<u>ΠΡΑΓΜ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΡΑΓΜ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ</u>

Συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbf{R}$

$\begin{array}{l} f: A \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto y \end{array}$ ή $y = f(x),\ x \in A$,

Γραφική παράσταση συνάρτησης f

$C_f = \{\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ M(x,y)\ \tau o\upsilon\ \varepsilon\pi/\delta o\upsilon\ xy : y = f(x)\}$

- Συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο A

$f(x_1) < f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.

- Συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο A

$f(x_1) > f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.

- Άνω φραγμένη συνάρτηση $f: A \to \mathbf{R}$

Υπάρχει αριθμός s (άνω φράγμα της f) με την ιδιότητα: $f(x) \le s$, $\forall\ x \in A$.

(Ανάλογα ορίζεται η κάτω φραγμένη).

Φραγμένη λέγεται η συνάρτηση αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

- 1-1 συνάρτηση $f: A \to \mathbf{R}$

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ αν $x_1 \ne x_2$, τότε $f(x_1) \ne f(x_2)$, ισοδύναμα: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Σύνθεση της $f: A \to \mathbf{R}$ με την $g: B \to \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$ για τα οποία $f(x) \in B$.

Αντίστροφη συνάρτηση μιας 1-1 συνάρτησης f είναι η $f^{-1}: f(A) \to A$, που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ στο μοναδικό x, για το οποίο ισχύει $y = f(x)$, δηλ. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

✓ *Όριο συνάρτησης στο x_0 - Πλευρικά όρια*

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

✓ *Κριτήριο παρεμβολής*: Αν $g(x) \le f(x) \le h(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και στην περίπτωση που $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

✓ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

✓ *Συνέχεια* Η συνάρτηση $f: A \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

* * * * * * * * * * * * *

Παράγωγος συνάρτησης ($A = (a,b) \subseteq$ P)

Η συνάρτηση $f: A \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbf{R}$

Η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη τότε f συνεχής
- Αν f δεν είναι συνεχής τότε f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Ιδιότητες παραγώγων: Αν *f, g* παραγωγίσιμες

- $\left(f(x) \pm c g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' \pm c\left(g(x)\right)'\ \ c \in \mathbf{R}$
- $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)},\ g(x) \ne 0$
- Αν επιπλέον $f' \ne 0$ και f αντιστρέψιμη τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$,
- Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$

$$\left(f(g(x))\right)' = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Παράγωγοι συνήθων συναρτήσεων

$(c)' = 0$, $c \in \mathbf{R}$	$\left(x^k\right)' = k\,x^{k-1}$, $k \in \mathbf{R}$
$(\sin x)' = \cos(x)$	$(\cos x)' = -\sin(x)$
$(\tan x)' = 1/\cos^2 x$	$(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = 1/x$	$\left(a^x\right)' = \ln(a) \cdot a^x$, $1 \ne a > 0$
$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1 - x^2}$	$(\arctan x)' = 1/\left(1 + x^2\right)$

Σημαντικά θεωρήματα

Έστω συνάρτηση $f: [a,b] \to \mathbf{R}$.

✓ *Bolzano:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

✓ *Ενδιάμεσης τιμής:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \ne f(b)$, τότε, για κάθε αριθμό ρ μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \rho$.

✓ *Μέγιστης - ελάχιστης τιμής:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$. Επιπλέον υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ έτσι ώστε $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$, $\forall x \in [a,b]$.

✓ *Θεώρημα μέσης τιμής* (ΘΜΤ)*:* Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$

τέτοιο ώστε : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

✓ *Rolle:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = 0$.

✓ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), και $f'(x) = 0,\ \forall\ x \in (a,b)$, τότε $f(x) = c$.

✓ *Cauchy:* Αν οι $f(x), g(x)$ είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[a,b]$, διαφορίσιμες στο (a,b) και $g'(x) \ne 0, \forall x \in (a,b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (a,b)$: $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

✓ *Darboux:* Αν *f* παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με $f'(a) > f'(b)$ και $c \in \mathbf{R}$ με $f'(b) < c < f'(a)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = c$. (παρόμοια, αν $f'(a) < f'(b)$).

Εφαρμογή του ΘΜΤ για την προσέγγιση ρίζας

Αν η εξίσωση $x = f(x)$ έχει ρίζα a, με f παραγωγίσιμη στο $[a-h, a+h]$, και $|f'(x)| < m < 1$, $\forall x \in [a-h, a+h]$, τότε για αυθαίρετο $x_0 \in [a-h, a+h]$ η ακολουθία

$x_n = f(x_{n-1}),\ \ n = 1, 2, \ldots$, συγκλίνει στη ρίζα a.

Κανόνας l' Hospital

1η διατύπωση: Αν $f(a) = g(a) = 0$, $f'(a), g'(a)$ υπάρχουν και $g'(a) \ne 0$, τότε

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

2η διατύπωση : Αν $f(x_0) = g(x_0) = 0$, με $f(x), g(x)$ διαφορίσιμες στο (a,b), και $g'(x) \ne 0$, εκτός πιθανώς του $x_0 \in (a,b)$, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (Ο κανόνας ξαναχρησιμοποιείται αν ισχύουν οι ίδιες συνθήκες και για τις παραγώγους των $f(x), g(x)$.)

- Οι μορφές $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$, $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$ μετατρέπονται ως εξής

$\infty/\infty : \dfrac{f}{g} = \dfrac{1/g}{1/f}$ $\quad 0 \times (\pm\infty) : fg = \dfrac{f}{1/g}$ $\quad \infty - \infty : f - g = \dfrac{1/g - 1/f}{1/fg}$

- Οι μορφές $0^0,\ +\infty^0,\ 1^\infty$ μετατρέπονται $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a}(g(x)\ln f(x))}$, $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Σχεδίαση της γραφικής παράστασης C_f της $f: A \to \mathbf{R}$.

✓ *Από <u>πρώτη παράγωγο</u>*

- Αν $f'(x) > 0,\ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f γνησίως αύξουσα.
- Αν $f'(x) < 0,\ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f γνησίως φθίνουσα.

- Αν $f'(x_0)=0$, για κάποιο $x_0 \in A$ και υπάρχει ε>0 : $f'(x)>0$, $x_0-\varepsilon<x<x_0$ και $f'(x)<0$, $x_0<x<x_0+\varepsilon$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου. Ανάλογα για σημείο τοπ. ελαχίστου.

✓ *Από <u>δεύτερη παράγωγο</u>*

- Αν $f''(x)>0,\ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα *I*.
- Αν $f''(x)<0,\ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα *I*.
- Αν υπάρχει ε>0 με $f''(x)>0$ για $x_0-\varepsilon<x<x_0$ και $f''(x)<0$ για $x_0<x<x_0+\varepsilon$ (ή αντίστροφα), τότε το x_0 είναι σημείο καμπής.
- α) Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)>0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

  β) Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

✓ *<u>Ασύμπτωτες Ευθείες</u>*

- *Κατακόρυφη* ασύμπτωτη η ευθεία $x=a \in \mathbf{R}$, αν $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ ή $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$
- *Οριζόντια* ασύμπτωτη η ευθεία $y=b$, $b\in\mathbf{R}$, αν $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$
- *Πλάγια ασύμπτωτη* της C_f στο $\pm\infty$ η ευθεία $y=ax+b$,αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-ax-b\big)=0$ ($\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbf{R}$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b\in\mathbf{R}$

<u>Κυρτότητα και ανισότητες</u> Αν $f''(x)>0,\ \forall x\in I\subseteq A$, τότε

α) στο διάστημα *I* το γράφημα της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ευθεία σε κάθε σημείο $x_0\in I$ του γραφήματος της f.

β) $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2},\ \forall x_1,x_2\in I.$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- Κάθε συνεχής f είναι ολοκληρώσιμη
- $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
- $f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$
- ΘΜΤ: f συνεχής, τότε για κάποιο $\xi\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

Αόριστο ολοκλήρωμα ή αντιπαράγωγος (παράγουσα)

$F(x)+c=\int f(x)dx\Leftrightarrow\big(F(x)+c\big)'=f(x)$

Ιδιότητες

$\int df(x)=f(x)+c$

$\int\big(c_1f(x)+c_2h(x)\big)dx=c_1\int f(x)dx+c_2\int h(x)dx$

<u>Ολοκλήρωσης με Αντικατάσταση</u>

$x=g(t)$, $\int f(g(t))g'(t)dt=\int f(x)dx$

<u>Παραγοντική Ολοκλήρωση</u>

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

Πίνακας Ολοκληρωμάτων

- $\int kdx=kx+c$
- $\int x^a dx=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+c,\quad a\in\mathbf{R}-\{-1\}$
- $\int\dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+c$
- $\int\cos x\,dx=\sin x+c$
- $\int\sin xdx=-\cos x+c$
- $\int\dfrac{adx}{x^2+a^2}=\tan^{-1}(\dfrac{x}{a})+c=arc\tan(\dfrac{x}{a})+c,\quad a>0.$
- $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}(\dfrac{x}{a})+c=arc\sin(\dfrac{x}{a})+c,\quad a>0.$.
- $\int e^x dx=e^x+c$
- $\int\dfrac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+c$

Θεμελιώδη θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

I. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και F είναι μία αντιπαράγωγος της f, τότε $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

II. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε $\dfrac{dF}{dx}=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

* * * * * * * * * * * *

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

(α' είδους) $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$

ή $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$

(β' είδους) $\int_a^{b^-}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$

(b ιδιόμορφο σημείο)

$\int\limits_{a^+}^b f(x)dx=\lim\limits_{e\to0^+}\int\limits_{a+e}^b f(x)dx$

(a ιδιόμορφο σημείο)

(γ' είδους) = συνδυασμός α', β' είδους

$\int\limits_{a^+}^{b^-}f(x)dx=\lim\limits_{e\to0^+}\int\limits_{a+e}^c f(x)dx+\lim\limits_{e\to0^+}\int\limits_c^{b-e}f(x)dx$

με $a<c<b$ (a,b ιδιόμορφα σημεία)

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$

$\int\limits_{-\infty}^{a^-}f(x)dx=\lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^c f(x)dx+\lim\limits_{e\to0^+}\int\limits_c^{a-e}f(x)dx$

(a ιδιόμορφο σημείο)

$\int\limits_{a^+}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{e\to0^+}\int\limits_{a+e}^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$ (a ιδιόμορφο σημείο)

Εσωτερικό ιδιόμορφο σημείο $c\in(a,b)$

$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{e\to0^+}\int\limits_a^{c-e}f(x)dx+\lim\limits_{e\to0^+}\int\limits_{c+e}^b f(x)dx$

η πρωτεύουσα τιμή του Cauchy

$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{e\to0^+}\left(\int\limits_a^{c-e}f(x)dx+\int\limits_{c+e}^b f(x)dx\right)$

(c ιδιόμορφο σημείο)

Ο μετασχηματισμός Laplace μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ είναι $L\{f(t)\}(x)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)dt$, για κάθε τιμή του x για την οποία το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

<u>ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ-ΣΕΙΡΕΣ</u>

- Ακολουθία είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών. Συμβολισμός: $a_n=a(n)$.

Πρόοδοι

<u>Αριθμητική</u>: $a_{n+1}=a_n+\omega$, $\alpha_n=a_1+(n-1)\cdot\omega$

<u>Άθροισμα n όρων α.π.</u>: $S_n=\dfrac{n\cdot[2a_1+(n-1)\cdot\omega]}{2}$

<u>Γεωμετρική</u>: $a_{n+1}=\lambda a_n$ ($\Leftrightarrow a_n=\lambda^{n-1}\cdot a_1$).

<u>Άθροισμα n πρώτων όρων γ.π.</u>: $S_n=a_1\dfrac{\lambda^n-1}{\lambda-1}$, $\lambda\ne1$.

Γεωμετρικός μέσος: Αν a,b,c είναι 3 διαδοχικοί όροι γ.π. τότε $b^2 = a \cdot c$.

Σημαντικά όρια ακολουθιών

Το $x \in \mathbf{R}$ παραμένει σταθερό καθώς το $n \to \infty$ (στους τύπους που υπάρχει x)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0,\ \lvert x\rvert < 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1,\ x > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x\ ,\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0\ .$$

Φραγμένες ακολουθίες

- *άνω φραγμένη*: υπάρχει $M \in \mathbf{R}$: $a_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}$.
- *κάτω φραγμένη* : υπάρχει $m \in \mathbf{R}$: $m \le a_n,\ \forall n \in \mathbf{N}$.
- *Φραγμένη*: συγχρόνως άνω και κάτω φραγμένη, δηλ. υπάρχουν $m, M \in \mathbf{R} : m \le a_n \le M\ ,\ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

✓ Μια ακολουθία απολύτως φραγμένη είναι φραγμένη και αντιστρόφως.

✓ Μία φραγμένη ακολουθία δεν συγκλίνει κατ' ανάγκη.

Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία a_n, $n \in \mathbf{N}$ ονομάζεται

- αύξουσα, αν ισχύει $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- φθίνουσα, αν ισχύει $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- μονότονη, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες-Σύγκλιση

✓ Μία μονότονη ακολουθία δε συγκλίνει κατ' ανάγκη.

✓ Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα στο $\mathbf{R}$.

✓ Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

✓ Αν $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$ και $\lvert a_n\rvert \le \lvert\beta_n\rvert,\ \forall n \in \mathbf{N}$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

✓ Αν $\lim\limits_{n\to\infty}\lvert a_{n+1}/a_n\rvert = \lambda < 1$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ειδικές Κατηγορίες Σειρών

α) Γεωμετρικές Σειρές: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ar^n$.

- αν $\lvert r\rvert < 1$: συγκλίνει. Άθροισμα: $\frac{\alpha}{1-r}$,
- αν $r \ge 1$: απειρίζεται θετικά
- αν $r \le -1$: κυμαίνεται, το όριό της δεν υπάρχει.

β) p-Σειρές: $\varsigma(p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,

- αν $p > 1$: συγκλίνει • αν $p \le 1$: αποκλίνει

γ) Τηλεσκοπικές : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = b_n - b_{n+1}$

Συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Άθροισμα: $b_1 - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

δ) Εναλλάσσουσες Σειρές: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$ ή $a_n < 0$ για όλα τα $n = 0,1,2,\ldots$

ε) Αναπτύγματα Taylor: Αν η f είναι n+1 φορές παραγωγίσιμη σε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το a, τότε υπάρχει $\xi = \xi(x,n)$ μεταξύ a και x ωστε να ισχύει

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \qquad \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

με το υπόλοιπο $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Όταν $a = 0$, τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται και ανάπτυγμα Maclaurin.

Συνήθεις σειρές Taylor ($a = 0$)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\ ,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\ ,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\ ,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots\ ,\ -1 < x \le 1$$

$$\arctan x = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\ ,\ -1 \le x \le 1\ .$$

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

I. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ΔΕΝ συγκλίνει.

II. α) Αν οι σειρές $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν, τότε για κάθε $k,\lambda \in \mathbf{R}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(ka_n + \lambda b_n) = k\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \lambda\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

β) Αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει, τότε $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ δεν συγκλίνει.

III. Αν η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ συγκλίνει, τότε η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

IV. (Απλό κριτήριο σύγκρισης) Έστω $0 \le a_n \le b_n$.

- αν $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει.

V. (Γεν. κριτήριο σύγκρισης) Έστω $0 \le a_n$, $0 < b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c > 0$. Τότε οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ είτε συγκλίνουν είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα.

VI. (Κριτήριο λόγου - d' Alembert) Έστω $a_n \ne 0$ για $n \ge n_0$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert = \lambda$. Τότε:

- αν $\lambda < 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\lambda > 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει
- αν $\lambda = 1$, δεν συμπερασίνουμε.

VII. (Κριτήριο ρίζας - Cauchy). Έστω $a_n > 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lambda$

- αν $\lambda < 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\lambda > 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει
- αν $\lambda = 1$, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

VIII. (Κριτήριο Leibnitz) Έστω $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Αν η ακολουθία (a_n) είναι θετική, φθίνουσα και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η σειρά συγκλίνει.

IX. (Κριτήριο ολοκληρώματος) Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [1,+\infty) \to \mathbf{R}$ είναι θετική και φθίνουσα τότε $I = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ και $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγχρόνως συγκλίνουν ή αποκλίνουν και αν συγκλίνουν ισχύει: $I \le S \le I + f(1)$

<u>Παραγώγιση και ολοκλήρωση δυναμοσειρών όρο προς όρο</u>:

Αν $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ \ -R < x < R$ (R πραγματικός ή $+\infty$), τότε οι δυναμοσειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, συγκλίνουν για $-R < x < R$ και $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ \ \int f(x)dx = c + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\frac{x^{n+1}}{n+1},$ για $-R < x < R$.