ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

2η Διάλεξη

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών
Το μιγαδικό επίπεδο
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, η εκθετική συνάρτηση

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

26 Φεβρουαρίου 2024

Οι μιγαδικοί αριθμοί

Η εξίσωση

$$x^2 + 1 = 0$$

δεν έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς αφού για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι $x^2 \geq 0$. Διατυπώνεται λοιπόν το ερώτημα κατά πόσον υπάρχει ένα σύστημα αριθμών που κατά κάποια έννοια επεκτείνει τους πραγματικούς αριθμούς και είναι τέτοιο ώστε η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ να έχει λύση. Αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο σύστημα υπάρχει και αυτό είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Σε αυτό το σύστημα οι λύσεις της $x^2 + 1 = 0$ δεν θα μπορούσαν να είναι άλλες από τις

$$x = \sqrt{-1}, \qquad \text{και} \qquad x = -\sqrt{-1}.$$

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Στο σύνολο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, όπου

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = y_2,$$

με τη γνωστή πρόσθεση

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1}$$

ορίζουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού με τη σχέση

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{2}$$

Παρατηρούμε ότι για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) + (0,0) = (x, y) \tag{3}$$

$$(x, y) + (-x, -y) = (0,0) \tag{4}$$

$$(x, y)(1,0) = (x, y), \tag{5}$$

δηλαδή το $(0,0)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, δηλαδή το μηδέν, το $(-x,-y)$ είναι το αντίθετο του (x,y), ενώ το $(1,0)$ είναι ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, η μονάδα. Εξετάζοντας εάν υπάρχει το αντίστροφο του (x,y), δηλαδή εκείνο το (x',y') για το οποίο

$$(x,y)(x',y') = (1,0)$$

και παρατηρώντας ότι

$$(0,0)(x',y') = (0,0) \tag{6}$$

υποθέτουμε ότι $(x,y) \neq (0,0)$. Εάν (a,b) είναι το αντίστροφο στοιχείο του (x,y), εάν αυτό υπάρχει, τότε θα πρέπει

$$(x,y)(a,b) = (xa - yb, xb + ya) = (1,0).$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα $xa - yb = 1$ και $xb + ya = 0$ βρίσκουμε

$$a = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad b = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Οι αριθμοί a και b υπάρχουν, καθότι $x^2 + y^2 > 0$ οποτεδήποτε $(x, y) \neq (0,0)$, επομένως το αντίστροφο του (x, y) το οποίο συμβολίζουμε με $(x, y)^{-1}$ είναι το

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right). \tag{7}$$

Το σύνολο των σημείων $z = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις (1) και (2) συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$ και τα στοιχεία του καλούμε *μιγαδικούς αριθμούς* (complex numbers).

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{C}$ είναι σώμα, ικανοποιούνται δηλαδή οι νόμοι

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, για κάθε z_1, z_2 στο $\mathbb{C}$.
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.
3. Υπάρχει ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός $\mathbf{0} = (0,0)$, έτσι ώστε $z + \mathbf{0} = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
4. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός $-z$, έτσι ώστε $z + (-z) = \mathbf{0}$.
5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$, για κάθε z_1, z_2 στο $\mathbb{C}$.
6. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.
7. Υπάρχει ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός $\mathbf{1} = (1,0)$, έτσι ώστε $z \cdot \mathbf{1} = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
8. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός z^{-1} έτσι ώστε $z \cdot z^{-1} = \mathbf{1}$.
9. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.

Απόρροια των πράξεων (1) και (2) είναι ότι

$$(x,y) = (x,0) + (0,y)$$
$$(0,1)(y,0) = (0,y)$$

έτσι κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0). \tag{8}$$

Εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, σημείο της ευθείας, τότε μπορεί να ταυτοποιηθεί με το $(x,0)$, σημείο του επιπέδου. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$(x_1,0) + (x_2,0) = (x_1 + x_2,0), \qquad (x_1,0)(x_2,0) = (x_1x_2,0),$$

δηλαδή το σώμα των μιγαδικών αριθμών επεκτείνει κατά φυσιολογικό τρόπο το σώμα των πραγματικών αριθμών, και υπό το πρίσμα της ταυτοποίησης $x \equiv (x,0)$ μπορούμε να θεωρούμε ότι $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Στη συνέχεια θα γράφουμε 0 αντί για **0** και 1 αντί για **1**. Θέτοντας $i = (0,1)$ σύμφωνα με την παραπάνω ταυτοποίηση η (8) γράφεται

$$(x,y) = x + iy. \tag{9}$$

Ο μιγαδικός αριθμός i λέγεται **φανταστική μονάδα** (imaginary unit) για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί παρακάτω. Εάν $z=(x,y)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $z=x+iy$. Εάν $z_1=x_1+iy_1$ και $z_2=x_2+iy_2$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε το άθροισμα z_1+z_2 και το γινόμενο z_1z_2 δίνονται, μέσω των (1) και (2), από τις σχέσεις

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{10}$$

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \tag{11}$$

Όπως και στους πραγματικούς αριθμούς, επαγωγικά ορίζουμε $z^{n+1}=z^nz$, για κάθε φυσικό αριθμό n. Παρατηρούμε ότι

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1,$$

σύμφωνα με την ταυτοποίηση, γεγονός που δικαιολογεί την ονομασία φανταστική μονάδα. Επειδή $-i=(0,-1)$ θα είναι

$$(-i)^2=(0,-1)(0,-1)=(-1,0)=-1.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι $i^2+1=0$ και $(-i)^2+1=0$.

Παρατήρηση

Ας θεωρήσουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$. Από τον αντιμεταθετικό νόμο (νόμος M5) έχουμε $iy = yi$ οπότε ο μπορούμε να γράφουμε

$$z = x + iy, \qquad \text{ή} \qquad z = x + yi.$$

Επίσης από την μοναδικότητα του αντίθετου μιγαδικού αριθμού έπεται ότι

$$i(-y) = (-1)iy = -iy.$$

Έτσι από τις (9), (4) και (7) έπεται ότι οι $-z$ και z^{-1}, εφόσον $z \neq 0$, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$-z = -x + i(-y) = -x - iy \tag{12}$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \tag{13}$$

Παρατήρηση

Έστω $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, τότε κάνοντας χρήση του νόμου Μ9 (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση) υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) && (\text{νόμος Μ9}) \\
&= x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2 && (\text{νόμος Μ9}) \\
&= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 && (\text{νόμος Μ5}) \\
&= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 - y_1 y_2 && (i^2 = -1) \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) && (\text{νόμος Μ9})
\end{aligned}
$$

που είναι η (11). Ο πολλαπλασιασμός δηλαδή, μιγαδικών αριθμών μπορεί να εκτελεσθεί με χρήση της οικείας, από τους πραγματικούς αριθμούς, επιμεριστικής ιδιότητας.

Παρατήρηση

Εάν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπως στους πραγματικούς αριθμούς, η αφαίρεση και το πηλίκο ορίζονται, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + iy_1) + (-x_2 + i(-y_2)) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{14}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (x_1 + iy_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{15}$$

Παρατηρούμε ότι για $z_1 = 1 = 1 + i0$ και $z_2 = z = x + iy$ από την τελευταία σχέση έπεται

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = z^{-1}. \tag{16}$$

Επακόλουθο της τελευταίας αυτής σχέσης είναι η

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}. \tag{17}$$

Ορισμός

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$, τότε $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}$. Ο x λέγεται **πραγματικό μέρος** (real part) του z και γράφουμε $x = \operatorname{Re} z$, και ο y λέγεται **φανταστικό μέρος** (imaginary part) του z και γράφουμε $y = \operatorname{Im} z$.

Έτσι εάν $z \in \mathbb{R}$ τότε $\operatorname{Re} z = z$ και $\operatorname{Im} z = 0$, ενώ εάν $z = iy$, με $y \in \mathbb{R}$, τότε $\operatorname{Re} z = 0$ και $\operatorname{Im} z = -iz$.

Ορισμός

Οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι *ίσοι* και γράφουμε $z_1 = z_2$, εάν και μόνον εάν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$, ισοδύναμα $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ και $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Ερώτημα: Υπάρχει στο $\mathbb{C}$ μία διάταξη που να είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και να επεκτείνει τη γνωστή διάταξη του $\mathbb{R}$;

Αν υπάρχει, έστω '$\leq$', τότε θα πρέπει είτε $0 \leq i$, είτε $0 \geq i$. Εάν $0 \leq i$, τότε πολλαπλασιάζοντας με i παίρνουμε $0i \leq i^2$, ή ισοδύναμα $0 \leq -1$, ή ισοδύναμα $0 \geq 1$ που είναι άτοπο. Όμοια εάν $0 \geq i$ τότε πολλαπλασιάζοντας πάλι με i θα είχαμε $0i \leq i^2$, ή ισοδύναμα $0 \leq -1$, ή ισοδύναμα $0 \geq 1$ που είναι επίσης άτοπο.

Ορισμός

Έστω $z = x + iy$ ένας μιγαδικός αριθμός.

1. **Το μέτρο** (modulus) του z, συμβολίζεται με $|z|$, ορίζεται να είναι ο πραγματικός αριθμός
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{18}$$
2. **Ο συζυγής** (conjugate) του z, συμβολίζεται με $\bar{z}$, ορίζεται να είναι ο μιγαδικός αριθμός
$$\bar{z} = x - iy. \tag{19}$$

Παρατηρούμε ότι αν $z \in \mathbb{R}$, ισοδύναμα $y = 0$, τότε

$$|z| = \sqrt{x^2} = |x| \tag{20}$$

δηλαδή το μέτρο μιγαδικού αριθμού γενικεύει την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. Για το λόγο αυτό το μέτρο το λέμε και απόλυτη τιμή. Επιπλέον αν $z \in \mathbb{R}$, τότε $\bar{z} = z$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το μέτρο και ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $-i(2-i3)$.

Εάν $z=-i(2-i3)$, τότε $z=-i2+3i^2=-3-i2$, οπότε

$$|z|=|-i(2-i3)|=|-3-i2|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$$
$$\bar{z}=\overline{-i(2-i3)}=\overline{-3-i2}=-3+i2.$$

Παρατήρηση

Εάν $z=x+iy$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε $x=\operatorname{Re} z$ και $y=\operatorname{Im} z$. Επειδή $z+\bar{z}=x+iy+x-iy=2x$, και $z-\bar{z}=x+iy-(x-iy)=i2y$, συμπεραίνουμε

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z=\frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{21}$$

Επίσης $x\le|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$, όμοια $y\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$, οπότε

$$\operatorname{Re} z\le|\operatorname{Re} z|\le|z|, \qquad \operatorname{Im} z\le|\operatorname{Im} z|\le|z|. \tag{22}$$

Ιδιότητες του μέτρου και του συζυγούς μιγαδικού αριθμού:

1. $|z| \geq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, και $|z| = 0$ εάν και μόνον εάν $z = 0$.
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.
3. $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 με $z_2 \neq 0$.
4. $z = \bar{z}$ εάν και μόνον εάν $z \in \mathbb{R}$.
5. $z = \bar{\bar{z}}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
6. $|z| = |\bar{z}|$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
7. $|z|^2 = z\bar{z}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
8. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.
9. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.
10. $\overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 με $z_2 \neq 0$.

´Ασκηση

Να δειχθεί ότι ο αριθμός a είναι πραγματικός εάν και μόνον εάν $\mathrm{Re}\, a = a$.

Παρατήρηση

Ας είναι z_1, και z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί. Τότε ισχύει η **τριγωνική ανισότητα**

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|. \tag{23}$$

Από τις ιδιότητες έχουμε

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) && (\text{ ιδιότητες 7 και 8 }) \\
&= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} + |z_2|^2 && (\text{ ιδιότητες 7 και 5 }) \\
&= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 && (\text{ σχέση (21) }) \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 && (\text{ σχέση (22) }) \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2 && (\text{ ιδιότητα 2 }) \\
&= (|z_1|+|z_2|)^2 && (\text{ ιδιότητα 6 })
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η ζητούμενη τριγωνική ανισότητα.

Άσκηση

Εάν $z \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι

$$|z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \le \sqrt{2}|z|.$$

Παρατήρηση

Από τις ιδιότητες έπεται ότι για $z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \tag{24}$$

που είναι ακριβώς η σχέση που δίνει τον αντίστροφο. Θυμίζουμε ότι αν $z = x + iy \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Για $|z| = 1$, από την (24) έπεται ότι $1/z = \bar{z}$. Ειδικά για $z = i$ έχουμε

$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = \frac{-i}{|i|^2} = -i. \tag{25}$$

Αν $z = x + iy \neq 0$, τότε $|z| > 0$, οπότε τα κλάσματα

$$\frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{και} \qquad \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ορίζονται και ικανοποιούν τη σχέση

$$\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1,$$

κατά συνέπεια υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \qquad \text{και} \qquad \sin\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Ορισμός

Έστω $z \neq 0$, και έστω $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} \qquad \text{και} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}.$$

Ορίζουμε ως **όρισμα** (argument) του z και γράφουμε $\arg z$ το σύνολο όλων των τιμών $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή

$$\arg z = \{\theta + 2k\pi \,:\, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Ορισμός

Ορίζουμε ως **κύριο** ή **πρωτεύον** (principal) όρισμα του z εκείνο το θ για το οποίο ισχύει $\theta \in (-\pi, \pi]$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Arg}\, z$ το κύριο όρισμα του z, οπότε για κάθε $z \neq 0$ στο $\mathbb{C}$ είναι $-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$.

Πολλοί συγγραφείς επιλέγουν ως κύριο όρισμα εκείνο το θ που περιέχεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$, δηλαδή $0 \leq \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το όρισμα και το κύριο όρισμα για κάθε έναν από τους αριθμούς (i) $z = 1$, (ii) $z = -2$, (iii) $z = i$, (iv) $z = -1 - i$.

(i) Επειδή $z = x = |z| = 1$, είναι $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$, επομένως

$$\arg 1 = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{και} \qquad \operatorname{Arg} 1 = 0.$$

(ii) Εδώ είναι $x = -2$, $y = 0$ και $|z| = 2$, άρα $\cos\theta = -1$, $\sin\theta = 0$, επομένως

$$\arg(-2) = \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{και} \qquad \operatorname{Arg}(-2) = \pi.$$

(iii) Εδώ είναι $x = 0$, $y = 1$ και $|z| = 1$, άρα $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$, επομένως

$$\arg i = \{\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{και} \qquad \operatorname{Arg} i = \pi/2.$$

(iv) Εδώ είναι $x = y = -1$ και $|z| = \sqrt{2}$, άρα $\cos\theta = \sin\theta = -1/\sqrt{2}$, άρα ένα όρισμα είναι $\theta = 5\pi/4$, και ένα άλλο το $\theta = -3\pi/4$, επομένως

$$\arg(-1-i) = \{5\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{-3\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{και}$$

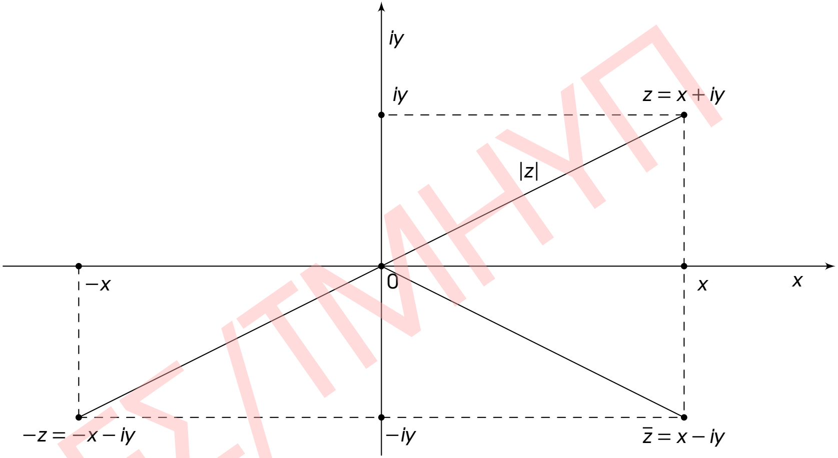
$$\operatorname{Arg}(-1-i) = -3\pi/4.$$

Σημειώνουμε ότι $5\pi/4 \notin (-\pi, \pi]$.

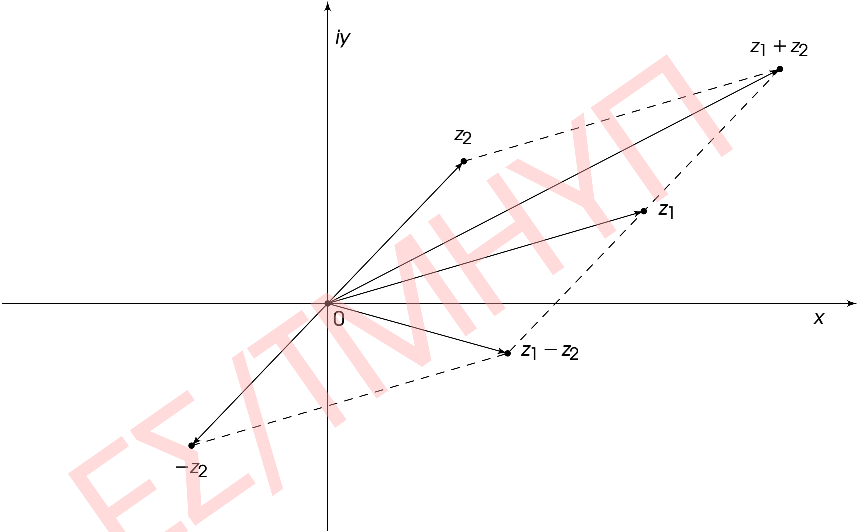
Το μιγαδικό επίπεδο

Από τον ορισμό των μιγαδικών αριθμών έπεται ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ και του σημείου (x, y) του επιπέδου. Έτσι το επίπεδο του οποίου κάθε σημείο (x, y) ταυτίζουμε με τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ ονομάζουμε **μιγαδικό επίπεδο** (complex plane).

- Ο άξονας των x λέγεται **πραγματικός άξονας** (real axis).
- Ο άξονας των y λέγεται **φανταστικός άξονας** (imaginary axis).
- Το μέτρο $|z|$ είναι η απόσταση του σημείου z από το 0.
- Ο συζυγής $\bar{z}$ του z είναι το συμμετρικό σημείο του z ως προς τον πραγματικό άξονα.



Σχήμα: Γραφική απεικόνιση των μιγαδικών αριθμών z, $\bar{z}$ και $-z$.



Σχήμα: Το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών.

Το άθροισμα των $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ αντιστοιχεί στο σημείο $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Έτσι λοιπόν ο αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να ταυτιστεί με το διάνυσμα με αρχή το σημείο $(0,0)$ και πέρας το (x,y) ενώ το μέτρο $|z|$ είναι το μέτρο του διανύσματος, δηλαδή το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος από το $(0,0)$ στο (x,y). Ο $z_1 + z_2$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων z_1 και z_2, και ο $z_1 - z_2$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων z_1 και $-z_2$.

Οι αριθμοί z_1 και z_2 ορίζουν ένα παραλληλόγραμο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2), και $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Τα $|z_1 + z_2|$ και $|z_1 - z_2|$ είναι τα μέτρα των διαγωνίων του παραλληλογράμου. Από την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας (23) προκύπτει **ο νόμος του παραλληλογράμου**[1]

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \tag{26}$$

ο οποίος μας λέει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμου ισούται με το άθροίσμα των τετραγώνων των πλευρών του.

[1] Ο νόμος αποδεικνύεται και με χρήση του νόμου του συνημιτόνου.

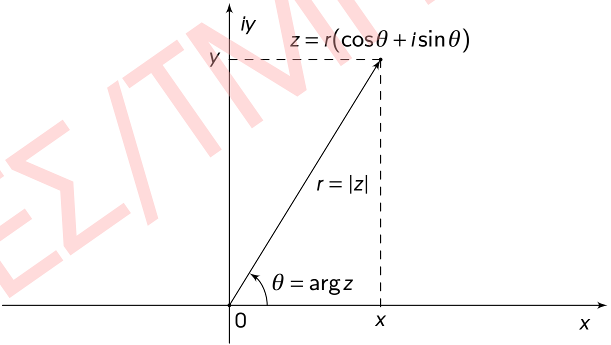
Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εάν r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου $(x, y) \neq (0,0)$ τότε

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta \quad \text{με} \quad |z| = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = r.$$

Η **τριγωνομετρική μορφή** (trigonometric form) του z είναι η έκφραση

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{27}$$



Παράδειγμα

Να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι αριθμοί
(i) $z = 1 + i$, (ii) $z = 1$, (iii) $z = i$, (iv) $z = -2$.

(i) Επειδή $|1+i| = \sqrt{2}$, έχουμε

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

(ii) $1 = 1 + i0 = \cos 0 + i\sin 0$.
(iii) $i = 0 + i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$.
(iv) $-2 = 2(-1 + i0) = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Αν $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)], \end{aligned}$$

οπότε η τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 z_2$ δίνεται από τη σχέση

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \tag{28}$$

Εάν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι μη μηδενικός αριθμός, ισοδύναμα $r \neq 0$, τότε από τη σχέση (28) έπεται ότι

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]. \tag{29}$$

Η σχέση αυτή προκύπτει επίσης από τον τύπο του αντίστροφου μιγαδικού αριθμού. Εάν τώρα $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι διάφορος του μηδενός, τότε συνδυάζοντας τις (28) και (29) έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{30}$$

Εάν $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ με μαθηματική επαγωγή μέσω της (28) έχουμε

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)], \tag{31}$$

ειδικά για $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, για κάθε φυσικό αριθμό n, προκύπτει

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]. \tag{32}$$

Εάν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \neq 0$, από τις σχέσεις (29) και (32) έπεται ότι για $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)],$$

και επειδή $z^0 = 1$, τελικά η σχέση (32) ισχύει για κάθε ακέραιο $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Εάν $z = \cos\theta + i\sin\theta$ η (32) μετασχηματίζεται στην

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{33}$$

Η τελευταία σχέση είναι ο **τύπος του de Moivre**.
Μία εφαρμογή του τύπου του de Moivre είναι η εύρεση ριζών μιγαδικών αριθμών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εάν w είναι ένας μιγαδικός αριθμός και $n \geq 2$ είναι ένας φυσικός αριθμός να βρεθούν μιγαδικοί z τέτοιοι ώστε $z^n = w$. Έστω ότι $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε παρατηρούμε ότι ο αριθμός $z_0 = r^{1/n}(\cos(\theta/n) + i\sin(\theta/n))$ ικανοποιεί την

$$z_0^n = \left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\right]^n = r(\cos\theta + i\sin\theta) = w,$$

δηλαδή ο z_0 είναι μία λύση του προβλήματος.

Οι $z_k = r^{1/n}(\cos[(\theta+2k\pi)/n]+i\sin[(\theta+2k\pi)/n])$, $k = 1,2,\ldots$ είναι επίσης λύσεις

$$z_k^n = \left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]^n = r(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)) = w.$$

Έχουμε λοιπόν ότι οι αριθμοί $z_k = r^{1/n}(\cos[(\theta+2k\pi)/n]+i\sin[(\theta+2k\pi)/n])$ για $k=0,1,2,\ldots$ ικανοποιούν την $z_k^n = w$. Στη συνέχεια θυμίζουμε ότι για n σταθερό κάθε $k\in\mathbb{N}$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $k = m+\ell n$ όπου $m=0,1,\ldots,n-1$ και $\ell\in\mathbb{N}$ (διαίρεση του k δια n). Έτσι εάν $k\geq n$, τότε

$$\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2m\pi+2\ell n\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2m\pi+2\ell n\pi}{n}\right)\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2m\pi}{n}+2\ell\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2m\pi}{n}+2\ell\pi\right)\right)\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2m\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2m\pi}{n}\right)\\
&= z_m
\end{aligned}$$

όπου $m=0,1,2,\ldots,n-1$.

Συμπέρασμα: Οι n το πλήθος μιγαδικοί αριθμοί

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{34}$$

είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και λέγονται n-οστες ρίζες του $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Παράδειγμα

Επειδή $1 = \cos 0 + i\sin 0$, οι *n-οστες ρίζες της μονάδας* είναι οι αριθμοί

$$\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1. \tag{35}$$

Εάν ορίσουμε

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \tag{36}$$

τότε από τον τύπο του de Moivre έπεται ότι οι n-οστες ρίζες της μονάδας είναι οι $1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$. Παρατηρούμε ότι $\omega_n^n = 1$. Οι n-οστες ρίζες της μονάδας είναι οι κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου με n πλευρές εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο.

Παράδειγμα

Να βρεθούν αριθμοί z τέτοιοι ώστε $z^2 = -2$ (τετραγωνικές ρίζες του -2).

Είναι $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$, οπότε οι αριθμοί που ζητούμε δίνονται από τη σχέση

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right), \qquad k = 0, 1.$$

Έτσι έχουμε

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{2}, \qquad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{2}.$$

Πράγματι $z_0^2 = (i\sqrt{2})^2 = i^2 2 = -2$ και $z_1^2 = (-i\sqrt{2})^2 = i^2 2 = -2$.

Παράδειγμα

Εάν $z_1 = 2\sqrt{3} - i2$ και $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ να γραφούν οι z_1 και z_2 σε πολική μορφή και να υπολογισθούν οι $z_1 z_2$ και z_1 / z_2.

Είναι $|z_1| = |2\sqrt{3} - i2| = \sqrt{16} = 4$ και $|z_2| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$ οπότε

$$z_1 = 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$z_2 = 2\left[\left(-\frac{1}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right].$$

Από την σχέση (28) υπολογίζουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4 \cdot 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 8\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = i8, \end{aligned}$$

ενώ από την (30) το πηλίκο

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Σύνολα και γεωμετρικοί τόποι στο μιγαδικό επίπεδο

Η ευθεία των πραγματικών αριθμών, ως υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, μπορεί να εκφρασθεί ως το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μηδενικό φανταστικό μέρος, δηλαδή

$$\mathbb{R} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \operatorname{Im} z = 0\}$$

ή ως

$$\mathbb{R} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \bar{z} = z\}.$$

αφού κάθε πραγματικός αριθμός είναι ίσος με τον συζυγή του. Γενικότερα, υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου μπορούν να εκφρασθούν με κατάλληλες αλγεβρικές σχέσεις. Για παράδειγμα το σύνολο

$$\{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \operatorname{Re} z > 0\}$$

παριστάνει το ημιεπίπεδο στα δεξιά του φανταστικού άξονα, ενώ το

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \text{ και } \operatorname{Im} z > 0\}$$

παριστάνει το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου.

Άσκηση

Τι παριστάνει καθένα από τα σύνολα:

- α΄ $C = \{z : |z| = 1\}$
- β΄ $D = \{z : |z| < 1\}$
- γ΄ $U = \{z : |z| > 1\}$
- δ΄ $C(w, r) = \{z : |z - w| = r\}$, όπου w είναι ένας μιγαδικός αριθμός και $r > 0$

Το $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ λέγεται **ανοικτός δίσκος** κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας r
Το $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ λέγεται **κλειστός δίσκος** κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας r.
Εάν w είναι ένας σταθερός μιγαδικός αριθμός και r είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, τα $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| \leq r\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| > r\}$, και $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r\}$ περιγράφουν αντίστοιχα τον ανοικτό δίσκο κέντρου w και ακτίνας r, τον κλειστό δίσκο κέντρου w και ακτίνας r, το εξωτερικό του κλειστού δίσκου κέντρου w και ακτίνας r, και το εξωτερικό του ανοικτού δίσκου κέντρου w και ακτίνας r.

Παράδειγμα

Να περιγραφεί το σύνολο

$$F = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z\}.$$

Εάν $z = x + iy \in F$, τότε $x = \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z = y$, κατά συνέπεια το F είναι η ευθεία $y = x$ του επιπέδου.

Άσκηση

Τι παριστάνει το σύνολο $G = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}(z+1)\}$;

Παράδειγμα

Να περιγραφεί το σύνολο

$$L = \{z : |z-1| = |z-2|\}.$$

Ένα z που περιέχεται στο δοσμένο σύνολο, ισαπέχει από τα σημεία 1 και 2, κατά συνέπεια το σύνολο είναι η μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα $[1,2]$.

Η εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y).$$

Ιδιότητες: Αν $z = x + iy$ και $w = s + it$, τότε

1. $e^{z+w} = e^{z}e^{w}$

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{x+s}[\cos(y+t) + i\sin(y+t)] \\ &= e^{x+s}[\cos y \cos t - \sin y \sin t + i(\sin y \cos t + \cos y \sin t)] \\ &= e^{x}(\cos y + i \sin y)e^{y}(\cos t + i \sin t) \\ &= e^{z}e^{w} \end{aligned}$$

2. $|e^{z}| = e^{\operatorname{Re} z}$

$$\begin{aligned} |e^{z}| &= \sqrt{(e^{x}\cos y)^2 + (e^{x}\sin y)^2} \\ &= e^{x} = e^{\operatorname{Re} z} \end{aligned}$$

Αν $z = x + iy$, με $x, y \in \mathbb{R}$ από την ιδιότητα (1) έπεται ότι

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y) \Rightarrow e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$
$$\Rightarrow e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

Συνεπώς

$$|e^{it}| = 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

γεγονός που συμφωνεί με την ιδιότητα (2).
Μπορούμε να γράφουμε

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

και η τελευταία σχέση είναι η **εκθετική μορφή** του μιγαδικού αριθμού z. Παρατηρούμε ότι για $m \in \mathbb{Z}$

$$e^{i2m\pi} = 1, \qquad e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\pi/2} = i, \qquad e^{i\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \qquad \dots$$

Η δεύτερη σχέση είναι η σημαντική μαθηματική εξίσωση $e^{i\pi} + 1 = 0$ στην οποία εμφανίζονται οι τέσσερις σημαντικές μαθηματικές σταθερές.

Παρατήρηση

1. Αν $z = re^{i\theta}$ και $w = \rho e^{i\phi}$, τότε $zw = r\rho e^{i(\theta+\phi)}$.
2. $e^z \neq 0$, αφού $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} > 0$.
3. Η συνάρτηση $f(t) = e^{it}$ απεικονίζει την πραγματική ευθεία στον μοναδιαίο κύκλο.

Ορισμός

Για $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

Άσκηση

Αποδείξτε ότι

α΄ $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

β΄ $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, για κάθε ζευγάρι $z, w \in \mathbb{C}$

γ΄ $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, για κάθε ζευγάρι $z, w \in \mathbb{C}$

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \cos(-3i) &= \left(e^{i(-3i)} + e^{-i(-3i)}\right)/2 \\ &= \left(e^{3} + e^{-3}\right)/2 \\ &> e^{3}/2 \end{aligned}$$

κατά συνέπεια η $|\cos z| \leq 1$ **δεν ισχύει** στους μιγαδικούς αριθμούς. Όμοια η $|\sin z| \leq 1$ **δεν ισχύει**. Οι cos και sin δεν είναι καν φραγμές συναρτήσεις στο $\mathbb{C}$.

Ορισμός

Για $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

με κατάλληλο πεδίο ορισμού για κάθε μία από αυτές.

´Ασκηση

Να βρεθούν οι ρίζες κάθε μιας από τις εξισώσεις

- α´ $\cos z = 0$ $\qquad (z = m\pi + \pi/2,\ m \in \mathbb{Z})$
- β´ $\cos z = 1$
- γ´ $\sin z = 0$ $\qquad (z = m\pi,\ m \in \mathbb{Z})$
- δ´ $\sin z = 1$

´Ασκηση

Αποδείξτε κάθε μια από τις σχέσεις

- α´ $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
- β´ $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$
- γ´ $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$