ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

8η Διάλεξη

Παράγωγοι Συναρτήσεων

Ε. Στεφανόπουλος

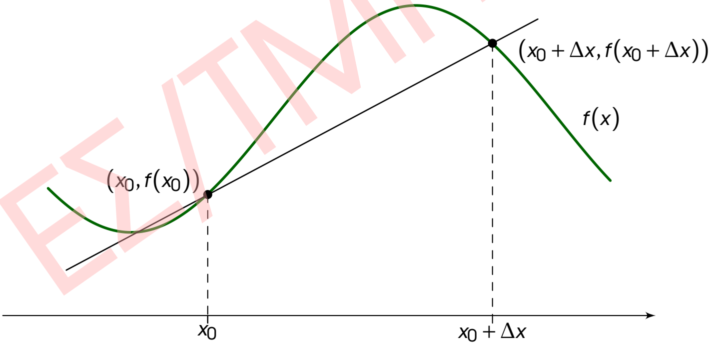
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

8 Απριλίου 2024

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$ το πηλίκο διαφορών

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

εκφράζει τη μέση μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής $y = f(x)$ προς την ανεξάρτητη x στο x_0 καθώς αυτή μεταβάλεται από x_0 σε $x_0 + \Delta x$. Γεωμετρικά το πηλίκο αυτό είναι η κλίση της ευθείας δια των $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.



Ορισμός

Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a,b) και $x_0 \in (a,b)$ θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη** στο $x = x_0$ αν το όριο

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

υπάρχει, είναι δηλαδή πραγματικός αριθμός. Το όριο $f'(x_0)$ λέγεται **παράγωγος της f στο x_0**. Εάν το όριο αυτό δεν υπάρχει ή είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$ θα λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Θεώρημα

Αν η f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a, b) και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, b)$ τότε είναι συνεχής στο x_0.

Ορισμός (Πλευρικές παράγωγοι)

Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$, η **παράγωγος από αριστερά** της f στο x_0 ορίζεται να είναι το όριο

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

εφόσον αυτό υπάρχει. Όμοια η **παράγωγος από δεξιά** της f στο x_0 ορίζεται να είναι το όριο

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

εφόσον αυτό υπάρχει.

• Σημειώνουμε ότι η παράγωγος της f στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Αν η f ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό αν είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και οι πλευρικές παράγωγοι $f'_+(a)$ και $f'_-(b)$ υπάρχουν, σαν πραγματικοί αριθμοί.

• Εάν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός διαστήματος (a,b) θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη** στο διάστημα (a,b). Στη περίπτωση αυτή η σχέση

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

παράγει μια νέα συνάρτηση την f' η οποία ορίζεται σε κάθε σημείο του (a,b) και λέγεται **παράγωγος της f στο (a,b)**.

Παράδειγμα

Να βρεθεί, αν αυτή υπάρχει, η παράγωγος της $f(x) = x^2$ στο $x = x_0$.

Η f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε διαμορφώνοντας το πηλίκο διαφορών

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{h(2x_0+h)}{h} = 2x_0+h$$

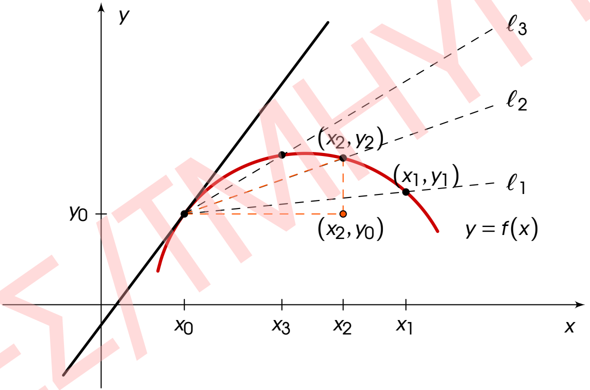
βλέπουμε ότι το όριο καθώς $h \to 0$ υπάρχει και

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0,$$

συνεπώς $f'(x_0) = 2x_0$.
Επειδή το x_0 είναι τυχαίο συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και $f'(x) = 2x$, ισοδύναμα $(x^2)' = 2x$.

Γεωμετρική σημασία της παραγώγου

Από τον ορισμό της παραγώγου έπεται ότι η παράγωγος $f'(x_0)$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ στο γράφημα της $y = f(x)$.



Σχήμα: Η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση της f στο (x_0, y_0), σαν όριο των ευθειών $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots$ με κλίσεις, αντίστοιχα, $(y_k - y_0)/(x_k - x_0)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Γεωμετρική σημασία της παραγώγου (συνέχεια)

Έτσι αν (x, y) είναι ένα σημείο της ευθείας αυτής τότε

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

κατά συνέπεια η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Φυσική σημασία της παραγώγου

Το πηλίκο διαφορών στην (1) είναι πηλίκο μεταβολών κατά συνέπεια εκφράζει το μέσο ρυθμό μεταβολής. Έτσι αν το όριο του πηλίκου καθώς $\Delta x \to 0$ υπάρχει αυτό είναι ο ρυθμός μεταβολής ως πρός x στο x_0 της ποσότητας που περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$.

Παράδειγμα

Η $f(x)=\sqrt{x}$ ορίζεται για $x \geq 0$. Εξετάζουμε κατά πόσον η f είναι παραγωγίσιμη.

Για $x>0$ και $x+h \geq 0$ υπολογίζουμε

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

έτσι

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

συνεπώς η $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $f'(x)=1/(2\sqrt{x})$. Υπολογίζουμε την δεξιά παράγωγο της f στο $x=0$, $f'_{+}(0)$. Για $h>0$

$$\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}} \Rightarrow f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty.$$

Συμπέρασμα: η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο $(0,0)$ είναι κάθετη στον x-άξονα, είναι δηλαδή ο y-άξονας.

Παράδειγμα

Δείχνουμε ότι η $f(x) = \sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = \cos x$.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Τα όρια στο δεξί μέλος, καθώς $h \to 0$, υπάρχουν, Διάλεξη 7 διαφάνειες-σελίδες 9 και 10, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως υπάρχει και αυτό στο αριστερό μέλος, κατά συνέπεια η $\sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}
\sin' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \sin x \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Δείχνουμε ότι η $f(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για x και h στο $\mathbb{R}$, διαμορφώνοντας το πηλίκο διαφορών

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

συμπεραίνουμε, βλέπε Διάλεξη 7 διαφάνεια-σελίδα 26, ότι το όριο του πηλίκου διαφορών καθώς $h \to 0$ υπάρχει και

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x 1 \\ &= e^x,\end{aligned}$$

κατά συνέπεια $(e^x)' = e^x$.

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Ένας άλλος συμβολισμός για την παράγωγο, ο οποίος υπαγορεύεται από την (1), είναι

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Το σύμβολο αυτό για την παράγωγο εισήγαγε ο Leibniz. Αν $y = f(x)$ γράφουμε επίσης

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x).$$

- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 ή σε κάποιο διάστημα και η f' είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή σε κάποιο διάστημα την $(f')'(x_0)$, ή $(f')'$ λέμε **δεύτερη παράγωγο** της f και τη συμβολίζουμε, απλούστερα, με f''. Όμοια, εφόσον αυτή υπάρχει, η $f''' = (f'')'$ είναι η **τρίτη παράγωγος** της f. Γενικότερα η $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$ είναι η ***k*-τάξης παράγωγος** της f. Ορίζουμε $f^{(0)} = f$. Με τον συμβολισμό του Leibniz γράφουμε για τις $f', f'', f''', \ldots$

$$\frac{df}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{df^2}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f}{dx^3}, \qquad \ldots$$

Θεώρημα

Εάν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε εκεί που και οι δύο παράγωγοι υπάρχουν

1. $(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$*, για κάθε* λ *και* μ *στο* $\mathbb{R}$.
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$*, εκεί όπου* $g(x) \neq 0$.

Θεώρημα (Κανόνας της αλυσίδας)

Εάν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και η $f \circ g$ ορίζεται τότε

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Θέτοντας $y = (f \circ g)(x)$ και $u = g(x)$ ο κανόνας της παραγώγου αποδίδεται ως

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Θεώρημα

Εάν οι f είναι παραγωγίσιμη και η f^{-1} υπάρχει τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

εκεί όπου $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Παράδειγμα

Για $x > 0$, από το παραπάνω θεώρημα έχουμε

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

1. $\dfrac{d}{dx}c = 0, \qquad c = \text{σταθερά}.$
2. $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$
3. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x.$
4. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$
5. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x.$
6. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x.$
7. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x.$
8. $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}.$
9. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \log a, \qquad a > 0, \quad a \neq 1.$
10. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\log a} = \dfrac{1}{x}\log_a e.$
11. $\dfrac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}, \qquad r \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$
12. $\dfrac{d}{dx}x^x = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$
13. $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
15. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} x = \dfrac{1}{1+x^2}.$
16. $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Παράδειγμα

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \log|x|$, $x \neq 0$. Δείχνουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Πράγματι αν $x > 0$, τότε $f(x) = \log x$ και $f'(x) = 1/x$.
Αν $x < 0$, τότε $f(x) = \log(-x)$ οπότε η f σαν σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$, επιπλέον από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$f'(x) = \left(\log'(-x)\right)(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Παράδειγμα

Δείχνουμε ότι

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

Η $y = \sin^{-1}x$ ορίζεται για $-1 \leq x \leq 1$ και είναι $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Από τον κανόνα της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1}x)} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}$$

που ορίζεται για $\sin^{-1}x \neq \pm\pi/2$, κατά συνέπεια για $x \in (-1,1)$. Θέτοντας $\omega = \sin^{-1}x$, έχουμε $x = \sin\omega$ και

$$\cos\omega = \sqrt{1-\sin^2\omega} = \sqrt{1-x^2}$$

αφού $\omega \in (-\pi/2, \pi/2)$. Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στον τύπο της παραγώγου παίρνουμε το ζητούμενο.

Πεπλεγμένη παραγώγιση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα: Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=8$ στο σημείο $(2,2)$. Σύμφωνα με ό,τι γνωρίζουμε πρέπει να βρούμε τη συνάρτηση $y=f(x)$ το γράφημα της οποίας είναι το τμήμα του κύκλου που μας ενδιαφέρει (ο κύκλος δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης) και έπειτα να υπολογίσουμε την παράγωγο της f στο σημείο $(2,2)$ η οποία θα μας δώσει την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας. Λύνοντας την εξίσωση ως προς y βρίσκουμε

$$y^2=8-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{8-x^2}$$

απ' όπου επιλέγουμε $y=f(x)=\sqrt{8-x^2}$ αφού για $x=2$ πρέπει να είναι $y=2$. Έτσι βρίσκουμε

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{8-x^2}} \qquad \text{οπότε} \qquad f'(2)=-1$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y-2=-1(x-2)\Rightarrow y=4-x.$$

Πεπλεγμένη παραγώγιση (συνέχεια)

Προσπαθώντας να γενικεύσουμε το πρόβλημα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει δίνεται σε **πεπλεγμένη μορφή** μέσω μιας εξίσωσης $F(x,y)=0$, όπου $F(x,y)=x^2+y^2-8$. Υποθέτοντας ότι η μεταβλητή y είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x σε κάποιο διάστημα γύρω από το $x=2$ μπορούμε να παραγωγίσουμε την εξίσωση $x^2+y^2=8$ και από τη σχέση που θα προκύψει να βρούμε την παράγωγο στο $x=2$. Έτσι έχουμε

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}8 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \tag{3}$$

απ' όπου για $x=2$ και $y=2$ βρίσκουμε $4+4y'(2)=0$, δηλαδή $y'(2)=-1$, έτσι

$$y-2=-1(x-2), \qquad \text{ή} \qquad y=4-x.$$

Σημειώνουμε ότι από την (3) μπορούμε να γράψουμε, εκεί όπου $y\neq 0$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο, λέγεται **πεπλεγμένη παραγώγιση**.

´Ασκηση

Να βρεθούν τα σημεία στο γράφημα της $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$ στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια.

´Ασκηση

Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στα αντιδιαμετρικά σημεία της έλλειψης

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

είναι παράλληλες. **Υπόδειξη**: Τα αντιδιαμετρικά σημεία της έλλειψης, όλα εκτός από ένα ζευγάρι, είναι τομές της ευθείας με εξίσωση $y = m(x-p) + q$, $m \in \mathbb{R}$ και της έλλειψης.

´Ασκηση

Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Θεώρημα (Θεώρημα του Rolle)

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a)=f(b)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f'(x_0)=0$.

Θεώρημα (Θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ))

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0). \tag{4}$$

Πόρισμα

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε η f είναι σταθερή στο (a,b).

Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει αν το διάστημα αντικατασταθεί με ένωση ξένων μεταξύ τους διαστημάτων, για παράδειγμα αν

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 2, & \text{αν } 1 < x < 2 \end{cases}$$

τότε $f'(x) = 0$ για όλα τα $x \in (0,1) \cup (1,2)$, αλλά η f δεν είναι σταθερή!

Πόρισμα

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν την ίδια παράγωγο στο (a,b), τότε για κάποια σταθερά c είναι $f(x) = g(x) + c$.

Πόρισμα

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα (a,b).

1. *Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x, τότε η f είναι αύξουσα στο (a,b).*
2. *Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x, τότε η f είναι φθίνουσα στο (a,b).*

Παράδειγμα

Εάν $0 < a < b$ δείχνουμε ότι

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}.$$

Η $f(x) = \arctan x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε

$$\arctan b - \arctan a = (b-a)\arctan' \xi = \frac{b-a}{1+\xi^2} \qquad \text{(από το ΘΜΤ)}$$

για κάποιο $\xi \in (a,b)$. Επειδή για $0 < a < \xi < b$ είναι $0 < a^2 < \xi^2 < b^2$ έπεται ότι

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \frac{b-a}{1+\xi^2} < \frac{b-a}{1+a^2}$$

συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

Άσκηση

Εάν $0 < a < b$ δείξτε ότι

$$1 - \frac{a}{b} < \log \frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1.$$

Άσκηση

Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\arctan x = 1 - x$$

έχει μοναδική λύση και βρήτε ένα λογικό διάστημα το οποίο την περιέχει.

Θεώρημα (Γενικευμένο Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy)

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Εάν $g(a) \neq g(b)$ και οι f', g' δεν είναι ταυτόχρονα ίσες με μηδέν, τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Θεώρημα (Θεώρημα μέσης τιμής του Taylor)

Έστω ότι η συνάρτηση $f^{(n)}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(b-a)^n. \tag{5}$$

Αν x και x_0 είναι σημεία του (a,b) το ΘΜΤ γράφεται

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \qquad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } x \text{ και } x_0. \tag{6}$$

Ή για $x \in (a,b)$ και $|h|$ μικρό

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\delta h)h \qquad \text{για κάποιο } \delta \in (0,1). \tag{7}$$

Παρόμοια η (5) γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned} \tag{8}$$

όπου το ξ είναι μεταξύ x και x_0. Το πολυώνυμο

$$P_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{9}$$

λέγεται **πολυώνυμο Taylor** βαθμού n της f στο x_0.

Έτσι η (8) μπορεί να γραφεί

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{10}$$

όπου το **υπόλοιπο** $R_n(x)$ στο x_0 δίνεται από τη σχέση

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{11}$$

με το ξ να είναι μεταξύ x_0 και x. Η έκφραση αυτή του υπολοίπου είναι η **μορφή του Lagrange**. Μια άλλη έκφραση για το R_n είναι η **μορφή του Cauchy**

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0), \tag{12}$$

με το ξ να είναι μεταξύ x_0 και x. Εν γένει τα ξ στις (11) και (12) είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Βασικό Παράδειγμα

Οι e^x, $\sin x$ και $\cos x$ έχουν παραγώγους όλων των τάξεων και $(e^x)^{(n)} = e^x$,

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \begin{cases} (-1)^k \sin x & n = 2k, \\ (-1)^k \cos x & n = 2k+1, \end{cases} \qquad \frac{d^n}{dx^n}\cos x = \begin{cases} (-1)^k \cos x & n = 2k, \\ (-1)^{k+1} \sin x & n = 2k+1, \end{cases}$$

με $k = 0, 1, 2, \ldots$. Έτσι για $x_0 = 0$ και για κάθε x υπάρχει ξ μεταξύ x και μηδέν ώστε

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{13}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \frac{\sin\xi\, x^{2n+2}}{(2n+2)!} \tag{14}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \pm \frac{\sin\xi\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{15}$$

για $n = 0, 1, 2, \ldots$ Από τις σχέσεις αυτές εξάγονται διάφορα συμπεράσματα. Ας δούμε μερικά.

(1) Από την (13) για $x = 1$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και ένα ώστε

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \qquad 0 < \xi < 1.$$

Έτσι έχουμε

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{e}{(n+1)!} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ γεγονός που αποδεικνύει ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

συγκλίνει στο e.

(2) Για $n = 0$ και $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και x ώστε

$$\sin x = x - \frac{x^2}{2}\sin\xi \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x}{2}\sin\xi$$

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \frac{|x|}{2}|\sin\xi| \leq \frac{|x|}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

(3) Όμοια για $n=0$ και $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και x ώστε

$$\cos x = 1 - x\sin\xi \Rightarrow \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin\xi$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = -\sin 0 = 0,$$

αφού $0<|\xi|<|x|$ και κατά συνέπεια $\xi \to 0$ καθώς $x \to 0$.

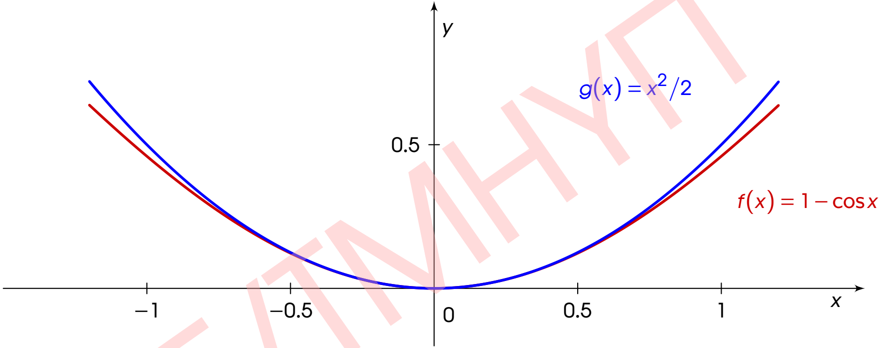
(4) Όμοια για $n=1$ και $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και x ώστε

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\sin\xi \Rightarrow \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{6}\sin\xi$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

αφού $0<|\xi|<|x|$ και κατά συνέπεια $\xi \to 0$ καθώς $x \to 0$.



Σχήμα: Για μικρές τιμές του $|x|$ είναι $1 - \cos x \approx x^2/2$

(5) Από την (13) βλέπουμε ότι αν P_n είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού n για την e^x, τότε

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

και $e^x - P_n(x) = R_n(x)$ όπου

$$|R_n(x)| = e^{\xi} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

αφού το ξ είναι μεταξύ 0 και x. Επειδή $x^n/n! \to 0$ καθώς $n \to \infty$[1] έπεται ότι $R_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

[1] Δείχνουμε ότι για $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Έστω N ένας σταθερός φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $N > 2a$, τότε για $n > N$

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N}\frac{a}{N+1}\cdots\frac{a}{n} \leq a^N \left(\frac{a}{N}\right)^{n-N} < a^N \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \frac{(2a)^N}{2^n}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο αφού το δεξί άκρο της ανισότητας τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$.

οπότε

$$\lim_{n\to\infty} |e^x - P_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \Rightarrow e^x = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

και από τη μορφή των P_n είναι λογικό να γράψουμε

$$e^x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{16}$$

Το όριο των πολυωνύμων P_n καθώς $n \to \infty$, το άθροισμα δηλαδή όλων των όρων (άπειροι το πλήθος) $x^n/n!$ είναι μια σειρά την οποία θα λέμε **δυναμοσειρά** (από τη μορφή των όρων) της e^x γύρω από το $x = 0$. Έτσι κάθε πολυώνυμο P_n είναι το μερικό άθροισμα S_n της δυναμοσειράς. Τη δυναμοσειρά τη λέμε **ανάπτυγμα Taylor** της e^x γύρω από το $x = 0$. Το ανάπτυγμα αυτό υπάρχει για κάθε πραγματικό αριθμό και συγκλίνει, όπως δείξαμε στο e^x. Έτσι θα λέμε ότι η δυναμοσειρά (16) **συγκλίνει** στην e^x για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, από τον ορισμό της συνάρτησης exp, έχουμε ότι $e^x = \exp x$.

´Ασκηση

Χρησιμοποιώντας τις (14) και (15) και εργαζόμενοι όπως στο αποτέλεσμα του βασικού Παραδείγματος για την εκθετική συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{17}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{18}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

΄Ασκηση

Η $f(x) = \arctan x$, έχει παραγώγους όλων των τάξεων.

- (α΄) Δείξτε ότι
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x)$$
για κατάλληλο R_n.
- (β΄) Δείξτε ότι $R_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $-1 \leq x \leq 1$ και συμπεράνατε ότι
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Παράδειγμα

Προσεγγίζοντας τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ με ένα πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού στο $x_0 = 8$, πόσο ακριβής είναι η προσέγγιση όταν $7 \leq x \leq 9$;

Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το

$$P_2(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2.$$

Υπολογίζουμε

$$f(x) = x^{1/3} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$$

$$f(8) = 2 \qquad f'(8) = \frac{1}{12} \qquad f''(8) = -\frac{1}{144}$$

επομένως

$$\sqrt[3]{x} \approx 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η ακρίβεια της προσέγγισης εκτιμάται από το υπόλοιπο $R_2(x)$ αφού

$$f(x) - P_2(x) = R_2(x),$$

όπου το ξ στην έκφραση του $R_n(x)$ είναι μεταξύ 8 και x. Εδώ είναι

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-8)^3 = \frac{10}{27}\xi^{-8/3}\frac{(x-8)^3}{3!} = \frac{5(x-8)^3}{81\xi^{8/3}}.$$

Επειδή $x \in [7,9]$ είναι $-1 \leq x-8 \leq 1$, ισοδύναμα $|x-8| \leq 1$ και $\xi > 7$, οπότε

$$|R_2(x)| = \left|\frac{5(x-8)^3}{81\xi^{8/3}}\right| < \frac{5 \cdot 1}{81 \cdot 7^{8/3}} < 0.0004.$$

Έτσι για κάθε $x \in [7,9]$ έχουμε

$$\left|\sqrt[3]{x} - \left(2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2\right)\right| < 0.0004.$$