**
  Ολοκληρώνοντας τη σχέση $(fg)' = f'g + fg'$ προκύπτει ο τύπος
  $$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$
  Θέτοντας $u = f(x)$ και $v = g(x)$ έχουμε $du = f'(x)\,dx$ και $dv = g'(x)\,dx$, οπότε ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη σε διαφορική μορφή γράφεται
  $$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int x\cos x\,dx.$$

Υπολογίζουμε
$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

- **Ανάλυση σε μερικά κλάσματα**
  Κάθε ρητή συνάρτηση, $p(x)/q(x)$ όπου ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος του βαθμού του αριθμητή, μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα απλών κλασμάτων, τόσων στο πλήθος όσο το πλήθος των παραγόντων του $q(x)$, της μορφής

$$\frac{A}{(ax+b)^n}, \qquad \text{ή} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m},$$

όπου $n, m \in \mathbb{N}$. Για παράδειγμα

$$\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{2x+5} + \frac{C}{(2x+5)^2} + \frac{D}{(2x+5)^3}$$

$$\frac{5x^2-x+2}{(x^2+2x+4)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+4)^2}$$

ΕΛΜΗΥΠ

Θεώρημα (Ανάλυση σε απλά κλάσματα)

Αν p και q είναι πολυώνυμα, ο βαθμός του p είναι μικρότερος του βαθμού του q, και το q αναλύεται σε παράγοντες ανά δύο διαφορετικούς μεταξύ τους

$$q(x) = Q(x+a_1)^{m_1}\cdots(x+a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}$$

όπου Q είναι μια σταθερά και τα τριώνυμα δεν έχουν πραγματικές ρίζες, τότε υπάρχουν σταθερές $A_1^1,\ldots A_1^{m_1}$, $A_k^1,\ldots A_k^{m_k}$, $B_1^1,\ldots B_1^{n_1}$, $B_l^1,\ldots B_l^{n_l}$, $C_1^1,\ldots C_1^{n_1}$, $C_l^1,\ldots C_l^{n_l}$ μονοσήμαντα ορισμένες, ώστε

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} =& \frac{A_1^1}{x+a_1}+\cdots+\frac{A_1^{m_1}}{(x+a_1)^{m_1}}+\cdots+\frac{A_k^1}{x+a_k}+\cdots+\frac{A_k^{m_k}}{(x+a_k)^{m_k}}\\ &+\frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_1^{n_1}x+C_1^{n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}}+\cdots\\ &+\frac{B_l^1x+C_l^1}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_l^{n_l}x+C_l^{n_l}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_l}}.\end{aligned}$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx.$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5} = \frac{A(2x+5)+B(x-3)}{(x-3)(2x+5)}$$

οπότε εξισώνοντας παίρνουμε

$$6-x = (5A-3B)+(2A+B)x \Leftrightarrow \begin{cases} 5A-3B=6 \\ 2A+B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3/11 \\ B=-17/11 \end{cases}$$

ΕΣ/ΠΜΗΥΠ

Παράδειγμα (συνέχεια)

έτσι

$$\begin{aligned}\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx &= \int \left[\frac{3/11}{x-3} - \frac{17/11}{2x+5}\right] dx \\ &= \frac{3}{11}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{17}{11}\int \frac{dx}{2x+5} \\ &= \frac{3}{11}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{17}{22}\int \frac{2\,dx}{2x+5} \\ &= \frac{3}{11}\log|x-3| - \frac{17}{22}\log|2x+5| + C.\end{aligned}$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

- **Αλλαγή μεταβλητής**
  Ο τύπος της αντικατάστασης στη περίπτωση του αόριστου ολοκληρώματος παίρνει την απλή μορφή

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \qquad t = g(x), \quad dt = g'(x)\,dx.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{x(1+\log x)^p}, \qquad x > e^{-1}, \quad p \neq 1.$$

Θέτοντας $u = 1 + \log x$, οπότε $du = (1+\log x)'\,dx = 1/x\,dx$, παίρνουμε

$$\int \frac{dx}{x(1+\log x)^p} = \int \frac{du}{u^p} = \frac{1}{1-p}u^{1-p} + C = \frac{1}{1-p}(1+\log x)^{1-p} + C.$$

ΕΣΤΙΜΗΥΠ

Παράδειγμα (Το ολοκλήρωμα της τέμνουσας)

Υπολογίζουμε το $\int \sec x \, dx$. Επειδή

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sec x &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x) = \frac{1}{\cos x}\tan x = \sec x \tan x \\
\frac{d}{dx}\tan x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int \sec x \, dx &= \int \sec x \frac{\tan x + \sec x}{\tan x + \sec x} \, dx \\
&= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \, dx \\
&= \int \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x} \, dx \\
&= \log|\sec x + \tan x| + C.
\end{aligned}$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα (τριγωνομετρική αντικατάσταση)

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Θέτουμε

$$x = 2\tan\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

οπότε

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\tan^2\theta)} = 2|\sec\theta| = 2\sec\theta \qquad \text{και} \qquad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta,$$

άρα

$$\tan\theta = \frac{x}{2} \qquad \text{και} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{2\sec\theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \log|\sec\theta + \tan\theta| + C$$
$$= \log\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C.$$

Οι εκφράσεις

$$\sqrt{a^2-x^2}, \qquad \sqrt{a^2+x^2}, \qquad \sqrt{x^2-a^2}$$

με $a>0$, μέσω των ταυτοτήτων $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ και $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ γίνονται, για κατάλληλο θ σε κάθε περίπτωση,

αν $\quad x = a\sin\theta \Leftrightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}, \quad$ τότε $\quad \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2\left(1-\sin^2\theta\right)} = a|\cos\theta|,$

αν $\quad x = a\tan\theta \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}, \quad$ τότε $\quad \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2\left(1+\tan^2\theta\right)} = a|\sec\theta|,$

αν $\quad x = a\sec\theta \Leftrightarrow \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}, \quad$ τότε $\quad \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\left(\sec^2\theta-1\right)} = a|\tan\theta|.$

ΕΣ/ΜΗΠ

Γενικευμένα ολοκληρώματα

Για τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, ή ολοκληρώματος Riemann, μιας συνάρτησης f ορισμένης στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ απαιτείται η συνάρτηση ναείναι φραγμένη στο $[a, b]$. Η έννοια του ολοκληρώματος επεκτείνεται σε περιπτώσεις όπου το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι πεπερασμένο ή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης.

Ορισμός

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

λέγεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** εάν

1. Τουλάχιστον ένα από τα άκρα ολοκλήρωσης είναι άπειρο, δηλαδή $\alpha = -\infty$, ή $\beta = +\infty$, ή $\beta = -\alpha = +\infty$.
2. Η f είναι μη φραγμένη σε ένα ή περισσότερα σημεία του διαστήματος ολοκλήρωσης.

ΕΞ/ΤΜΗΥΠ

Ορισμός (Γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου Ι)

1. Εάν για κάθε $t \geq a$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, t]$ γράφουμε
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx. \tag{1}$$
Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (1) υπάρχει σαν πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.
2. Εάν για κάθε $t \leq a$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[t, a]$ γράφουμε
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx. \tag{2}$$
Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (2) υπάρχει σαν πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Ορισμός (Γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου Ι)

Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει εάν για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ και τα δύο ολοκληρώματα $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ συγκλίνουν. Στη περίπτωση αυτή ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Εάν τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ αποκλίνει θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει.

ΕΣ/ΠΜΗΥΠ

Παράδειγμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Υπολογίζουμε

$$\int_{0}^{s} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan s - arctan 0 = \arctan s$$

έτσι

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{s\to+\infty} \arctan s = \frac{\pi}{2}$$

Από συμμετρία έχουμε επίσης

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

κατά συνέπεια

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

ΕΣΠΜΗΥΠ

Ορισμός (Γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου II)

1. Εάν για κάθε $t \in [a, b)$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, t]$, και μη φραγμένη στο b γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\,dx. \tag{3}$$

και λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (3) υπάρχει σαν πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

2. Εάν για κάθε $t \in (a, b]$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[t, b]$, και μη φραγμένη στο a γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a+} \int_t^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

και λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (4) υπάρχει σαν πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι **αποκλίνει**.

ΕΣΤΜΗΥΠ

Ορισμός (Γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου ΙΙ)

Εάν η f είναι μη φραγμένη μόνο στο στο $c \in (a, b)$ θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει εάν και τα δύο ολοκληρώματα $\int_a^c f(x)\,dx$ και $\int_c^b f(x)\,dx$ συγκλίνουν. Στη περίπτωση αυτή ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

Εάν τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα $\int_a^c f(x)\,dx$ και $\int_c^b f(x)\,dx$ αποκλίνει το $\int_a^b f(x)\,dx$ αποκλίνει. Σε περίπτωση που η f είναι μη φραγμένη σε περισσότερα από ένα σημεία ο ορισμός επεκτείνεται ανάλογα.

Την (5) μπορούμε εναλλακτικά να τη γράφουμε στη μορφή

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0+} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx.$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

συγκλίνει και υπολογίστε την τιμή του.

Η συνάρτηση $f(x) = 1/\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και μη φραγμένη κοντά στο μηδέν, άρα για $\epsilon > 0$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\epsilon, 1]$, και

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{x^{1-1/2}}{1-1/2}\Bigg]_\epsilon^1 = 2\left(1-\sqrt{\epsilon}\right).$$

Έτσι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} 2\left(1-\sqrt{\epsilon}\right) = 2.$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου p συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx.$$

και για αυτές που συγκλίνει να βρεθεί η τιμή του.

(i) Για $p = 1$ και $T > 1$ υπολογίζουμε

$$\int_1^T \frac{1}{x}\, dx = \log x \Big]_1^T = \log T$$

και

$$\lim_{T \to +\infty} \int_1^T \frac{1}{x}\, dx = \lim_{T \to +\infty} \log T = +\infty.$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα (συνέχεια)

(ii) Για $p \neq 1$ και $T > 1$ υπολογίζουμε

$$\int_1^T \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^T x^{-p}\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big]_1^T = \frac{T^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Αν $p < 1 \Leftrightarrow 1-p > 0$

$$\lim_{T\to+\infty}\int_1^T \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(T^{1-p}-1\right) = +\infty.$$

Αν $p > 1 \Leftrightarrow p-1 > 0$

$$\lim_{T\to+\infty}\int_1^T \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{T^{p-1}}\right) = \frac{1}{p-1}.$$

Επομένως

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty & p \le 1, \\ 1/(p-1) & p > 1. \end{cases}$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Θεώρημα

Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει

1. $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \geq a$.
2. *Το ολοκλήρωμα* $\int_a^b f(x)\,dx$ *υπάρχει για κάθε* $b \geq a$.

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει αν και μόνον αν υπάρχει σταθερά* $M > 0$ *ώστε*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M \qquad \text{για κάθε } b \geq a.$$

Θεώρημα (Βασικό κριτήριο σύγκρισης)

Έστω ότι για τις συναρτήσεις f και g ισχύει

1. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *για κάθε* $x \geq a$.
2. *Το ολοκλήρωμα* $\int_a^b f(x)\,dx$ *υπάρχει για κάθε* $b \geq a$.

Εάν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *συγκλίνει τότε και το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει και*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Το παρακάτω αποτέλεσμα δίνει πληροφορία για τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας κατηγορίας σειρών και προκύπτει από τη σύγκριση της σειράς με ένα σχετικό γενικευμένο ολοκλήρωμα.

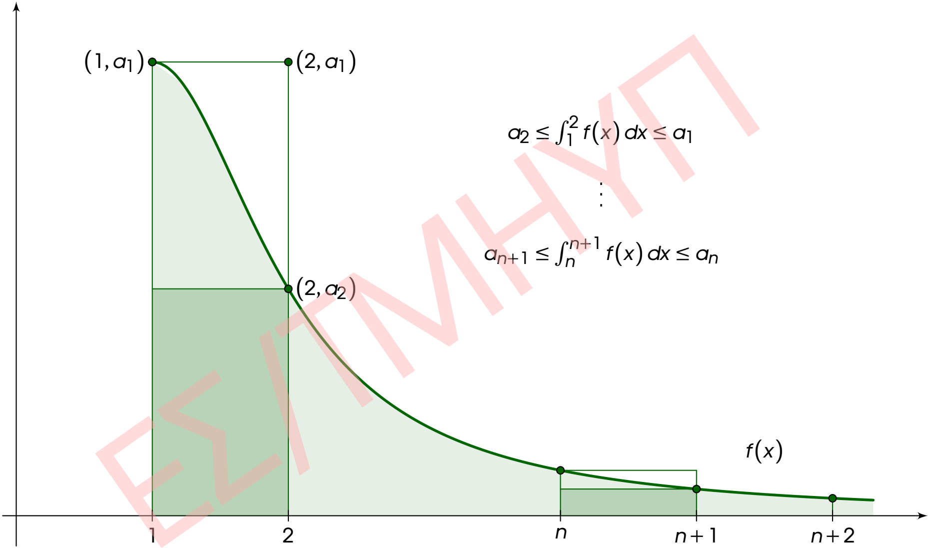
Θεώρημα (Κριτήριο ολοκληρώματος)

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής, θετική και φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, και έστω $a_n = f(n)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \tag{6}$$

Κατά συνέπεια η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνει, και αποκλίνει αν το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ



Σχήμα: Το κριτήριο του ολοκληρώματος

ΕΣΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Για $p > 0$ θεωρούμε την p-σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

Εξετάστε για ποιές τιμές του p η σειρά συγκλίνει.

Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \qquad x > 0$$

είναι συνεχής, θετική, και φθίνουσα κατά συνέπεια σύμφωνα με το Θεώρημα 26 η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

συγκλίνει. Έτσι από το Παράδειγμα 22 έπεται ότι η δοσμένη σειρά συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ